

Anwendung von Parameterschätzverfahren zur Identifikation mechanischer Schwingungssysteme

H. Diesing, W. Tischer

0. Einleitung

Zur Lösung vieler technischer Probleme bildet die Modellierung, d. h. das Aufstellen eines möglichst „guten“ (adäquaten) mathematischen Modells des realen physikalischen Objektes oder Prozesses, eine wesentliche Grundlage. Hier sei nur auf die Bedeutung mathematischer Modelle für Steuer- und Regelungsaufgaben, die Prozeßoptimierung und -überwachung, die Maschinen- und Anlagendiagnostik sowie die Konstruktion verwiesen. Besondere Bedeutung kommt dabei den sogenannten parametrischen Modellen zu, d. h. solchen Modellen, die durch ein System von Gleichungen mit einer Anzahl unbekannter (zu bestimmender) Parameter beschrieben werden.

Die Aufgabe der Parameteridentifikation besteht in der Bestimmung der freien Modellparameter auf der Grundlage des bekannten (gemessenen) Eingangs-Ausgangsverhaltens des realen Systems. Hierzu existiert eine ganze Reihe von Parameterschätzverfahren, die in solchen Wissenschaftsgebieten wie Chemie, Biologie, Energetik, Kybernetik, Astronomie, aber auch in der Ökonomie und Soziologie bereits breite Anwendung gefunden haben, z. B. Gradientenverfahren, Stochastische Approximation, BAYES-Schätzung, Maximum-Likelihood-Verfahren, Stochastische Suchalgorithmen, Methode der kleinsten Quadrate u. a.

Der vorliegende Beitrag beschäftigt sich mit der Anwendung bestimmter Schätzverfahren in einem speziellen Gebiet der Mechanik: der Modellierung linearer und nichtlinearer mechanischer Schwingungssysteme unter Berücksichtigung deterministischer und stochastischer Einflüsse. Die hier vorgestellten Schätzverfahren lassen sich unter bestimmten Bedingungen auf die Methode der kleinsten Quadrate (Least-Square-Method = LS-Methode) zurückführen, eines der einfachsten und ältesten Schätzverfahren. Einige Nachteile dieser Methode, besonders bezüglich der Güte der Schätzung, konnten in letzter Zeit durch die Einführung methodischer Verbesserungen und abgewandelter Algorithmen ausgeglichen werden, worauf im Folgenden noch eingegangen wird. Andererseits bietet die LS-Methode nicht zu unterschätzende numerische Vorteile hinsichtlich des Aufwandes, Speicherplatzbedarfes und der Rechengeschwindigkeit. Außerdem kann das Verfahren in seiner rekursiven Form zur on-line-Identifikation eingesetzt werden.

Die Klasse der betrachteten Modelle umfaßt alle Schwingungssysteme, welche durch ein lineares oder nicht-lineares Differentialgleichungssystem 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten dargestellt werden können, z. B. Einmassenschwinger mit einem Freiheitsgrad,

Schwingerketten, Starrkörpermodelle, Mehrkörpersysteme und diskrete Balkenmodelle. Die vorgestellten Schätzverfahren arbeiten im diskreten Zeitbereich.

1. Aufgabenstellung

Wir betrachten ein mechanisches Schwingungssystem, dessen Modell durch eine i. a. nichtlineare Vektordifferentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$M\ddot{y} + G(y, \dot{y}) + G_0(y) = F(t) \quad (1.1)$$

beschrieben wird. Hier bedeuten M – Matrix der Massen und Trägheitsmomente, $G(y, \dot{y})$ – dissipative Kräfte, $G_0(y)$ – Rückstellkraft, $F(t)$ – Erregerkraft, y – Vektor der verallgemeinerten Koordinaten. Eine allgemeinere Darstellung erhält man durch die Beschreibung eines solchen Systems im Zustandsraum durch die Vektordifferentialgleichung 1. Ordnung

$$\dot{x} = f(t, x, \dot{x}) \quad (1.2)$$

mit dem Zustandsvektor x der verallgemeinerten Koordinaten und Geschwindigkeiten,

$$x \hat{=} \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

Von besonderer Bedeutung sind lineare Schwingungssysteme, die durch die Gleichung

$$M\ddot{y} + D\dot{y} + Cy = F(t) \quad (1.4)$$

mit D – Dämpfungsmatrix und C – Steifigkeitsmatrix beschrieben werden. Die (1.2.) äquivalente Zustandsform lautet

$$\dot{x} = Ax + b \quad (1.5)$$

mit x entsprechend (1.3) und

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}C & -M^{-1}D \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ F(t) \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

Die Dimension n des Vektors y ist gleich der Anzahl der Freiheitsgrade des mechanischen Systems. Um eine möglichst große Modellklasse zu erfassen wird vorausgesetzt, daß sich der Erregervektor $F(t)$ aus einem deterministischen und einem stochastischen Anteil zusammensetzt:

$$F(t) = Bu(t) + Qw(t) \quad (1.7)$$

hier sind $u(t)$ die deterministische Erregung (bzw. Steuervektor) und $w(t)$ das Eingangsrauschen, welches einen stationären, ergodischen Zufallsvektorprozeß mit den Eigenschaften

$$\left. \begin{aligned} E\{w(t)\} &= 0 \\ E\{w(t)w^T(\tau)\} &= R_w \delta(t-\tau), R_w \geq 0 \\ E\{u(t)w^T(\tau)\} &= 0 \quad \forall t, \tau \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

darstellt. B und Q sind Stellmatrizen.

Das Ziel der Parameteridentifikation besteht in der Bestimmung der Matrizen M, D, C, B und Q aufgrund der bekannten Systemaus- und Eingangssignale $y(t)$ und $u(t)$ bzw. bekannter Charakteristiken von $w(t)$. Dazu ist folgende Vorgehensweise möglich: Das reale Objekt wird an bestimmten Stellen durch Testsignale erregt und die Systemantwort $y(t)$ in den Koordinatenrichtungen in diskreten Zeitpunkten t_k ($k = 0, 1, \dots, N-1$; N - Anzahl der Abtastwerte) gemessen (abgetastet). Mit Hilfe eines der im folgenden Abschnitt vorgestellten Verfahren werden die Parametermatrizen des Modells (1.1.) geschätzt.

Deshalb muß zunächst die Modellgleichung vom kontinuierlichen in den diskreten Zeitbereich überführt werden bei Wahrung einer eindeutigen Zuordnung zwischen den entsprechenden Modellparametern. Für den Fall des linearen Modells wird dabei wie folgt vorgegangen ([2], [4], [5], [6]): Die Schwingungsgleichung (1.4.) wird zunächst in die Zustandsform (1.5.) überführt. Ist der Zustandsvektor zum Zeitpunkt t_k bekannt, so ergibt sich die allgemeine Lösung des Systems zum Zeitpunkt t_{k+1} zu

$$x(t_{k+1}) = e^{A(t_{k+1}-t_k)} x(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-\tau)} b(\tau) d\tau. \quad (1.9)$$

Es wird nun vorausgesetzt, daß das Erregersignal $b(t)$ in den Intervallen $[t_k, t_{k+1}]$ konstant ist, d. h.

$$b(\tau) = b(t_k) = \text{const.}, \quad \forall \tau \in [t_k, t_{k+1}]. \quad (1.10)$$

Nach Einführung einer konstanten Abtastzeit h

$$h = t_{k+1} - t_k \quad (1.11)$$

und Auswertung des Integrals geht (1.9) über in

$$x((k+1)h) = e^{Ah} x(kh) + A^{-1}(e^{Ah} - I) b(kh). \quad (1.12)$$

Mit den Abkürzungen

$$\left. \begin{aligned} x(kh) &\hat{=} x_k & b(kh) &\hat{=} b_k \\ G &\hat{=} e^{Ah} & H &\hat{=} A^{-1}(e^{Ah} - I) \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

erhält man aus (1.12) das (1.5) entsprechende zeitdiskrete System

$$x_{k+1} = G x_k + H b_k \quad (1.14)$$

d. h. eine Vektordifferenzgleichung 1. Ordnung mit konstanten Parametern (die Matrizen G und H hängen nur von der Abtastzeit h ab).

Die Forderung (1.10) kann in praktischen Fällen nur selten verwirklicht werden, die Abtastfrequenz

$$f_a = \frac{1}{h} \quad (1.15)$$

muß dann möglichst groß im Vergleich zu den höchsten Eigenfrequenzen des realen Systems gewählt werden, vgl. dazu z. B. [4] und [6]. Außerdem sei darauf verwie-

sen, daß die Matrix G nicht die besondere Struktur von A besitzt und folglich das System (1.14) nicht unmittelbar in eine Form entsprechend (1.4) umgewandelt werden kann. In [6] wird eine Ähnlichkeitstransformation angegeben, mit Hilfe derer die Zustandsgleichung (1.14) in eine Vektordifferenzgleichung 2. Ordnung überführt wird, in die nur der Koordinatenvektor y und die Erregung F zu verschiedenen Zeitpunkten eingehen:

$$\bar{M} y_{k+2} + \bar{D} y_{k+1} + \bar{C} y_k = \bar{F}_{k+1}^{(1)} + \bar{F}_k^{(2)} \quad (1.16)$$

Zusätzlichen Aufwand erfordert natürlich die meistens notwendige Rücktransformation der geschätzten \bar{M} , \bar{D} , \bar{C} , $\bar{B}^{(1)}$, $\bar{B}^{(2)}$, $\bar{Q}^{(1)}$ und $\bar{Q}^{(2)}$ zu den mechanisch interpretierbaren M, D, C, B und Q.

Dient das Modell (1.14) als Ausgangsgleichung der Schätzung, erfolgt die Rücktransformation z. B. durch numerische Auswertung der Beziehungen (1.13).

Eine andere Möglichkeit zur Diskretisierung der Modellgleichungen bietet das Ersetzen der Ableitungen durch die entsprechenden Differenzenquotienten, z. B.

$$\left. \begin{aligned} \dot{y}(kh) &\approx \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} \\ \ddot{y}(kh) &\approx \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

Einsetzen von (1.17) in (1.4) führt sofort auf eine diskrete Gleichung entsprechend (1.16). Diese Methode ist insbesondere für nichtlineare Modellgleichungen geeignet, für die die oben angeführte Diskretisierungsmethode nicht zutrifft.

Eine weitere wichtige Frage, besonders hinsichtlich einer Interpretation der geschätzten Parameter am realen Objekt, stellt das Problem der **Identifizierbarkeit** des durch eine Modellgleichung beschriebenen mechanischen Systems dar, d. h., ob aus dem Eingangs-Ausgangsverhalten (Übertragungsverhalten) des Systems eindeutig auf die Systemparameter geschlossen werden kann, s. [4], [6] und [9].

Eine notwendige und hinreichende Bedingung zur Parameteridentifizierbarkeit eines linearen, zeitinvarianten Mehrkörpersystems findet man in [7]. Danach ist das System (1.4) mit der Erregung (1.7) und $B=Q$ genau dann parameteridentifizierbar, wenn eine der Matrizen M, D, C und B bekannt und regulär und das System vollständig steuerbar ist. Voraussetzung ist, daß die Eingangs- und Ausgangssignale, d. h. alle Komponenten der Vektoren y und u , bekannt sind.

2. Parameterschätzverfahren

In letzter Zeit wurde eine Vielzahl von Parameterschätzverfahren für dynamische Systeme entwickelt und mit mehr oder weniger großem Erfolg für praktische Zwecke eingesetzt. Einige dieser Methoden wurden oben bereits erwähnt, s. z. B. [1], [4], [5], [6], [9]. Dabei unterscheiden sich die Verfahren sowohl nach der Modellklasse, auf die sie angewendet werden, als auch durch ihre statistischen Eigenschaften, die Qualität der Schätzung und den theoretischen und numerischen Aufwand. Vergleichende Aussagen findet man z. B. in [1] und [9].

Die weiteren Betrachtungen dieses Beitrages bleiben im Rahmen der **linearen Schätztheorie**. Sie gründet sich auf die Annahme, daß zwischen den im Vektor Θ zusammengefaßten Systemparametern und dem Erwartungswert der gemessenen Systemausgänge Y ein linearer Zusammenhang besteht, d. h.

$$E\{Y\} = X\Theta, \quad (2.1)$$

hier sei X eine bekannte Matrix. Die Gleichung (2.1) kann auch in der Form

$$Y = X\Theta + \epsilon \quad (2.2)$$

geschrieben werden mit dem Vektor ϵ als sogenannten Gleichungsfehler. Im allgemeinen werden die Vektorprozesse Y und ϵ als normalverteilt angenommen. Die Aufgabe besteht in der Schätzung des Parametervektors Θ aufgrund einer Realisierung des Vektorprozesses Y . Den geschätzten Parameterwert, basierend auf N Messungen, bezeichnen wir im Folgenden stets mit $\hat{\Theta}_N$. Zur Beurteilung der Güte der Schätzung werden die folgenden Eigenschaften definiert:

Definition 2.1.: ([1], [4])

Die Schätzung $\hat{\Theta}_N$ für Θ heißt **erwartungstreu** (unbiased), wenn ihr Erwartungswert gleich Θ ist, d. h.

$$E\{\hat{\Theta}_N\} = \Theta \quad \forall N.$$

Definition 2.2.: ([1], [4])

$\hat{\Theta}_N$ sei eine Schätzung von Θ basierend auf N Messungen. Die Folge von Schätzungen $\{\hat{\Theta}_N, N = 0, 1, \dots, \infty\}$ heißt **konsistent**, wenn sie bei $N \rightarrow \infty$ in Wahrscheinlichkeit gegen Θ konvergiert,

$$\hat{\Theta}_N \xrightarrow{\text{prob.}} \Theta \quad (\text{schwache Konsistenz}).$$

Definition 2.3.: ([1], [4])

Die Folge $\{\hat{\Theta}_N, N = 0, 1, \dots, \infty\}$ konvergiert im quadratischen Mittel gegen Θ , wenn gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E\{(\hat{\Theta}_N - \Theta)^T (\hat{\Theta}_N - \Theta)\} = 0.$$

Die Konsistenz nach Definition 2.2. ist i.a. schwer festzustellen. Es ist deshalb von großer praktischer Bedeutung, daß aus der Konvergenz im quadratischen Mittel die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit folgt. Außerdem ist eine konsistente Schätzung stets asymptotisch erwartungstreu [4] (die Umkehrung dieser Aussage ist falsch).

2.1. Methode der kleinsten Quadrate (LS-Methode)

Dieses relativ einfache Parameterschätzverfahren geht auf Berechnungen von Gauß zur Bewegung von Himmelskörpern zurück und wurde seither in vielen Varianten weiterentwickelt. Das Wesen der Methode besteht darin, einen Schätzwert $\hat{\Theta}_N$ des Parametervektors Θ zu finden, welcher die Summe S der Fehlerquadrate minimiert, d. h.

$$S = \epsilon^T \epsilon = (Y - X\Theta)^T (Y - X\Theta) \longrightarrow \min. \quad (2.3)$$

Eine Gradientenbildung nach Θ und Nullsetzen der Ableitungen führt sofort auf die explizite Schätzformel

$$\hat{\Theta}_N = (X_N^T X_N)^{-1} X_N^T Y_N \quad (2.4)$$

unter Voraussetzung der Invertierbarkeit der Matrix $(X_N^T X_N)$ (Gauß'sche Normalmatrix). Die Schätzung (2.4) ist linear in Y_N und erwartungstreu unter folgenden Bedingungen:

a) $E\{\epsilon\} = 0$ und

b) ϵ nicht autokorreliert.

Die Konsistenz der Schätzung kann unter bestimmten Bedingungen (s. [1], [4]) ebenfalls gewährleistet werden. Der Gleichungsfehler ϵ_N ist normalverteilt und statistisch unabhängig von $\hat{\Theta}_N$. Sämtliche hier genannten Bedingungen und Voraussetzungen sind in praktischen Anwendungsfällen nur selten zutreffend, selbst die Erwartungstreue kann bei einer endlichen Anzahl von Messungen nicht gewährleistet werden. Diese Nachteile der LS-Methode können durch Modifizierungen, auf die im nächsten Abschnitt eingegangen wird, ausgeglichen werden.

In einigen Fällen ist jedoch die LS-Schätzung durchaus ausreichend. Die Schätzformel (2.4) hat darüber hinaus den Vorteil, daß sie in einer äquivalenten rekursiven Form geschrieben werden kann, bei der die Inversion der Matrix $(X_N^T X_N)$ nicht ausgeführt werden muß und die numerisch so günstig gestaltet werden kann, daß sie zur on-line-Identifikation gut geeignet ist. Dazu führt man die Matrizen

$$P_k = (X_k^T X_k)^{-1} \quad (k = 0, 1, \dots, N-1) \quad (2.5)$$

ein und bezeichnet die k -te Zeile von X_N mit x_k^T sowie die k -te Komponente von Y_N mit y_k . Damit kann für die Matrizen P_k die rekursive Formel

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= (X_k^T X_k + x_{k+1} x_{k+1}^T)^{-1} \\ &= \left(I - P_k \frac{x_{k+1} x_{k+1}^T}{1 + x_{k+1}^T P_k x_{k+1}} \right) P_k \end{aligned} \quad (2.6)$$

geschrieben werden, die unmittelbar aus (2.5) und dem Lemma zur Matrix-Inversion folgt [4]. Es sei ausdrücklich darauf verwiesen, daß der Ausdruck $(1 + x_{k+1}^T P_k x_{k+1})$ ein Skalar darstellt. Die LS-Schätzung kann nun durch folgende Gleichungen berechnet werden:

$$\left. \begin{aligned} \hat{\Theta}_{k+1} &= \hat{\Theta}_k + K_{k+1} (Y_{k+1} - x_{k+1}^T \hat{\Theta}_k) \\ K_{k+1} &= P_k x_{k+1} (1 + x_{k+1}^T P_k x_{k+1})^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

mit $k = 0, 1, \dots, N-1$ und K_{k+1} als zeitveränderlicher Korrekturmatrix (-vektor). Die Gleichungen (2.6) und (2.7) sind völlig äquivalent zu (2.4). Den Startwert P_0 erhält man entweder aus einer Anfangsschätzung nach (2.5) oder man setzt einfach

$$P_0 = \alpha^{-1} I \quad (2.8)$$

mit hinreichend kleinem α . Man kann zeigen, daß für große N der Einfluß von α verschwindet.

Es sei noch bemerkt, daß mit Hilfe des Algorithmus (2.6), (2.7) auch langsam zeitveränderliche Parameter geschätzt werden können. Dazu führt man z. B. eine exponentielle Wichtung der Daten ein

$$P_{k+1}^{-1} = \gamma P_k^{-1} + x_{k+1} x_{k+1}^T \quad (2.9)$$

mit

$$0 < \gamma \leq 1 \quad (2.10)$$

und erhält einen zu (2.7) analogen Algorithmus.

Durch die Einführung einer Wichtungsmatrix Σ in die Summe \hat{S} , d. h.

$$S = (Y - X\hat{\Theta})^T \Sigma (Y - X\hat{\Theta}) \quad (2.11)$$

kann ebenfalls eine Wichtung der gemessenen Daten erreicht werden. Minimierung von (2.11) führt auf die Schätzformel

$$\hat{\Theta}_N = (X_N^T \Sigma X_N)^{-1} X_N^T \Sigma Y_N \quad (2.12)$$

Ist Σ die Kovarianzmatrix des Vektorprozesses Y , so erhält man aus (2.12) die bekannte Gauß-Markov-Schätzung, die neben den bereits genannten noch die Eigenschaft einer minimalen Fehlerkovarianzmatrix besitzt.

Die Schätzgleichung (2.12) wird auch als Methode der gewichteten kleinsten Quadrate bezeichnet.

2.2. Methode der Hilfsvariablen (IV-Methode)

Ein zur LS-Methode alternatives Verfahren zur Kompensierung der erwähnten Nachteile bietet die Methode der Hilfsvariablen (Instrumental Variables Method).

Ausgangspunkt bildet die Gleichung (2.2), die von links mit einer Matrix W_N^T multipliziert und nach Θ_N aufgelöst wird:

$$\Theta_N = (W_N^T X_N)^{-1} W_N^T Y_N - (W_N^T X_N)^{-1} W_N^T \epsilon_N \quad (2.13)$$

Die Matrix W_N wird nun so konstruiert, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } \frac{1}{N} W_N^T \epsilon_N \xrightarrow{\text{prob.}} 0 \\ \text{b) } \frac{1}{N} W_N^T X_N \xrightarrow{\text{prob.}} R_{wx} \text{ und } \det R_{wx} \neq 0 \end{array} \right\} \quad (2.14)$$

Damit folgt aus (2.13) (bei Vernachlässigung des Gleichungsfehlers) die Schätzformel

$$\hat{\Theta}_N = (W_N^T X_N)^{-1} W_N^T Y_N \quad (2.15)$$

Die Bedingungen (2.14) sind notwendig und hinreichend für die Konsistenz der Schätzung (2.15) nach Definition 2.2 und somit auch für die asymptotische Erwartungstreue.

Definition 2.4: ([4], [6])

Eine Matrix W_N , die den Bedingungen (2.14) genügt, heißt Hilfsvariablenmatrix, der Schätzer (2.15) heißt in diesem Falle Hilfsvariablenschätzer.

Die größten Schwierigkeiten liegen hier natürlich in der Konstruktion der Hilfsvariablenmatrix und insbesondere

in der exakten Erfüllung der Bedingungen (2.14). Hierzu gibt es eine Reihe von Vorschlägen (z. B. in [1], [4] und [6]), die meistens auf die Verwendung eines Hilfsmodells hinauslaufen. Trotzdem wird der erhöhte numerische Aufwand im Vergleich zur LS-Schätzung durch die verbesserten Konvergenzeigenschaften der IV-Schätzung gerechtfertigt.

Der IV-Schätzer (2.15) kann ebenfalls in rekursiver Form geschrieben werden, die entsprechenden Gleichungen sind völlig analog zu (2.6) und (2.7).

3. Parameterschätzung in mechanischen Schwingungssystemen

Bei der Anwendung der hier beschriebenen Schätzverfahren auf mechanische Schwingungssysteme muß zunächst zwischen 2 Fällen unterschieden werden:

1. Systeme, bei denen der zeitliche Verlauf sämtlicher Ausgangs- und Eingangssignale am realen Objekt gemessen werden kann (Systeme mit vollständiger Beobachtung); auf solche Systeme sind die bereits angeführten Schätzverfahren direkt anwendbar;
2. Systeme, bei denen nicht alle Ausgangssignale in ihrem zeitlichen Verlauf gemessen werden können (Systeme mit unvollständiger Beobachtung), z. B. bei komplizierten Maschinenbaugruppen mit vielen Freiheitsgraden; hier sind die in Abschnitt 2. angeführten Schätzverfahren nicht direkt anwendbar, sondern müssen modifiziert werden.

Um Verwechslungen zu vermeiden, sei an dieser Stelle ausdrücklich darauf verwiesen, daß die unter 1. und 2. eingeführten Begriffe **nicht** identisch sind mit dem mathematisch-kybernetischen Begriff der Beobachtbarkeit eines Differentialgleichungssystems, wie er in der Systemtheorie gebraucht wird. So kann ein System in letzterem Sinne durchaus beobachtbar sein, ohne daß die Zeitverläufe aller Ausgangskordinaten vorliegen. In diesem Zusammenhang muß auch bemerkt werden, daß die oben definierten Begriffe in dieser Form nicht in der Literatur vorkommen.

3.1. Systeme mit vollständiger Beobachtung

Ausgangspunkt bildet hier das diskrete System (1.16). Unter Beachtung der in Abschnitt 1. angeführten Identifizierbarkeitsbedingungen wird ohne Einschränkung der Allgemeinheit die Massenmatrix M als bekannt und regulär angenommen und die rechte Seite sei in der Form $\bar{B}(1)u_{k+1} + \bar{B}(2)u_k$ darstellbar. Die Matrizen \bar{D} , \bar{C} , $\bar{B}(1)$ und $\bar{B}(2)$ sind zu bestimmen. Die Ausgangs- und Eingangssignale liegen in N Meßpunkten vor. Nach Einführung der Vektoren und Matrizen

$$x_k^T \triangleq \begin{bmatrix} -y_{k+1}^T & -y_k^T & u_{k+1}^T & u_k^T \end{bmatrix}$$

$$\Theta^T \triangleq \begin{bmatrix} \bar{D} & \bar{C} & \bar{B}(1) & \bar{B}(2) \end{bmatrix}$$

$$Y_N \triangleq \bar{M} \begin{bmatrix} y_2^T \\ y_3^T \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{N+1}^T \end{bmatrix} \quad X_N \triangleq \begin{bmatrix} x_0^T \\ x_1^T \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{N-1}^T \end{bmatrix} \quad \epsilon_N \triangleq \begin{bmatrix} e_0^T \\ e_1^T \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_{N-1}^T \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

kann (1.16) in der Form

$$\bar{M} y_{k+2} = \Theta^T x_k + e_k \quad \text{oder} \quad (3.2)$$

$$Y_N = X_N \Theta + \epsilon_N \quad (3.3)$$

mit e_k bzw. ϵ_N als Gleichungsfehler geschrieben werden. Damit ist das Ausgangssystem in die typische LS-Struktur (2.2) gebracht und die Methode der kleinsten Quadrate kann unmittelbar auf (3.2) bzw. (3.3) angewendet werden. Es ist lediglich zu beachten, daß es sich hier bei Y_N , ϵ_N und Θ um Matrizen handelt. Das zu minimierende Zielfunktional lautet dann

$$S(\Theta) = \text{sp}(\epsilon_N^T \epsilon_N) \quad (3.4)$$

und eine Minimierung nach Θ führt auf die bereits bekannte Schätzformel (2.4).

Denkbar sind natürlich auch andere Variationen der Aufgabenstellung, beispielsweise können Massen- und Steifigkeitsmatrix bekannt sein und die Dämpfungsmatrix ist zu bestimmen oder die Stellmatrizen der Erregung sind unbekannt. Wichtig ist allein, daß die Ausgangsgleichung die typische LS-Struktur aufweist, d. h., daß die Parametermatrizen linear in das Gleichungssystem eingehen. Demzufolge können auch die Parameter in nichtlinearen Systemen nach dieser Methode geschätzt werden, solange die LS-Struktur erhalten bleibt. Dies kann anhand einer einfachen nichtlinearen Gleichung

$$y_{k+2} + d y_{k+1} + c y_k + \beta y_k^3 = \eta u_k \quad (3.5)$$

verdeutlicht werden.

Mit

$$\Theta = \begin{bmatrix} d \\ c \\ \beta \\ \eta \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad x_k^T = \begin{bmatrix} -y_{k+1} & -y_k & -y_k^3 & u_k \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

erhält man sofort die gewünschte LS-Struktur

$$y_{k+2} = x_k^T \Theta \quad (3.7)$$

Zur Konvergenz der rekursiven LS-Methode bei dynamischen Systemen sei besonders auf [10] und [4] verwiesen. Einen Konsistenzbeweis für Systeme (1.14) findet man beispielsweise in [4].

3.2. Systeme mit unvollständiger Beobachtung

Wir betrachten zunächst das System (1.5), dem eine sogenannte Meßgleichung

$$z(t) = Ux(t) + v(t) \quad (3.8)$$

hinzugefügt wird. U ist eine i. a. rechteckige Meßmatrix, $v(t)$ das stationäre Meßrauschen mit den Eigenschaften

$$\left. \begin{aligned} E\{v(t)\} &= 0 \\ E\{v(t)v^T(\tau)\} &= R_v \delta(t-\tau), \quad R_v \geq 0 \\ E\{v(t)w^T(\tau)\} &= 0 \quad \forall t, \tau \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

Für die Dimension des Meßvektors $z(t)$ gilt

$$\dim z \leq \dim x. \quad (3.10)$$

Nach der Diskretisierung geht (3.8) über in

$$z_k = Ux_k + v_k \quad (3.11)$$

und den entsprechenden Eigenschaften (3.9) im diskreten Bereich. Da in der Praxis meistens die Koordinaten (Auslenkungen) gemessen werden, hat U die Gestalt

$$U = [U_1 \mid 0] \quad (3.12)$$

U_1 ist eine Blockmatrix der Dimension $(\dim z) \times (\dim y)$. Es ist sofort zu sehen, daß die LS-Methode nicht direkt auf das Gleichungssystem (1.14) und (3.11) angewendet werden kann, obwohl die typische LS-Struktur durch die Einführung von (3.11) nicht zerstört wird. Davon kann man sich durch Einsetzen von (1.14) in (3.11), letztere für $(k+1)$ geschrieben, leicht überzeugen. Allerdings werden infolge der Rechteckstruktur von U bzw. U_1 bestimmte Parameter ausgeblendet, die dann auch nicht geschätzt werden können.

Eine Möglichkeit zur Lösung dieses Problems wird in [4] und [8] gezeigt. Auf die Gleichungen (1.14) und (3.11) wird die z -Transformation (diskrete Laplace-Transformation) angewendet und dann (1.14) in (3.11) eingesetzt.

Man erhält die Gleichung

$$\bar{z}_k = U(zI - G)^{-1} H \bar{b}_k + \bar{v}_k \quad (3.13)$$

mit \bar{z}_k , \bar{v}_k und \bar{b}_k als z -Transformierte von z_k , v_k und b_k . Schreibt man (3.13) mit Hilfe von

$$(zI - G)^{-1} = \frac{\text{adj}(zI - G)}{\det(zI - G)} \quad (3.14)$$

aus und führt die Rücktransformation durch, erhält man

$$z_{k+m} + \alpha_{m-1} z_{k+m-1} + \dots + \alpha_0 z_k = U C_{m-1} H b_{k+m-1} + \dots + U C_0 H b_k \quad (3.15)$$

mit C_0, C_1, \dots, C_{m-1} als Koeffizientenmatrizen von $\text{adj}(zI - G)$ und m ist die Dimension von G .

Auf (3.15) ist unmittelbar die LS-Methode anwendbar.

Im Ergebnis werden die Parameter $\alpha_0, \dots, \alpha_{m-1}$ (Koeffizienten des charakteristischen Polynoms von G) und $U C_0 H, \dots, U C_{m-1} H$ geschätzt. Damit können die Eigenfrequenzen des Systems und, wenn U und H bekannt sind, Teile der Systemmatrix G bestimmt werden.

Eine andere Methode zur direkten Schätzung von G und H sowie der fehlenden (nicht gemessenen) Systemausgänge ist die Kombination des rekursiven LS-Schätzers (2.6), (2.7) mit einem Kalman-Filter (bei stochastischen Störungen und Meßrauschen) oder einem rekursiven Beobachter (im deterministischen Fall). Der Kalman-Filteralgorithmus für das zufällig gestörte System (1.14) mit der Meßgleichung (3.11) lautet z. B. für $H \equiv I$ und b_k – weißes Rauschen mit der Intensität R_b :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Extrapolation: } \hat{x}_{k+1}^* = G \hat{x}_k^* \\ \quad \quad \quad S_{k+1}^* = G S_k G^T + T_b \\ \text{Korrektur: } \hat{x}_{k+1} = \hat{x}_{k+1}^* + L_{k+1} (z_{k+1} - U \hat{x}_{k+1}^*) \\ \quad \quad \quad L_{k+1} = S_{k+1}^* U^T (U S_{k+1}^* U^T + R_v)^{-1} \\ \quad \quad \quad S_{k+1} = (I - L_{k+1} U) S_{k+1}^* \\ \text{Anfangswerte: } x(0) = x_0 ; S(0) = S_0 \end{array} \right\} (3.16)$$

Zur Schätzung der Parametermatrizen und des Zustandsvektors wird folgender Algorithmus vorgeschlagen:

Apriori-Kenntnisse: \hat{x}_0, G_0, H_0
 P_0, S_0

k-ter Schritt: \hat{x}_k, G_k, H_k berechnet.

Berechnung von $(z_{k+1} - U \hat{x}_{k+1}^*)$
sowie L_{k+1} und K_{k+1}

(k+1)-ter Schritt: Berechnung von \hat{x}_{k+1} und
 $\hat{\Theta}_{k+1}^T = \begin{bmatrix} G_{k+1} \\ H_{k+1} \end{bmatrix}$ nach
(2.6), (2.7) und (3.16)

Die Konvergenz der Schätzung hängt dabei wesentlich von den Startwerten ab. In Unterschied zu dem hier vorgeschlagenen Verfahren kommt die in [11] untersuchte Methode des Erweiterten Kalman-Filters aus dem Bereich der nichtlinearen Schätztheorie und erfordert wesentlich höheren Rechenaufwand.

4. Numerische Beispiele

Die numerischen Beispielrechnungen sollen die Anwendungsfähigkeit der Schätzverfahren zur Parameteridentifikation mechanischer Schwingungssysteme demonstrieren.

Verwendet wurde vorerst ausschließlich die Methode der kleinsten Quadrate (Schätzformel (2.4), (2.6)).

Sie erfordert einen geringen numerischen Aufwand, weist aber Nachteile hinsichtlich der Konsistenz und Erwartungstreue auf (Abschnitt 2.1). Deshalb ist ihr Einsatz oder der eines modifizierten Verfahrens (Abschnitt 2.2) nicht generell, sondern in Zusammenhang mit der Problemstellung zu entscheiden.

Zur Parameteridentifikation linearer Schwingungssysteme wurde ein Algorithmus programmiert, der die spezielle Struktur einer Reihe diskreter mechanischer Schwingungssysteme berücksichtigt. Die damit erzielte Ver-

ringerung der zu schätzenden Parameter führt auf eine Reduzierung des numerischen Aufwandes. Gleichung (1.4) wurde dazu in folgender Weise modifiziert

$$\sum m_i M_i \ddot{y} + \sum d_j D_j \dot{y} + \sum c_k C_k y = F(t) \quad (4.1)$$

(i) (j) (k)

wobei

m_i, d_j, c_k die Parameter und

M_i, D_j, C_k die bekannten die Struktur beschreibenden Matrizen sind.

Um die Programmeingabe zu erleichtern und den Speicherplatzbedarf zu verkleinern, wurde vereinbart, daß die Strukturmatrizen nur wenige von Null verschiedene Elemente besitzen. Trotz dieser Einschränkung können noch viele diskrete lineare Schwingungssystemstrukturen behandelt werden – so das Starrkörpersystem, die lineare Schwingerkette, die verzweigte räumliche Schwingerkette. In Bild 1 ist das allgemeinste Element, für das das Programm ausgelegt wurde, schematisch dargestellt.

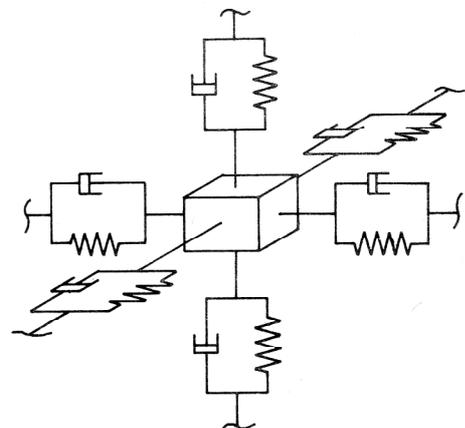


Bild 1
Element eines diskreten linearen Schwingungssystems mit seinen Kopplungen zu den Nachelementen, die die Rechenprogrammauslegung zuläßt.

Der Erprobung des Programms dienten einfache Schwingungssysteme, deren Ausgangssignale rechnergestützt bei vorgegebener Erregung ermittelt wurden. Vorgestellt werden die Berechnungsergebnisse des in Bild 2 dargestellten Zweimassenschwingungssystems. Bild 2 zeigt ferner die berechneten Ausgangssignale (Schwingwege x_1 und x_2) bei der ebenfalls eingezeichneten Dreiecksweigerregung.

Geschätzt wurden mit Hilfe des Programms Werte für die Feder- und Dämpfungsparameter c_1, c_2 und d . Eingabegrößen waren die Massen m_1 und m_2 , die Strukturmatrizen sowie die zeitdiskret abgetastete vollständige Eingangs- und Ausgangsinformation. Die Ergebnisse der Berechnung in Abhängigkeit von der Stützstellenzahl zeigt das Bild 2.

Die Parameterschätzwerte weichen nach relativ wenigen Schritten nur noch unerheblich von den exakten Werten ab.

Die prinzipielle Eignung der Schätzverfahren zur Identifikation der Parameter von nichtlinearen Schwingungs-

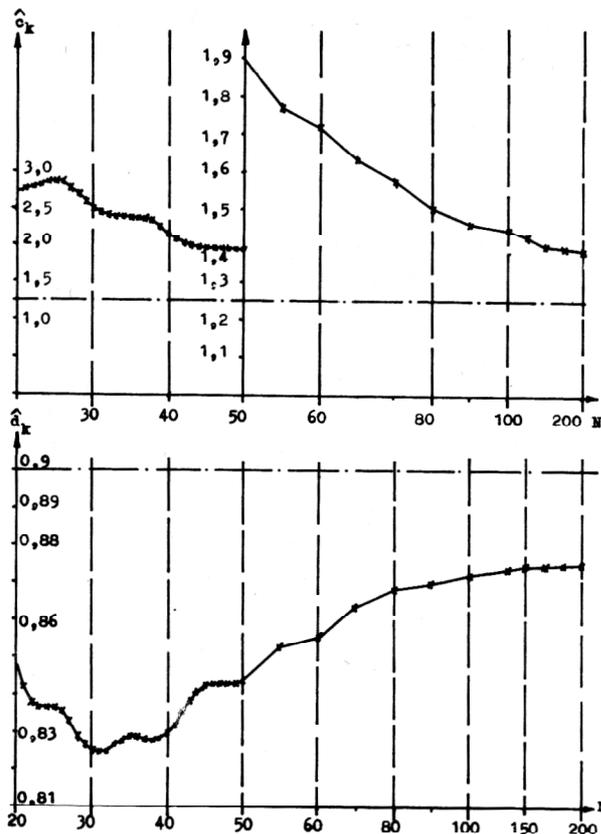


Bild 2
Modell des Zweimassenschwingers, Eingangs- und Ausgangssignale, geschätzte Systemparameter in Abhängigkeit von der Stützstellenzahl N (Exakte Werte: $d = 300$; $c_1 = 2,5 \cdot 10^5$; $c_2 = 1,5 \cdot 10^6$)

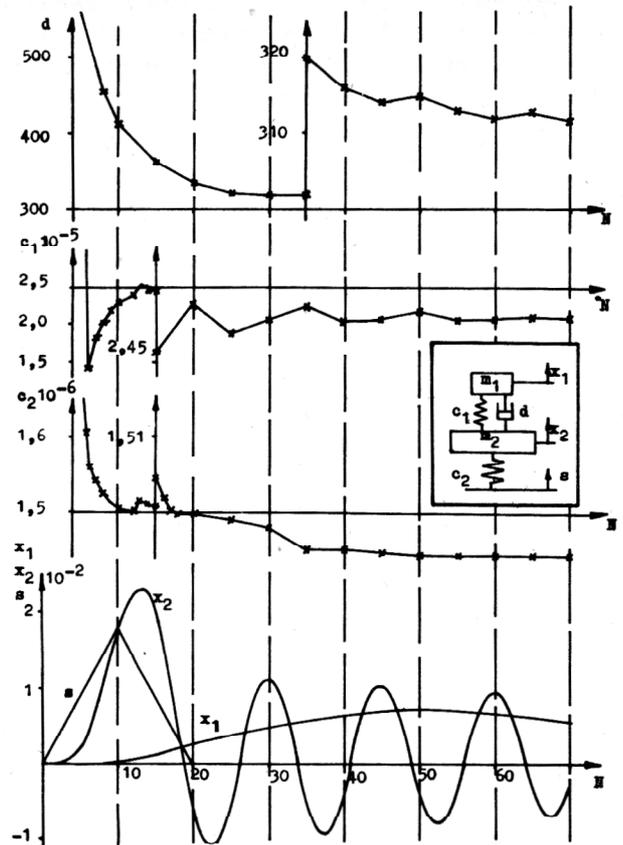


Bild 4
Parameterschätzwerte des Einmassenschwingers (Formel (4.3)) bei unvollständiger Messinformation in Abhängigkeit von der Stützstellenzahl N (Exakte Werte: $c = 1,25$; $d = 0,9$).

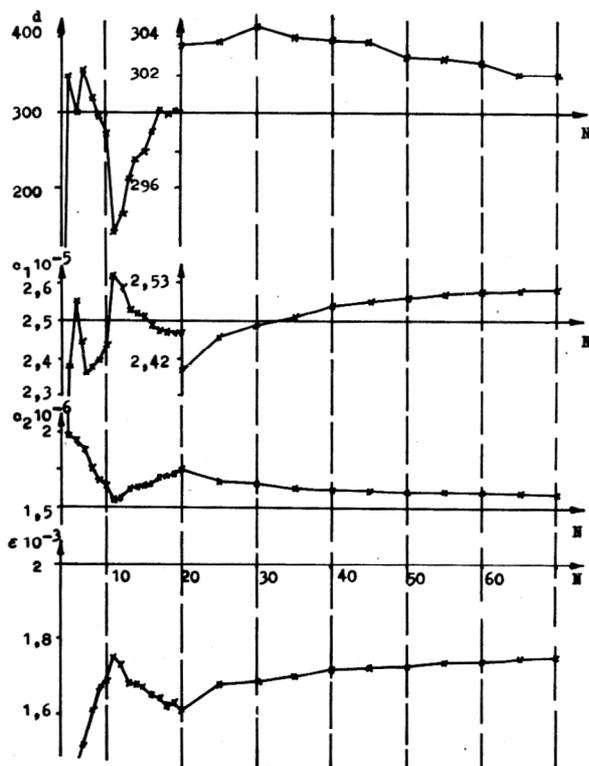


Bild 3
Parameterschätzwerte für das nichtlineare Schwingungssystem (Formel (4.2)) in Abhängigkeit von der Stützstellenzahl N (Exakte Werte: $d = 300$; $c_1 = 2,5 \cdot 10^5$; $c_2 = 1,5 \cdot 10^6$; $\epsilon = 2000$)

anteilen wurde mit einem speziellen Rechenprogramm für das durch die Gleichungen (4.2) beschriebene Zweimassensystem erprobt.

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + d(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + c_1(x_1 - x_2) &= 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 - d(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - c_1(x_1 - x_2) & \\ + c_2(x_2 - s) + \epsilon(x_2 - s)^3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

Die Parameterschätzung erfolgte in gleicher Weise wie bei der vorgestellten Parameteridentifikation des Zweimassenschwingers in Bild 2. Zusätzlich wurde der Koeffizient ϵ der Nichtlinearität ermittelt.

Die Ergebnisse sind analog zum ersten Beispiel in Bild 3 dargestellt.

Auch hier kann nach relativ wenigen Schritten eine gute Annäherung der geschätzten an die exakten Parameter festgestellt werden.

Die Wirkungsweise des rekursiven LS-Schätzers in Kombination mit dem Kalman-Filter wird anhand des einfachen Beispiels

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ r_{k+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & h \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ r_k \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} 0 \\ w_k \end{bmatrix} \\ z_k &= [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_k \\ r_k \end{bmatrix}; E\{w_k\} = 0; E\{w_k w_l\} = R_w \delta_{kl} \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

(Einmassenschwinger mit stationärer Zufallserregung w_k) demonstriert. Die Schätzergebnisse für die Parameter c und d nach dem in Abschnitt 3.2 vorgeschlagenen Algorithmus zeigt Bild 4. Die Ergebnisse sind zufriedenstellend. Für c_k beträgt der absolute Fehler bei $N = 100$ 16 %, nach $N = 200$ noch 11 %. Für d_k erhält man nach $N = 100$ einen absoluten Fehler von 3,1 %, bei $N = 200$ beträgt er noch 2,8 %.

LITERATUR

- [1] Isermann, R.: Prozeßidentifikation. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1974.
- [2] Brammer, K., Siffing, G.: Kalman-Bucy-Filter. Deterministische Beobachtung und stochastische Filterung. R. Oldenburg Verlag München, Wien, 1975.
- [3] Schrick, K.-W. (Her.): Anwendungen der Kalman-Filter-Technik. Anleitung und Beispiele. R. Oldenburg Verlag, München, Wien, 1977.
- [4] Goodwin, G. C., Payne, R. L.: Dynamic system identification. Experiment design and data analysis. Academic Press, New York, San Francisco, London, 1977.
- [5] Sage, A. P., Melsa, J. L.: System identification. Academic Press, New York, London, 1971.
- [6] Schwarz, R. G.: Identifikation mechanischer Mehrkörpersysteme. VDI-Zeitschriften, Reihe 8, Nr. 30, VDI-Verlag GmbH, Düsseldorf, 1980.
- [7] Schwarz, R. G.: Parameteridentifizierbarkeit linearer mechanischer Mehrkörpersysteme. ZAMM 60, 1980.
- [8] Diesing, H.; Tischer, W.: Identifikation dynamischer Systeme mit der Methode der kleinsten Quadrate. Tagungsberichte der 2. Tagung Stochastische Schwingungen und Zuverlässigkeit, Eisenach, 1980.
- [9] Åström, K. J., Eykhoff, R.: System identification – A survey. Automatica, Vol. 7, Pergamon Press, 1971.
- [10] Söderström, T., Ljung, L., Gustavsson, I.: A theoretical analysis of recursive identification methods. Automatica, Oxford, 14 (1978) 3.
- [11] Ljung, L.: Asymptotic behavior of the Extended Kalman Filter as a parameter estimator for linear systems. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-24, Nr. 1, New York, 1979.

Anschrift der Verfasser:

Dr.-Ing. H. Diesing
Dipl.-Ing. W. Tischer
Akademie der Wissenschaften der DDR
Institut für Mechanik
IR-Technikum
1105 Berlin
Neukirchstraße 62