

Zur iterativen Lösung von Finite-Element-Schemata bei inkompressiblem nichtlinearem Materialverhalten

H. Gründemann

1. Einleitung

Bei der analytischen Beschreibung inkompressibler Vorgänge tritt neben der Bewegungsgleichung, in die der Geschwindigkeitsvektor v und die Mittelspannung (Druck) p als unabhängige Bestimmungsgrößen eingehen, noch die Nebenbedingung $\text{div } v = 0$ als Einschränkung für das Geschwindigkeitsfeld auf. Aus dieser Gegebenheit resultieren Gleichungssysteme, die zwar noch symmetrisch, aber nicht mehr definit sind. Nach Diskretisierung mittels der Methode der finiten Elemente entstehen Matrizengleichungssysteme, in denen unter Umständen einige der Hauptminoren aus der Koeffizientenmatrix verschwinden. Die Auflösung mittels klassischer direkter Verfahren, z. B. Gauß-Algorithmus, ist deshalb oftmals mit Komplikationen verbunden [3], [8], [9]. Diese negativen numerischen Auflösungseigenschaften können sich in Verbindung mit einem Verlust an Approximationsgenauigkeit bei ungünstiger Wahl der Formfunktionen weiter verschlechtern. Das Problem der Gleichungsauflösung ist deshalb auch in Verbindung mit der Verwendung geeigneter Formfunktionen zu sehen.

In diesem Artikel werden iterative Lösungsverfahren vorgeschlagen und deren Konvergenzbedingungen angegeben. Neben Formulierungen in Form von Funktionalgleichungen, die für theoretische Untersuchungen günstig sind, werden auch unmittelbar rechen-technisch verwertbare Ausdrücke für die Iterationsalgorithmen angegeben. Die Geschwindigkeitsberechnung basiert auf einem quadratischen Ansatz für die Formfunktionen. Demgegenüber wird der Druck elementweise linear unter Verzicht auf Kompatibilitätsbedingungen berechnet. Diese Kombination garantiert eine Approximationsordnung $O(h^2)$ und damit die Quasioptimalität des Verfahrens.

Die Algorithmen werden am Modellfall nichtnewtonscher Fließvorgänge (strain rate sensitive materials [6]) metallischer Werkstoffe untersucht. Als Spezialfälle sind das Fließen Newtonscher Flüssigkeiten und inkompressible elastische Verformungsvorgänge enthalten.

2. Problemstellung

Um ein konkretes Problem vor Augen zu haben, betrachten wir quasistationäre Vorgänge aus dem Bereich der Metallverformung, die sich durch hohe Verzerrungsgeschwindigkeiten auszeichnen. Als Beschreibungsgrundlage hat sich hier eine „Fließformulierung“ durchgesetzt [9], [8]. Zurückgehend auf Untersuchungen von Perzyna [6] sind unter diesen extremen Deformationsbedingungen constitutive Beziehungen zwischen dem

Tensor der Deviatorspannungen T und dem Tensor der Verzerrungsgeschwindigkeiten D relevant. Konkret wird bei Verzicht auf elastische Verformungsanteile der Zusammenhang [6]

$$T = 2\eta(\Pi_D) D \quad (1)$$

angegeben, wobei η eine skalare Funktion der zweiten Invariante

$$\Pi_D^2 = 2 \text{spur}(D^2) \quad \text{mit} \quad D = \frac{1}{2}(\text{grad } v + \text{grad } v^T) \quad (2)$$

ist, in die als Parameter materialspezifische Kennwerte eingehen. Ein häufig verwendeter a priori-Ansatz für η ist

$$\eta(\Pi_D) = \frac{1}{\sqrt{3} \Pi_D} \left(\sigma_y + \left(\frac{\Pi_D}{\sqrt{3} \gamma} \right)^n \right)$$

mit den Materialparametern σ_y , γ und n . Diese Klasse enthält ideal plastische Werkstoffe ($\frac{1}{\gamma} = 0$) und den Bingham-Körper ($n = 1$).

Für die ablaufenden rein dissipativen Prozesse (es treten nur bleibende Verformungen auf) ist in guter Übereinstimmung mit Realvorgängen die Annahme inkompressiblen Materialverhaltens gerechtfertigt [9], [3].

Unter diesen Voraussetzungen müssen neben (1) die folgenden Bilanzbeziehungen für Impuls und Masse (Inkompressibilitätsbeziehung) erfüllt sein:

$$\text{div } T - \text{grad } p + \rho \bar{g} = 0 \quad (3)$$

$$\text{div } v = 0 \quad (4)$$

(ρ – Massedichte, \bar{g} – äußere Volumenkräfte, $g = \rho \bar{g}$). Der hydrostatische Druck p geht als unabhängige Größe in (3) ein. Nach Substitution der Beziehungen (1) und (2) in (3) erhalten wir folgendes nichtlineares System zur Bestimmung der constitutiv wesentlichen Größen v und p :

$$-\text{div}(\eta(\Pi_D)(\text{grad } v + \text{grad } v^T)) + \text{grad } p = \rho \bar{g} \quad \text{in } \Omega \quad (5)$$

$$\text{div } v = 0$$

(Ω – Gebiet welches durch den Körper eingenommen wird).

Als Spezialfälle können in dieses Differentialgleichungssystem Fließvorgänge Newtonscher Flüssigkeiten ($\eta = \text{const.}$) und, indem v durch den Verschiebungsvektor u ersetzt wird, auch inkompressible elastische Deformationsprobleme eingeordnet werden. In beiden Fällen ist das System (5) linear.

Bei Metallverformungsvorgängen ohne Wirkeneinfluß treten in der Regel nur Randbedingungen erster Art auf.

$$v = \varphi_v \quad \text{auf } \Gamma \quad (6)$$

(Γ – Rand des Gebietes Ω , φ_v – vorgegebene Randgeschwindigkeit). Zusätzlich muß gewährleistet sein, daß die in den Körper Ω pro Zeiteinheit einfließende Masse gleich der in der gleichen Zeiteinheit aus Ω herausfließenden Masse ist. Eine hierzu äquivalente analytische Darstellung lautet

$$\int_{\Omega} \varphi_v \cdot d\Gamma = 0. \quad (7)$$

3. Iterative Lösungsmethoden

Die analytischen Untersuchungen und numerische Lösbarkeit des Randwertproblems (5) bis (7) wird dadurch erschwert, daß kein Zusammenhang zwischen kinematischen Größen, z. B. dem Geschwindigkeitsvektor v und dem hydrostatischen Druck besteht.

Zweckmäßig ist eine Erweiterung des Problems im funktionalanalytischen Sinne durch die Formulierung einer zu (5), (6) äquivalenten Variationsaufgabe (schwache Formulierung). Zu diesem Zweck führen wir zunächst folgende Funktionenräume ein:

$X_0 \equiv W_2^1(\Omega)$ – Raum aller auf Ω definierten und auf Γ in einem verallgemeinerten Sinne verschwindenden Funktionen, die zusammen mit ihren ersten verallgemeinerten Ableitungen über Ω quadratisch summierbar sind.

$P_0 \equiv L_0^2(\Omega)$ – Raum aller auf Ω definierten und quadratisch summierbaren Funktionen φ , die die Bedingung

$$\int_{\Omega} \varphi d\Omega = 0 \quad \text{erfüllen.}$$

Aus Gründen der einfacheren Darstellung beschränken wir uns auf homogene Randbedingungen ($\varphi_v = 0$). Die Lösung des Systems (5) ist dann im funktionalanalytischen Sinne äquivalent zur Lösung folgender Variationsaufgabe

$$M_0 \left[\begin{array}{l} \text{Zu bestimmen ist ein Paar } v, p \in X_0^3 \times P_0, \text{ so daß} \\ \text{gilt} \\ a(v; v, w) + b(w, p) = \langle g, w \rangle \quad \text{bel. } w \in X_0^3 \quad (8) \\ b(v, r) = 0 \quad \text{bel. } r \in P_0 \quad (9) \end{array} \right.$$

Mit den Funktionalen

$$a(u; v, w) = \int_{\Omega} \eta(\Pi_D(u)) (M \cdot B v)^T \cdot (B w) d\Omega$$

$$b(w, r) = - \int_{\Omega} r \operatorname{div} w d\Omega$$

$$\langle g, w \rangle = \int_{\Omega} g^T w d\Omega$$

und

$$M = \begin{pmatrix} 2 & & & & & \\ & 2 & & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & & & & & \\ & \frac{\partial}{\partial x_2} & & & & \\ & & \frac{\partial}{\partial x_3} & & & \\ & & & \frac{\partial}{\partial x_1} & & \\ & & & & \frac{\partial}{\partial x_2} & \\ & & & & & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

Die Definitionsgebiete dieser Funktionale werden durch die Zugehörigkeiten

$$u, v, w \in X_0^3; \quad r \in P_0; \quad g \in (X_0^3)^*$$

bestimmt.

Ist die Funktion η auf dem Intervall $[0, \infty)$ stetig und beschränkt und existieren Konstanten $c_\eta > 0$ und C_η , so daß die Bedingungen

$$\eta(s) s - \eta(t) t \geq c_\eta (s - t) \quad \text{für } s \geq t \geq 0 \quad (10)$$

$$|\eta(s) s - \eta(t) t| \leq C_\eta |s - t|$$

erfüllt sind, so besitzt das Problem M_0 eine eindeutig bestimmte Lösung $v, p \in X_0^3 \times P_0$ und ist in dem Sinne regulär, daß kleinen Änderungen in den Kräften g auch kleine Änderungen der Lösung v, p entsprechen. Diese Aussage wird in [2] für lineare Probleme und für den allgemeinen Fall in [5] bewiesen. Zur numerischen Lösung sind folgende Algorithmen geeignet.

3.1. Verallgemeinerter Iterationsalgorithmus nach Arrow-Hurwicz

Im Falle eines linearen Problems wird der hier in direkter Weise auf nichtlineare Probleme verallgemeinerte Iterationsprozeß als Arrow-Hurwicz Algorithmus bezeichnet [7].

$$M_0^A \left[\begin{array}{l} \text{Ausgehend von bekannten Startwerten } v^0, p^0 \in \\ X_0^3 \times P_0 \text{ ist eine Folge } v^{m+1}, p^{m+1} \in X_0^3 \times P_0 \text{ zu} \\ \text{finden, so daß gilt} \\ (v^{m+1} - v^m, w)_J + \nu a(v^m; v^m, w) \\ + \nu b(w, p^m) = \nu \langle g, w \rangle \quad \text{bel. } w \in X_0^3 \\ (p^{m+1} - p^m, r)_s - \nu b(v^{m+1}, r) = 0 \quad \text{bel. } r \in P_0 \end{array} \right.$$

wobei

$$(u, w)_J = \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \operatorname{grad} u_i^T \cdot \operatorname{grad} w_i d\Omega \quad \text{bel. } u_i, w_i \in X_0$$

$$(q, r)_s = \int_{\Omega} q \cdot r d\Omega \quad \text{bel. } q, r \in P_0$$

Die Konvergenz der Folge der Iterationslösungen $v^m, p^m \in X_0^3 \times P_0$ gegen die exakte Lösung $v, p \in X_0^3 \times P_0$ des

Problems M_0 ist unter den Bedingungen (10) bei beliebigen Startwerten v^0, p^0 gesichert, wenn der Iterationsparameter ν in den Schranken

$$0 < \nu < \frac{2 c \eta}{36 \bar{C}_\eta^2 + 1}$$

gewählt wird [5].

Formal erhält man beide Iterationsfunktionale, indem (8) und (9) mit dem Parameter ν durchmultipliziert und auf der linken Seite die Funktionale $(\cdot, \cdot)_J$ und $(\cdot, \cdot)_s$ addiert werden.

3.2. Numerische Lösung durch Regularisierung

Das Problem M_0 ist in folgender Weise regularisierbar:

$$M_0^\epsilon \begin{cases} \text{Zu bestimmen ist ein Paar } v_\epsilon, p_\epsilon \in X_0^3 \times P_0, \text{ so} \\ \text{daß gilt} \\ a(v_\epsilon; v_\epsilon, w) + b(w, p) = \langle g, w \rangle \quad \text{bel. } w \in X_0^3 \\ -\epsilon(p_\epsilon, r)_s + b(v_\epsilon, r) = 0 \quad \text{bel. } r \in P_0 \end{cases}$$

($\epsilon > 0$ – Regularisierungsparameter).

Durch das regularisierende Glied in der zweiten Funktionalgleichung wird ein Zusammenhang zwischen hydrostatischem Druck p_ϵ und dem Geschwindigkeitsvektor v_ϵ erzwungen, und aus der Nebenbedingung (9) wird nunmehr eine vollwertige Bestimmungsgleichung. Damit kann die Lösung des Problems M_0^ϵ auf der Grundlage herkömmlicher zweistufiger iterativer Lösungsverfahren erfolgen [10].

Es kann gezeigt werden [5], daß unter den Bedingungen (10) bei $\epsilon \rightarrow 0$ die regularisierten Lösungen v_ϵ, p_ϵ in der Norm des Raumes $X_0^3 \times P_0$ gegen die exakte Lösung v, p des Problems M_0 konvergieren.

Problematisch ist die Wahl geeigneter Parameter $\epsilon > 0$. Bei der numerischen Lösung treten bei sehr kleinen Werten für ϵ („klein“ in Abhängigkeit von der Rechenarithmetik) die typischen Erscheinungen numerischer Instabilität auf (stark oszillierende Werte, im Extremfall Zahlenüberläufe). Um die Bedeutung optimaler Parameter ϵ auf die Regularisierung und Stabilität des Problems zu verringern, ist es vorteilhaft, den Iterationsprozeß, der ohnehin zur Lösung der nichtlinearen Variationsaufgabe notwendig ist, mit einer Nachiteration bezüglich der Regularisierung zu verbinden. Dies führt zu folgendem Iterationsprozeß:

3.3. Regularisierung mit Nachiteration

$$M_0^{\epsilon p} \begin{cases} \text{Ausgehend von bekannten Startwerten } v_\epsilon^0, p_\epsilon^0 \in X_0^3 \\ \text{x } P_0 \text{ ist die Folge } v_\epsilon^{m+1}, p_\epsilon^{m+1} \in X_0^3 \times P_0 \text{ zu fin-} \\ \text{den, so daß gilt} \\ (v_\epsilon^{m+1} - v_\epsilon^m, w)_J + \nu a(v_\epsilon^m; v_\epsilon^m, w) \\ + \nu b(w, p_\epsilon^{m+1}) = \nu \langle g, w \rangle \quad \text{bel. } w \in X_0^3 \\ \epsilon(p_\epsilon^{m+1} - p_\epsilon^m, r)_s - \nu b(v_\epsilon^{m+1}, r) = 0 \quad \text{bel. } r \in P_0 \end{cases}$$

Ein ähnliches Iterationsverfahren wird zur Lösung linearer Probleme in [1] mit Erfolg angewendet. In allen

untersuchten Parameterbereichen konnten durch Iteration bessere Ergebnisse erreicht werden als bei einmaliger Lösung des regularisierten Problems.

Die Konvergenz des Verfahrens $M_0^{\epsilon p}$ gegen die exakte Lösung v, p ist unter den Bedingungen (10) für beliebiges $\epsilon > 0$ und bei beliebigen Startwerten $v_\epsilon^0, p_\epsilon^0$ gesichert, wenn der Iterationsparameter ν in den Schranken

$$0 < \nu < \frac{c \eta}{18 \bar{C}_\eta^2}$$

eingeschlossen ist [5].

4. Finite Element Diskretisierung

Bei Anwendung der Methode der finiten Elemente werden die numerischen Lösungseigenschaften und der Approximationsgrad der diskretisierten Gleichungssysteme entscheidend durch die verwendeten Formfunktionen für v und p bestimmt.

$h > 0$ sei ein Diskretisierungsparameter und

$$X_{oh} \subset X_0, \quad P_{oh} \subset P_0$$

endlichdimensionale Unterräume. Das zu M_0 diskretisierte Problem lautet:

Zu bestimmen ist ein Paar $v_h, p_h \in X_{oh}^3 \times P_{oh}$, so daß gilt

$$M_{oh} \begin{cases} a(v_h; v_h, w_h) + b(w_h, p_h) = \langle g, w_h \rangle \quad \text{bel. } w_h \in X_{oh}^3 \\ b(v_h, r_h) = 0 \quad \text{bel. } r_h \in P_{oh} \end{cases}$$

Konkrete Räume X_{oh} und P_{oh} sowie entsprechende Approximationsbedingungen werden für zweidimensionale Probleme im linearen Fall bei dreiseitigen Elementen in [2] und für den nichtlinearen Fall bei vierseitigen Elementen in [5] angegeben. Das Ergebnis unter den letztgenannten Bedingungen sei hier mitgeteilt:

Zur Definition der Räume X_{oh} und P_{oh} werden über jedem vierseitigen finiten Element $\omega_j \subset \Omega$ ($1 \leq j \leq m$, m – Elementanzahl der vernetzten Struktur) folgende Ausdrücke für die gesuchten Größen v_h und p_h angesetzt:

$$v_h(x) = \sum_{i=1}^9 \bar{a}_i N_i(x) \quad (11)$$

$$x \in \omega_j$$

$$p_h(x) = a_j + b_j x_1 + c_j x_2 \quad (12)$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \bar{a}_i = \begin{pmatrix} a_i^{(1)} \\ a_i^{(2)} \end{pmatrix}$$

Die Formfunktionen $N_i(x)$ gehen durch subparametrische Transformation (im Falle geradlinig begrenzter Elemente) oder isoparametrische Transformation (bei Elementberandungen zweiter Ordnung) aus vollständigen quadratischen Funktionen [8] (Lagrangesche Interpolationspolynome zweiter Ordnung) hervor, die über dem Standardgebiet

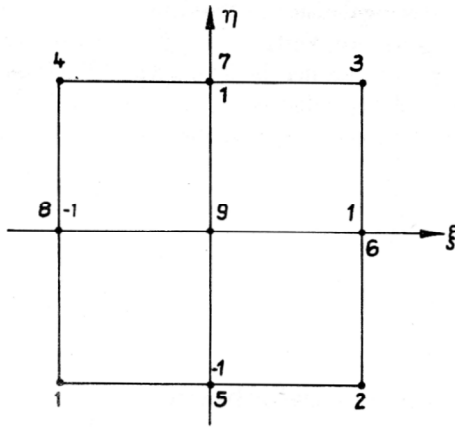


Bild 1
9-Knoten-Element in Standardform

definiert sind. Unter diesen Bedingungen ist ein kompatibles Elementkonzept für die Berechnung von v_h gesichert. Demgegenüber ist durch den linearen Ansatz (12) die Kompatibilität bei der Druckberechnung nicht mehr gegeben, folglich ist p_h an den Elementübergängen unstetig, und die zu bestimmenden freien Parameter a_j , b_j und c_j können nicht mit Knotenpunktwerten für p_h identifiziert werden. Dies wirkt sich jedoch keinesfalls nachteilig auf die Approximationsgüte aus, sondern sichert im Gegenteil die Quasioptimalität des Verfahrens, d. h., die Approximation ist von der gleichen Größenordnung wie die bestmögliche Approximation durch den Unterraum $X_{oh}^2 \times P_{oh}$. Ist die Bedingung (10) erfüllt und $v \in (W_2^3(\Omega))^2$, $p \in W_2^2(\Omega) \cap P_o$, so gilt die Abschätzung [2], [5]:

$$\|v - v_h\|_{X_o^2} + \|p - p_h\|_{P_o} \leq Ch^2 (\|v\|_{(W_2^3)^2} + \|p\|_{W_2^2}),$$

wobei C eine von h unabhängige Konstante ist.

W_2^j - Raum der Funktionen, die zusammen mit allen verallgemeinerten Ableitungen bis einschließlich der Ordnung j quadratisch summierbar sind.

Die Iterationsverfahren M_o^A und M_o^{EP} können direkt zur Lösung des diskretisierten Problems M_{oh} Anwendung finden:

$$M_{oh}^A \begin{cases} \text{Ausgehend von bekannten Startwerten } v_h^o, p_h^o \in X_{oh}^2 \times P_{oh}, \text{ ist eine Folge } v_h^{m+1}, p_h^{m+1} \in X_{oh}^2 \times P_{oh} \text{ zu finden, so daß gilt} \\ (v_h^{m+1} - v_h^m, w_h)_J + \nu a(v_h^m; v_h^m, w_h) \\ + \nu b(w_h, p_h^m) = \nu \langle g, w_h \rangle \quad \text{bel. } w_h \in X_{oh}^2 \quad (13) \\ (p_h^{m+1} - p_h^m, r_h)_s - \nu b(v_h^{m+1}, r_h) = 0 \quad \text{bel. } r_h \in P_{oh} \quad (14) \end{cases}$$

$$M_{oh}^{EP} \begin{cases} \text{Ausgehend von bekannten Startwerten } v_{eh}^o, p_{eh}^o \in X_{oh}^2 \times P_{oh}, \text{ ist eine Folge } v_{eh}^{m+1}, p_{eh}^{m+1} \in X_{oh}^2 \times P_{oh} \text{ zu finden, so daß gilt} \\ (v_{eh}^{m+1} - v_{eh}^m, w_h)_J + \nu a(v_{eh}^m; v_{eh}^m, w_h) \\ + \nu b(w_h, p_{eh}^{m+1}) = \nu \langle g, w_h \rangle \quad \text{bel. } w_h \in X_{oh}^2 \\ \epsilon (p_{eh}^{m+1} - p_{eh}^m, r_h)_s - \nu b(v_{eh}^{m+1}, r_h) = 0 \quad \text{bel. } r_h \in P_{oh} \end{cases}$$

Die Konvergenz dieser Verfahren ist unter den gleichen Bedingungen wie für die Iterationsverfahren M_o^A und M_o^{EP} nachweisbar. Für den praktischen Gebrauch müssen aus den Funktionalgleichungen äquivalente Matrixgleichungen hergeleitet werden. Bei der Entwicklung dieser Gleichungen stützen wir uns auf das Verfahren M_{oh}^A .

1. Berechnung von p_h^{m+1} bei bekannten Größen p_h^m und v_h^{m+1} :

Ausführlich geschrieben lautet die Gleichung (14)

$$\int_{\Omega} r_h (p_h^{m+1} - p_h^m + \nu \operatorname{div} v_h^{m+1}) d\Omega = 0 \quad \text{bel. } r_h \in P_{oh}.$$

Diese Beziehung ist äquivalent zu

$$P_h^{m+1} - p_h^m = -\nu R_h (\operatorname{div} v_h^{m+1})$$

wobei R_h der Orthoprojektor in P_o auf den Raum P_{oh} ist. Da die Funktionen aus P_{oh} stückweise linear und nicht kompatibel sind, kann dieser Projektor gemäß dem Ansatz

$$R_h (\operatorname{div} v_h^{m+1})|_{\omega} = a_{\omega} + b_{\omega} x_1 + c_{\omega} x_2 \quad \text{bel. } \omega \subset \Omega$$

elementweise berechnet werden. Der Vektor der Konstanten

$p_{\omega} = (a_{\omega}, b_{\omega}, c_{\omega})^T$ ist Lösung des Gleichungssystems

$$R_{\omega} p_{\omega} = b_{\omega} (v_h^{m+1})$$

mit

$$R_{\omega} = \begin{pmatrix} (1, 1) & (x_1, 1) & (x_2, 1) \\ (1, x_1) & (x_1, x_1) & (x_2, x_1) \\ (1, x_2) & (x_1, x_2) & (x_2, x_2) \end{pmatrix}, \quad b_{\omega}(v) = \begin{pmatrix} (1, \operatorname{div} v) \\ (x_1, \operatorname{div} v) \\ (x_2, \operatorname{div} v) \end{pmatrix}$$

und

$$(\varphi, \psi) = \int_{\omega} \varphi \cdot \psi d\omega.$$

Die elementweise Berechnung von p_h^{m+1} erfolgt dann über den Ausdruck

$$P_h^{m+1}|_{\omega} = p_h^m|_{\omega} - \nu (1, x_1, x_2) R_{\omega}^{-1} b_{\omega} (v_h^{m+1}) \quad \text{bel. } \omega \subset \Omega. \quad (15)$$

2. Berechnung von v_h^{m+1} bei bekannten Größen p_h^m und v_h^m

Gemäß dem Ansatz (11) werden die Funktionen v_h^{m+1} über dem gesamten Gebiet Ω durch

$$v_h^{m+1} = \sum \bar{a}_i^{m+1} N_i \quad (16)$$

definiert, wobei sich die Summation über alle Knotenpunkte $(1, \dots, n)$ aus Ω erstreckt. Die Funktionen v_h^{m+1} sind dann eindeutig durch die Vektoren

$$a^{m+1} = (a_1^{(1)m+1}, a_1^{(2)m+1}, \dots, a_n^{(1)m+1}, a_n^{(2)m+1})^T$$

bestimmt. Nach Substitution des Ansatzes (16) in der Funktionalbeziehung (13) erhält man folgende Matrixgleichung zur iterativen Berechnung der Vektoren a^{m+1} :

$$I(a^{m+1} - a^m) = \nu(f - A(v_h^m) a^m - G(p_h^m)) \quad (17)$$

mit den Matrizen

$$I_{ij} = J_{ij} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad J_{ij} = \sum J_{ij}^\omega;$$

$$J_{ij}^\omega = \int (\text{grad } N_i)^T \cdot \text{grad } N_j \, d\omega$$

$$f_i = \sum f_i^\omega; \quad f_i^\omega = \int N_i g \, d\omega$$

$$A_{ij}(v_h^m) = \sum A_{ij}^\omega(v_h^m); \quad A_{ij}^\omega(v_h^m) = \int \eta(\Pi_D(v_h^m)) (\bar{M} \cdot B_i)^T \cdot B_j \, d\omega$$

$$G_i(p_h^m) = \sum G_i^\omega(p_h^m); \quad G_i^\omega(p_h^m) = - \int (p_h^m|_\omega) \text{grad } N_i \, d\omega \\ = - (S_i^\omega)^T P_\omega$$

$1 \leq i, j \leq n$ Die Summationen sind über alle Elemente ω zu nehmen, die x_i (und x_j) als gemeinsamen Knotenpunkt besitzen.

$$\bar{M} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P_\omega = \begin{pmatrix} P_{\omega,1} \\ P_{\omega,2} \\ P_{\omega,3} \end{pmatrix} \quad P_h^m|_\omega = (1, x_1, x_2) \cdot P_\omega$$

$$B_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x_2} & \frac{\partial N_i}{\partial x_1} \end{pmatrix} \quad S_i^\omega = \begin{pmatrix} \int_\omega (\text{grad } N_i)^T \, d\omega \\ \int_\omega x_1 (\text{grad } N_i)^T \, d\omega \\ \int_\omega x_2 (\text{grad } N_i)^T \, d\omega \end{pmatrix}$$

Ausgehend von bekannten Näherungswerten v_h^m, p_h^m wird im $(m+1)$ ten Iterationsschritt v_h^{m+1}, p_h^{m+1} wie folgt bestimmt:

- Berechnung des Näherungsskelets a^{m+1} aus (17). Gemäß der Beziehung (16) ist dann auch v_h^{m+1} ermittelt.
- Berechnung von p_h^{m+1} aus (15).

Damit ist klar, daß die Geschwindigkeits-Druck-Berechnung v, p in jedem Iterationsschritt separat ausführbar ist, wobei ein lineares Gleichungssystem der Dimension

$2n$ mit positiv definitiver symmetrischer konstanter Koeffizientenmatrix I zu lösen ist und die Druckberechnung elementweise durch Auflösung von Gleichungssystemen mit drei Unbekannten erfolgt. Noch zweckmäßiger ist es, das Iterationsverfahren (17) mit iterativen Lösungsmethoden für lineare Gleichungssysteme zu verbinden [4].

Methodisch in gleicher Weise sind für das Verfahren M_{oh}^{EP} Matrixgleichungen ableitbar. Die entsprechenden Iterationsgleichungen lauten wie folgt:

$$P_{eh}^{m+1}|_\omega = P_{eh}^m|_\omega - \frac{\nu}{\epsilon} (1, x_1, x_2) \cdot R_\omega^{-1} b_\omega(v_{eh}^{m+1}) \quad (18)$$

$$(I + \frac{\nu^2}{\epsilon} L)(a_\epsilon^{m+1} - a_\epsilon^m) = \nu(f - A(v_{eh}^m) a_\epsilon^m - G(p_{eh}^m) - \frac{\nu}{\epsilon} L a_\epsilon^m), \quad \text{wobei} \quad (19)$$

$$L_{ij} = \sum L_{ij}^\omega \quad \text{und} \quad L_{ij}^\omega = (S_i^\omega)^T \cdot R_\omega^{-1} \cdot S_j^\omega$$

Auch hier ist in jedem Iterationsschritt ein lineares Gleichungssystem der Dimension $2n$ mit der positiv definiten symmetrischen konstanten Koeffizientenmatrix $I + \frac{\nu^2}{\epsilon} L$ zu lösen. Die Druckberechnung erfolgt in gleicher Weise wie beim Verfahren M_{oh}^A . Besteht nur Interesse an der Berechnung von v_{eh} (oder v_h), so können die Funktionen p_{eh}^m (oder p_h^m) aus den Iterationsverfahren

eliminiert werden. Zur Berechnung der Dissipationsleistung und damit der Temperaturverteilung bei irreversiblen Prozessen ist z. B. die Druckverteilung p_h nicht erforderlich. Nachdem die Funktionen p_{eh}^i sukzessive durch $\text{div } v_{eh}^i$ ($i = 1, \dots, m$) substituiert sind, erhält man aus

(19) folgende Iterationsgleichung

$$(I + \frac{\nu^2}{\epsilon} L)(a_\epsilon^{m+1} - a_\epsilon^m) = \nu[f - A(v_{eh}^m) a_\epsilon^m - G(p_{eh}^0) - \frac{\nu}{\epsilon} L a_\epsilon^m - \frac{\nu}{\epsilon} \sum_{i=1}^m L a_\epsilon^i] \quad m \geq 1. \quad (20)$$

Für $m = 0$ behält die Beziehung (19) ihre Gültigkeit. Mit diesem Iterationsverfahren konnten ausgezeichnete Ergebnisse erzielt werden [1], [5]. Wird die Druckverteilung p_h nicht benötigt, so ist bei der rechenstechnischen Realisierung das Iterationsverfahren (20) gegenüber (18), (19) zu bevorzugen.

In der gleichen Weise kann aus (17) p_h^m eliminiert werden.

5. Beispielrechnungen zum Fließpressen

Die Zuverlässigkeit des Iterationsverfahrens (20) wurde anhand erster Beispielrechnungen aus der Umform- und Spanungstechnik getestet. In den letzten Jahren hat sich für diese Metallverformungsvorgänge als Modellgrundlage bei Anwendung der Methode der finiten Elemente mehr und mehr eine Fließformulierung durchgesetzt [3], [9].

An dieser Stelle sollen einige Ergebnisse zum Vorwärtsfließpressen mitgeteilt werden. Weitere Rechnungen zur Spannungsproblematik sind in unserem Fachartikel [11] enthalten.

In allen Rechnungen wurde von $v_{ch}^0 = 0$ ausgegangen. Die constitutive Spannungsbeziehung beeinflusst entscheidend das Konvergenzverhalten des Algorithmus (20), denn die Materialparameter gehen wesentlich in die Konstanten c_η und C_η ein, die ihrerseits Grenzen für den Iterationsparameter ν festlegen. Den Rechnungen wurden Materialparameter für den Werkstoff Ck 45 zugrunde gelegt [12]. Unter diesen Bedingungen konnten mit $\nu = 0.1$ und im Parameterbereich

$$\frac{1}{\epsilon} = \frac{2\mu}{1-2\mu} \quad \text{mit } 0.499 \leq \mu \leq 0.49995$$

in allen Beispielen bei Zugrundelegung der Toleranz $\epsilon_v = 10^{-2}$ für das Abbruchkriterium

$$\frac{\|a^{m+1} - a^m\|}{\max_{0 \leq i \leq m} \|a^{i+1} - a^i\|} \leq \epsilon_v$$

die Rechnungen nach weniger als 20 Iterationsschritten beendet werden. Die Rechenzeiten der Zentraleinheit der EDVA 1040 im OS-Betriebssystem lagen in Abhängigkeit von der Vernetzungstopologie (Anzahl der Knotenpunkte, Elementzusammenhang) zwischen 3 und 12 Minuten.

Die Probleme zum ebenen Vorwärtsfließpressen umfassen die Berechnung der Verteilung von Umformgeschwindigkeit und der zweiten Invariante Π_D bei einer Reduzierung des Werkstückquerschnittes im Verhältnis 2 : 1 unter 45° bzw. 90° (Bilder 3 und 4). Die Darstellungen für Werkzeuggeometrie, Randbedingungen und

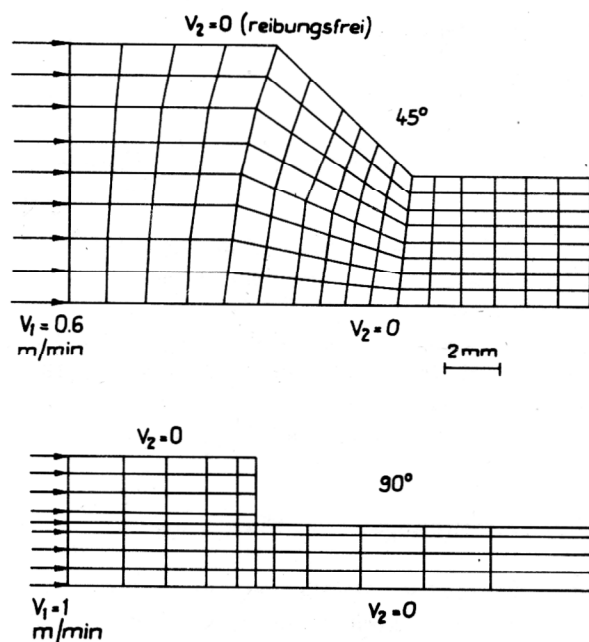


Bild 2
Geometrie, Randbedingungen und Vernetzung beim ebenen Vorwärtsfließpressen

Vernetzung sind im Bild 2 enthalten. An den Kontaktflächen zum Umformwerkzeug wird reibungsfreies Gleiten vorausgesetzt. Ein qualitativer Vergleich mit den Beispielen in [8], [9] zeigt eine sehr gute Übereinstimmung der Resultate. Insbesondere die Erfüllung der Inkompressibilitätsbedingung ist mit einer Genauigkeit von drei geltenden Ziffern gewährleistet. Deutlich wird auch, daß bei einem Reduktionsverhältnis von 2 : 1 die zu erwartende betragsmäßig doppelt große Ausflußgeschwindigkeit mit einem relativen Fehler von 10^{-4} berechnet werden kann.

Perspektivisch ist ein direkter Vergleich mit Meßwerten am Realvorgang wünschenswert.

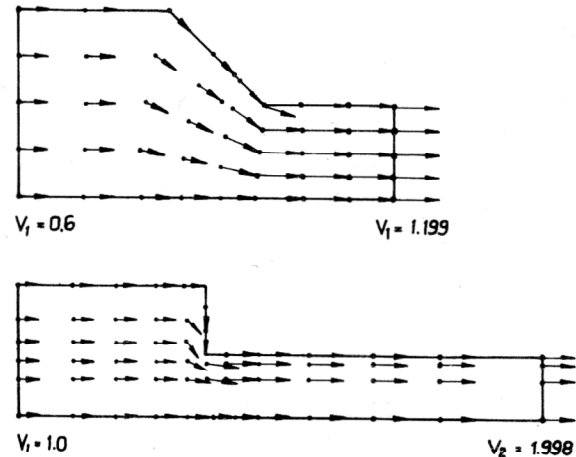


Bild 3
Geschwindigkeitsverteilung (m/min) in der Umformzone

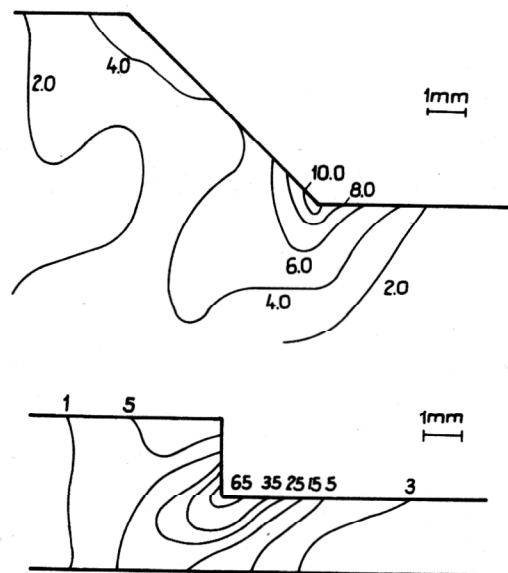


Bild 4
Verteilung von Π_D (1/s) in der Umformzone

LITERATUR

- [1] Felippa, C. A.: Iterative Procedures for Improving Penalty Function Solution of Algebraic Systems, *Int. J. Num. Meth. Engng.* 12 (1978), S. 821 – 836.
- [2] Girault, V., Raviart, P.-A.: Finite Element Approximation of the Navier-Stokes Equations, *Lecture Notes in Mathematics*, Bd. 749, Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1979.
- [3] Thompson, E. G.: Average and Complete Incompressibility in the Finite Element Method, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 9 (1975), S. 925 – 932.
- [4] Korneew, W. G.: Iterationnyye Metody Reschenija Schem Metoda konetschnych Elementow, *Sch. W. M. M. F.*, 17 (1977) 5, S. 1213 – 1239.
- [5] Gründemann, H.: Ein Beitrag zum Einsatz der Methode der Finiten Elemente auf mechanisch-thermische Vorgänge der Festkörpermechanik in Anwendung auf Verfahren der Metallbearbeitung, 1981, Dissertation B (eingereicht an der AdW der DDR).
- [6] Perzyna, P.: On the Constitutive Equations für Work Hardening and Rate Sensitive Plastic Materials, *Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences*, Vol. XI, No. 4, (1964).
- [7] Temam, R.: Navier-Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis North Holland Publishing Company, 1979.
- [8] Zienkiewicz, O. C.: The Finite Element Method, 3rd. Edition, Mc Graw Hill, London 1977.
- [9] Zienkiewicz, O. C., Jain, P. C., Onate, E.: Flow of Solids during Forming and Extrusion: Some Aspects of Numerical Solution, *Int. J. Solids Structures* 14 (1978), S. 15 – 38.
- [10] Gajewski, H., Gröger, K., Zacharias, K.: Nichtlineare Operatorgleichungen und Operator differentialgleichungen, Akademie-Verlag Berlin, 1974.
- [11] Gründemann, H.; Weber, H.: Mechanisch-thermische Modellierung des Spannungsvorganges unter Nutzung der Methode der finiten Elemente. *Z. Technische Mechanik* (eingereicht 1982).
- [12] Richter, F.: Die wichtigsten physikalischen Eigenschaften von 52 Eisenwerkstoffen, *Stahleisen-Sonderberichte* Heft 8, 1973, Verlag Stahleisen M. B. H., Düsseldorf.

Anschrift des Verfassers:

Dr. rer. nat. H. Gründemann,
Akademie der Wissenschaften der DDR
Institut für Mechanik
Abt. Bruchmechanik/Mikromechanik
9010 Karl-Marx-Stadt
PSF 408