

Vergleichende Betrachtungen von Methoden zur Berechnung des Schwingungsverhaltens verrippter Flächentragwerke

R. Hammer, R. Postl

1. Einleitung

Im Wissenschaftsbereich Mechanik fester Körper der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock sind in den vergangenen Jahren Arbeiten zur Modellfindung und zur Berechnung versteifter Flächentragwerke durchgeführt worden

Die Modellfindung bezieht sich sowohl auf das elastische System als auch auf das Dämpfungsverhalten. Ziel der Berechnungen war die Ermittlung der Eigenfrequenzen, der Eigenformen und der Schwingformen bei harmonischer Kraft- und Wegerregung. Diese Berechnungen wurden mit verschiedenen Methoden durchgeführt. In der vorliegenden Arbeit werden die wichtigsten Berechnungsmethoden einer vergleichenden Betrachtung unterzogen. Der Vergleich wird an orthogonal verrippten Platten und flachen Schalen vorgenommen.

2. Modellvorstellungen und mathematische Formulierung des Problems

Grundelement des verrippten Flächentragwerkes ist die verrippte Platte bzw. die schwach gekrümmte verrippte Schale. Für letztere wird die Gültigkeit der Theorie der flachen Schale vorausgesetzt. Diese Annahme ist für Pfeilhöhen bis etwa 1/20 der Längenabmessungen erfüllt. Die Rippen werden zunächst als orthogonal angeordnet vorausgesetzt. Ihnen wird die Theorie des gekrümmten Wlassow-Stabes zugrunde gelegt. Das verwendete Modell zeigt Bild 1.

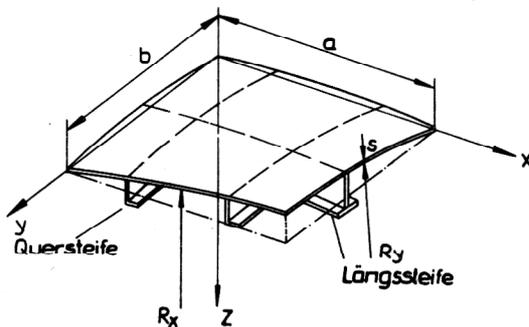


Bild 1
Flache zweiachsig gekrümmte Schale mit orthogonalen Versteifungen

Die Berechnung fremderregter Schwingungen setzt die Kenntnis der Dämpfungswirkungen voraus. Diese stellen ein verwickeltes Phänomen dar. Weil der diesbezügliche Erkenntnisstand noch unzureichend ist, die Dämpfungseigenschaften schwer mathematisch erfassbar sind und

die Dämpfungsparameter stark streuen, ist eine grobe Näherung für die mathematische Formulierung tragbar. Es wird in innere und äußere Dämpfungseinflüsse unterschieden.

Die innere Dämpfung wird durch den Voigt-Ansatz in der Form

$$\underline{\tilde{s}} = \underline{H} (\underline{\tilde{e}} + \frac{\delta}{\Omega} \underline{\tilde{e}}^{\circ}) \quad (2.1)$$

erfaßt. Darin bedeuten:

$$\underline{\tilde{s}}^T = [\tilde{\sigma}_x, \tilde{\sigma}_y, \tilde{\tau}_{xy}] \quad \text{den Spannungsvektor,}$$

$$\underline{\tilde{e}}^T = [\tilde{\epsilon}_x, \tilde{\epsilon}_y, \tilde{\gamma}_{xy}] \quad \text{den Verzerrungsvektor,}$$

$$\underline{H} = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \quad \text{die Matrix für das Hookesche Stoffgesetz,}$$

δ den Parameter der inneren Dämpfung und Ω die Kreisfrequenz.

Hochgestellte Schlangen charakterisieren zeitabhängige Größen. Bei Beschränkung auf harmonische Schwingungen gilt

$$\underline{\tilde{s}} = \underline{s} e^{i\Omega t} \quad \text{und} \quad \underline{\tilde{e}} = \underline{e} e^{i\Omega t}$$

und (2.1) geht damit über in

$$\underline{s} = (1 + i\delta) \underline{H} \underline{e} \quad (2.2)$$

Wird mit $\underline{v}^T = [u, v, w]$ der Verschiebungsvektor bezeichnet, dann gilt zwischen Verzerrung und Verschiebung der Zusammenhang

$$\underline{e} = \underline{D} \underline{v} \quad (2.3)$$

wobei \underline{D} einen Matrizendifferentialoperator darstellt. Aus Gl. (2.2) folgt mit (2.3)

$$\underline{s} = (1 + i\delta) \underline{H} \underline{D} \underline{v} \quad (2.4)$$

Die äußere Dämpfung wird durch den Ausdruck

$$\underline{\tilde{P}}_D = -\vartheta \underline{\tilde{w}}^{\circ} \quad (2.5)$$

erfaßt, der im Sonderfall harmonischer Schwingungen mit

$$\underline{\tilde{w}} = \underline{w} e^{i\Omega t} \quad \text{in} \quad (2.6)$$

$$\underline{P}_D = -i\vartheta\Omega \underline{w}$$

übergeht.

Darin bedeuten

\underline{P}_D die Dämpfungskraft je Flächeneinheit quer zur Oberfläche und

ϑ den Koeffizienten der äußeren Dämpfung.

Nach der Theorie der flachen Schalen ergibt sich für die Deckschale folgende mathematische Formulierung als Randwertproblem:

$$u_{,xx} + \frac{1-\mu}{2} u_{,yy} + \frac{1+\mu}{2} v_{,xy} - (k_x + \mu k_y) w_{,x} - k_{x,x} w + \frac{\rho}{E^*} (1-\mu^2) \Omega^2 u = -p_x \frac{1-\mu^2}{E^* s} \quad (2.7a)$$

$$v_{,yy} + \frac{1-\mu}{2} v_{,xx} + \frac{1+\mu}{2} u_{,xy} - (k_y + \mu k_x) w_{,y} - k_{y,y} w + \frac{\rho}{E^*} (1-\mu^2) \Omega^2 v = -p_y \frac{1-\mu^2}{E^* s} \quad (2.7b)$$

$$\nabla^4 w - \frac{12}{s^2} [(k_x + \mu k_y) u_{,x} + (k_y + \mu k_x) v_{,y} - (k_x^2 + k_y^2 + 2\mu k_x k_y) w] - 12(1-\mu^2) \frac{\rho}{E^* s^2} \Omega^2 (1-i\vartheta^*) w = p_z \frac{12(1-\mu^2)}{E^* s^3} + (p_{x,x} + p_{y,y}) \frac{s}{2} \frac{12(1-\mu^2)}{E^* s^3} \quad (2.7c)$$

$$\vartheta^* = \frac{\vartheta}{\rho s \Omega} \quad (2.8)$$

$$E^* = E(1+i\delta) \quad (2.9)$$

u, v, w die Verschiebungskomponenten in der Schalenmittelfläche,

$k_x = \frac{1}{R_x}; k_y = \frac{1}{R_y}$ die Krümmungen in x- und y-Richtung

ρ die Dichte des Schalenmaterials

p_x, p_y, p_z die an der Schale angreifenden Oberflächenkräfte und die

s Schalendicke.

Das Randwertproblem für die Längssteifen wird durch das System nachstehender Beziehungen beschrieben:

$$A u_{,xxx} - S_y v_{,xxx} - S_z w_{,xxx} - S_\omega \varphi_{,xxx} + A(k_x w)_{,x} + \frac{q_x}{E^*} = 0 \quad (2.10a)$$

$$S_y u_{,xxx} - I_{yy} v_{,xxx} - I_{yz} w_{,xxx} - I_{\omega y} \varphi_{,xxx} - S_y (k_x w)_{,xx} + \frac{q_y}{E^*} = 0 \quad (2.10b)$$

$$S_z u_{,xxx} - I_{yz} v_{,xxx} - I_{zz} w_{,xxx} - I_{\omega z} \varphi_{,xxx} + k_x (A u_{,x} - S_y v_{,xx} - S_z w_{,xx} - S_\omega \varphi_{,xx}) - S_z (k_x w)_{,xx} - A k_x^2 w + \frac{\rho \Omega^2}{E^*} (A w + S_y \varphi) + \frac{1}{E^*} (q_z + \frac{s}{2} q_{x,x}) = 0 \quad (2.10c)$$

$$S_\omega u_{,xxx} - I_{\omega y} v_{,xxx} - I_{\omega z} w_{,xxx} - I_{\omega \omega} \varphi_{,xxx} - S_\omega (k_x w)_{,xx} + \frac{1}{2(1+\mu)} I_T \varphi_{,xx} + \frac{\rho \Omega^2}{E^*} [S_y w + \varphi (I_{yy} + I_{zz})] + \frac{1}{E^*} (m_x - q_y \frac{s}{2}) = 0 \quad (2.10d)$$

$$\frac{A \kappa}{2(1+\mu)} w_{,xx} - A k_x^2 w + k_x (A u_{,x} - S_y v_{,xx} - S_z w_{,xx} - S_\omega \varphi_{,xx}) + \frac{q_z}{E^*} = 0 \quad (2.10e)$$

In den Gln. (2.10) bedeuten:

$$A \text{ Querschnittsfläche der Längsrippe,} \\ S_y = \int (A) y dA; S_z = \int (A) z dA; I_{yy} = \int (A) y^2 dA; \\ I_{zz} = \int (A) z^2 dA; I_{yz} = \int (A) y z dA; S_\omega = \int (A) \omega dA; \\ I_{\omega y} = \int (A) \omega y dA; I_{\omega z} = \int (A) \omega z dA; I_{\omega \omega} = \int (A) \omega^2 dA; \quad (2.11)$$

I_T St. Venantsche Drillwiderstand der Längssteife,

$$\omega(l) = \int (l) p(l) dl \quad (l)$$

q_x, q_y, q_z an der Längsrippe angreifende Kraftgrößen

w^B Verschiebung in z-Richtung infolge Biegung

w^Q Verschiebung in z-Richtung infolge Querkraftschub

$w = w^B + w^Q$ Gesamtverschiebung in z-Richtung

Querkraftschubdeformationen in y-Richtung und Koppeleinflüsse der Querkräfte in y- und z-Richtung können stets vernachlässigt werden.

Das vorliegende Problem läßt sich auch als Variationsaufgabe formulieren. Unter Annahme harmonischer Erregungen ergibt sich aus dem Hamiltonschen Prinzip folgende Formulierung des Variationsproblems:

$$L = T^S + T^L + T^Q - U^S - U^L - U^Q + W_D + W_E = \text{Extr.} \quad (2.12)$$

In Gl. (2.12) bedeuten:

T^S, T^L, T^Q die kinetischen Energien der Deckschale, der Längs- und Quersteifen

U^S, U^L, U^Q die elastischen Potentiale der entsprechenden Elemente

W_D die Arbeit der Dämpfungskräfte und

W_E die Arbeit der Erregerkräfte.

Die einzelnen Energieanteile lauten:

$$T^S = \frac{1}{2} \rho s \Omega^2 \int_0^a \int_0^b (u^2 + v^2 + w^2) dx dy \quad (2.13a)$$

$$T^L = \frac{1}{2} \rho \Omega^2 \sum_{l=1}^m \int_0^a [A(v^2 + w^2) + (I_{yy} + I_{zz}) \varphi^2 - 2\varphi(S_z v - S_y w)] dx \quad (2.13b)$$

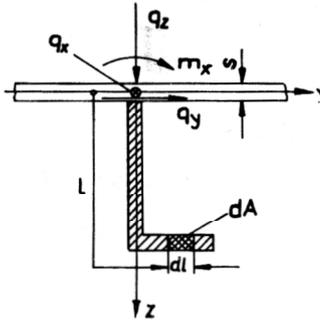


Bild 2
Definition von l und $p(1)$ und Schnittkräfte

$$T^Q = \frac{1}{2} \rho \Omega^2 \sum_{l=0}^n \int_0^b [A(u^2 + w^2) + (I_{xx} + I_{zz}) \chi^2 - 2\chi(S_z u - S_x w)] dy \quad (2.13c)$$

$$US = \frac{E^* s}{2(1-\mu^2)} \int_0^a \int_0^b \left\{ u_{,x}^2 + \frac{1-\mu}{2} u_{,y}^2 + 2\mu u_{,x} v_{,y} + (1-\mu) u_{,y} v_{,x} + v_{,y}^2 + \frac{1-\mu}{2} v_{,x}^2 - 2(k_x + \mu k_y) u_{,x} w - 2(k_y + \mu k_x) v_{,y} w + (k_x^2 + k_y^2 + 2\mu k_x k_y) w^2 + \frac{s^2}{12} [w_{,xx}^2 + w_{,yy}^2 + 2\mu w_{,xx} w_{,yy} + 2(1-\mu) w_{,xy}^2] \right\} dx dy \quad (2.14a)$$

$$U^L = \frac{1}{2} E^* \sum_{l=0}^m \int_0^a [A u_{,x}^2 + I_{yy} v_{,xx}^2 + I_{zz} (w_{,xx}^B)^2 + I_{\omega\omega} \varphi_{,xx}^2 - 2S_y u_{,x} v_{,xx} - 2S_z u_{,x} w_{,xx}^B - 2S_{\omega} u_{,x} \varphi_{,xx} + 2I_{yz} v_{,xx} w_{,xx}^B + 2I_y \omega v_{,xx} \varphi_{,xx} + 2I_z \omega w_{,xx}^B \varphi_{,xx} + k_x^2 w^2 A - 2k_x w (A u_{,x} - S_y v_{,xx} - S_z w_{,xx}^B - S_{\omega} \varphi_{,xx}) + \frac{1}{2(1+\mu)} (I_T + \frac{4A_m^2}{\chi_L}) \varphi_{,x}^2 + A k_Q (w_{,x}^Q)^2 \frac{1}{2(1+\mu)}] dx \quad (2.14b)$$

$$W_D = -\frac{1}{2} i \Omega \vartheta \int_0^a \int_0^b w^2 dx dy \quad (2.15)$$

$$W_E = \int_{(S)} \underline{v}^T \underline{P}_E dS + \sum_{(i)} \underline{v}_i^T \underline{F}_i \quad (2.16)$$

Hierin wurden noch folgende Symbole verwendet:
 \underline{v} Verschiebungsvektor
 \underline{P}_E Vektor der an der Oberfläche angreifenden Erregerkräfte

dS Oberflächenelement
 \underline{F}_i erregende Einzelkraft
 k_Q Beiwert für die Querkraftschubdeformation
 A_m Von der Skelettlinie des Steifenprofils eingeschlossene Fläche bei geschlossenen Profilen.

$$\chi_L = \int_0^L \frac{dl}{s(l)}$$

3. Lösungsmethoden

3.1. Exakte Lösung

Unter den gemachten Voraussetzungen kann eine exakte Lösung nur für den Sonderfall der in einer Richtung verrippten Platte bzw. flachen Schale angegeben werden, wenn die Querränder momentenfrei und längskraftfrei sind, die Verschiebungen an den Querrändern in Richtung dieser Ränder verschwinden und außerdem die Krümmungen k_x und k_y konstant sind.

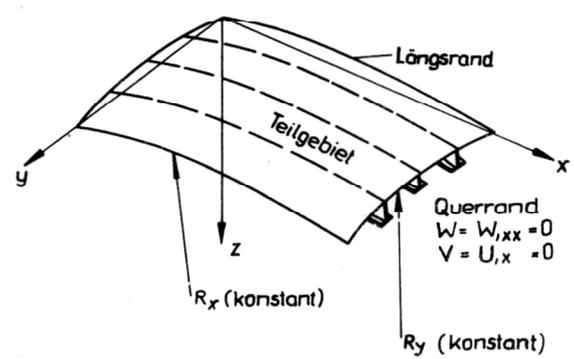


Bild 3
Längsverrippte flache Schale mit Randbedingungen

Die Randbedingungen an den Längsrändern sind beliebig. In diesem Fall können die Abhängigkeiten in x -Richtung durch die Ansätze

$$u(x,y) = U(y) \cos \frac{m\pi x}{a}$$

$$v(x,y) = V(y) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (3.1)$$

$$w(x,y) = W(y) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

separiert werden. Dadurch sind die Gln. (2.7) und (2.10) in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen überführt. Diese müssen für jedes durch die Längsrippen gebildete Teilgebiet gelöst werden. An den Teilgebietsgrenzen sind dann noch die Rand- und Übergangsbedingungen gemäß Bild 4 zu erfüllen.

Für die längsverrippte Platte hat Schlüter in [1] umfangreiche Untersuchungen durchgeführt und einen Lösungsalgorithmus für Eigenschwingungen angegeben. An zahlreichen Beispielen werden darin die Ergebnisse besprochen. Postl und Hammer [2] lösten das entsprechende

Zwangsschwingproblem. Die Ergebnisse der genannten Untersuchungen werden im Rahmen dieser Arbeit mehrfach zu Vergleichen herangezogen.

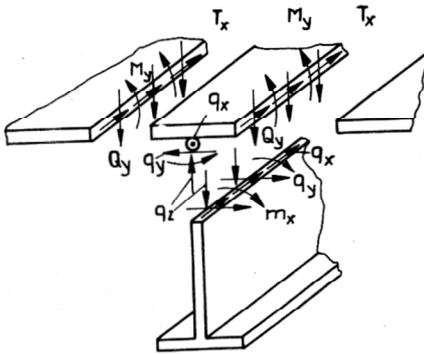


Bild 4
Übergangsbedingungen zwischen Rippe und Schale und zwischen den Schalenteilgebieten

3.2. Lösung mit dem Differenzenverfahren

Ausgangspunkt für die Anwendung des Differenzenverfahrens sind die Gln. des Rand- bzw. Eigenwertproblems (2.7) und (2.10). Der Grundgedanke dieses Verfahrens besteht darin, die in diesen Gleichungen vorkommenden Differentialoperatoren durch entsprechende Differenzenoperatoren zu approximieren. Dabei müssen sowohl die kinematischen als auch die kinetischen Randbedingungen erfüllt werden. Für jede Verschiebung u_{ij} , v_{ij} und w_{ij} eines Gitterpunktes ij im Definitionsgebiet wird eine Differenzgleichung gemäß (2.7) aufgestellt. Die dazu notwendigen Gitterpunkte außerhalb des Definitionsgebietes müssen durch die Randbedingungen definiert werden. Für die Verbindung zwischen Deckschale und Steife sind folgende zwei Wege möglich:

Der erste besteht darin, daß das Gesamtgebiet der Deckschale durch die Steifen in Teilgebiete zerlegt wird und an den Steifen die Übergangsbedingungen erfüllt werden. Ein anderer sehr einfach zu handhabender Algorithmus ergibt sich, wenn die von den Rippen auf die Deckschale wirkenden Kräfte q_x , q_y , q_z und m_x zu Flächenlasten im Bereich der Steifen mit der jeweiligen Breite eines Gitterlinienabstandes „verschmiert“ werden (vgl. Bild 5). Das Moment m_x muß dabei durch die entgegengesetzt wirkenden Flächenlasten $m_x/2h_y^2$ ersetzt werden.

Diese Vorgehensweise eignet sich allerdings nicht zur Berechnung der Kraftgrößen im Bereich des Rippenanschlusses, da die dort auftretenden Querkraft- und Momentensprünge durch allmähliche Übergänge im Bereich eines Gitterlinienabstandes wiedergegeben werden.

Wird z. B. in (2.7a) p_x

$$p_x = - \frac{q_x}{h_y}$$

ersetzt und q_x aus (2.10a) eingeführt, dann folgt nach Ersatz der Differentialoperatoren durch Differenzenoperatoren die Differenzgleichung

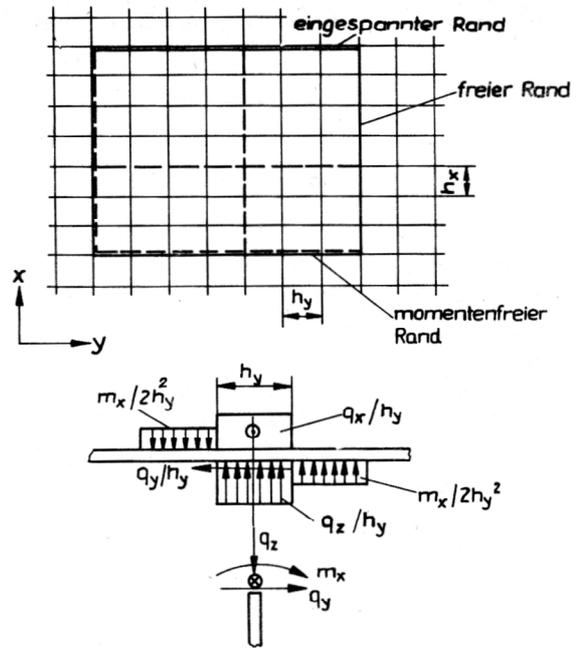


Bild 5
Gittereinteilung und Verbindung von Deckschale mit Steife beim Differenzenverfahren

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h_x^2} \begin{bmatrix} u \\ -2u \\ u \end{bmatrix} + \frac{1-\mu}{2} \frac{1}{h_y^2} [u - 2u] + \\ & + \frac{1+\mu}{2} \frac{1}{4h_x h_y} \begin{bmatrix} -v & 0 & v \\ 0 & 0 & 0 \\ v & 0 & -v \end{bmatrix} - (k_x + \mu k_y) \frac{1}{2h_x} \begin{bmatrix} w \\ 0 \\ -w \end{bmatrix} \\ & - \begin{bmatrix} k_x \\ 0 \\ -k_x \end{bmatrix} \frac{w}{2h_x} + \frac{\rho}{E^*} (1-\mu^2) \Omega^2 u \\ & - \frac{1-\mu^2}{h_y E^* s} \left\{ \frac{A}{h_y^2} \begin{bmatrix} u \\ -2u \\ u \end{bmatrix} - S_y \frac{1}{2h_x^3} \begin{bmatrix} v \\ -2v \\ 0 \\ 2v \\ -v \end{bmatrix} \right\} \\ & - \frac{S_z}{2h_x^3} \begin{bmatrix} w \\ -2w \\ 0 \\ 2w \\ -w \end{bmatrix} - \frac{S_\omega}{4h_x^3 h_y} \begin{bmatrix} -w & 0 & w \\ 2w & 0 & -2w \\ 0 & 0 & 0 \\ -2w & 0 & 2w \\ w & 0 & -w \end{bmatrix} \\ & + A \left\{ \begin{bmatrix} k_x w \\ 0 \\ -k_x w \end{bmatrix} \frac{1}{2h_x} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (3.1a)$$

Zwei weitere Gleichungen (3.1b) und (3.1c) erhält man dann noch durch Kombination der Gln. (2.7b) und (2.7c) mit den Gln. (2.10b, c, d). Die Glieder in der geschweiften Klammer in Gl. (3.1a) erfassen den Einfluß einer Steife. Sie sind nur für die auf der Steife liegenden Zentralpunkte einzuführen. Die Anwendung der Gln. (3.1) auf jeden im Definitionsgebiet liegenden Gitterpunkt liefert dann das Randwertproblem in der Form

$$(\underline{K} - \Omega^2 \underline{M}) \underline{d} = \underline{f}_E \quad (3.2)$$

Darin bedeuten

$\underline{d}^T = [\underline{u}^T, \underline{v}^T, \underline{w}^T]$ den Gitterpunktverschiebungsvektor
 \underline{K} die Steifigkeitsmatrix
 \underline{M} die Massenmatrix
 \underline{f}_E den Erregerkraftvektor und
 Ω die Erregerkreisfrequenz.

Steifigkeits- und Massenmatrix werden zweckmäßig in ihre Anteile für die Beplattung (Schale bzw. Platte) und für Längs- und Quersteifen zerlegt.

Die Matrix, die die Steifigkeit des Systems repräsentiert, ist im allgemeinen Fall wegen der Randbedingungen unsymmetrisch. Dies ist bei den sich ergebenden Matrizen großen Formats als Nachteil zu werten. Wegerregungen lassen sich in einfacher Weise durch Erfüllung der kinematischen Bedingungen an den vorgegebenen Verschiebungen erfassen.

3.3. Verfahren von Ritz

Das Verfahren von Ritz hat sich zur Lösung von Problemen der Schwingungen elastischer Kontinua bewährt. Schlüter [3] hat dieses Verfahren zur Berechnung der Eigenschwingungen verrippter Platten eingehend untersucht und Lösungsalgorithmen angegeben. Dölz [4] wendet das Verfahren von Ritz auf die Berechnung von Eigenschwingungen flacher, orthogonal verrippter Schalen an.

Setzt man den Verschiebungsansatz

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{f}^T & \underline{0}^T & \underline{0}^T \\ \underline{0}^T & \underline{g}^T & \underline{0}^T \\ \underline{0}^T & \underline{0}^T & \underline{h}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{a} \\ \underline{b} \\ \underline{c} \end{bmatrix} = \underline{\Phi} \underline{d} \quad (3.3)$$

in das Variationsproblem (2.12) ein, dann folgt aus

$$\partial \underline{L} / \partial \underline{d} = 0 \quad (3.4)$$

das Randwertproblem in der Form

$$[(1+i\delta)\underline{K} - \Omega^2 \underline{M} + i\Omega \vartheta \underline{B}] \underline{d} = \underline{f}_E \quad (3.5)$$

In (3.3) stellen \underline{f}^T , \underline{g}^T und \underline{h}^T die Vektoren der Koordinatenfunktionen und \underline{a} , \underline{b} , \underline{c} bzw. \underline{d} die Vektoren der Ritz-Freiwerte für die Verschiebungen u , v und w dar. Die Prozedur nach (3.4) liefert die Steifigkeitsmatrix \underline{K} , die Massenmatrix \underline{M} , die Matrix der äußeren Dämpfung \underline{B} und den Vektor der Erregerkräfte \underline{f}_E in der Form

$$\underline{K} = \int_{(V)} (\underline{D} \underline{\Phi})^T \underline{H} (\underline{D} \underline{\Phi}) dV \quad (3.6)$$

$$\underline{M} = \int_{(V)} \rho \underline{\Phi}^T \underline{\Phi} dV \quad (3.7)$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{B}_c \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$\underline{B}_c = \int_{(S)} \underline{h} \underline{h}^T dS \quad (3.9)$$

$$\underline{f}_E = \int_{(S)} \underline{\Phi}_S^T \underline{p}_E dS + \int_{(V)} \underline{\Phi}^T \underline{q}_E dV + \sum_{(i)} \underline{\Phi}_i^T \underline{F}_i \quad (3.10)$$

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & -z\partial^2/\partial x^2 - k_x \\ 0 & \partial/\partial y & -z\partial^2/\partial y^2 - k_y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & -2z\partial^2/\partial x \partial y \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Der Erregerkraftvektor \underline{f}_E setzt sich aus den Volumenkraft-, den Oberflächenkraft- und den Einzelkrafteeregungen zusammen. Die Matrizen $\underline{\Phi}_S$ und $\underline{\Phi}_i$ erfassen die Werte der Koordinatenfunktionen an den Angriffstellen der Oberflächenerregerkräfte bzw. der Einzelkrafteeregungen. Die Matrix \underline{D} ist eine Operatormatrix.

Für $\delta = \vartheta = \underline{f}_E = 0$

und $\Omega = \omega$

geht das Randwertproblem nach (3.5) in das Problem der ungedämpften Eigenschwingung

$$(\underline{K} - \omega^2 \underline{M}) \underline{d} = 0 \quad (3.12)$$

über.

Die Lösung des Zwangsschwingproblems erhält man durch die Einführung eines komplexen Gitterpunktverschiebungsvektors

$$\underline{d} = \underline{d}_R + i \underline{d}_I \quad (3.13)$$

womit (3.5) in die Form

$$\begin{bmatrix} (\underline{K} - \Omega^2 \underline{M}) & | & -(\delta \underline{K} + \Omega \vartheta \underline{B}) \\ \hline (\delta \underline{K} + \Omega \vartheta \underline{B}) & | & (\underline{K} - \Omega^2 \underline{M}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{d}_R \\ \underline{d}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{f}_R \\ \underline{f}_I \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

übergeht. Die Auflösung des Gleichungssystems (3.14) liefert unmittelbar \underline{d}_R und \underline{d}_I , woraus dann die Absolutbeträge der Verschiebungen berechnet werden können.

Eine häufig brauchbare Näherung erhält man, wenn die Matrix der äußeren Dämpfung \underline{B} proportional der Massenmatrix

$$\underline{B} = \epsilon \underline{M} \quad (3.15)$$

gesetzt wird. In diesem Fall folgt aus (3.5)

$$[(1+i\delta)\underline{K} - \Omega^2 (1-i\frac{\vartheta}{\Omega} \epsilon) \underline{M}] \underline{d} = \underline{f}_E \quad (3.16)$$

Dieses Gleichungssystem läßt sich mit Hilfe der Transformation

$$\underline{d} = \underline{X} \underline{d}^* \quad (3.17)$$

entkoppeln, wenn \underline{X} die Modalmatrix darstellt.

Es folgen die entkoppelten Gleichungen

$$[(1+i\delta)\underline{K}^* - \Omega^2 (1-i\frac{\vartheta}{\Omega} \epsilon) \underline{M}^*] \underline{d}^* = \underline{f}^* \quad (3.18)$$

mit den Diagonalmatrizen

$$\begin{aligned} \underline{K}^* &= \underline{X}^T \underline{K} \underline{X} \\ \underline{M}^* &= \underline{X}^T \underline{M} \underline{X} \end{aligned} \quad (3.19)$$

und mit

$$\underline{f}^* = \underline{X}^T \underline{f}_E \quad (3.20)$$

Nach Rücktransformation des Vektors $\underline{d}^* = \underline{d}_R + i\underline{d}_I$ in $\underline{d}_R + i\underline{d}_I$ folgen die komplexen Verschiebungen aus

$$\underline{v}_R(x_i, y_i) + i\underline{v}_I(x_i, y_i) = \underline{\Phi}(x_i, y_i) [\underline{d}_R + i\underline{d}_I] \quad (3.21)$$

Aus (3.21) ergeben sich dann die Absolutbeträge der Verschiebungen. Bei der Entwicklung in Eigenfunktionen reicht in den meisten Fällen ein Teil der Eigenfunktionen aus. Dabei wird die Modalmatrix \underline{X} zur Rechteckmatrix. Liegen die Eigenfrequenzen nicht so dicht beisammen, dann genügt für Erregungen in der Nähe von Eigenfrequenzen oft die Entwicklung in eine Eigenform. Beim Ritzverfahren sind die Matrizen \underline{K} und \underline{M} stets symmetrisch. Sie sind voll besetzt.

3.4. Variationsdifferenzenverfahren

Eine weitere Möglichkeit zur Diskretisierung der Bewegungsgleichungen (2.7) und (2.10) stellt das Variationsdifferenzenverfahren dar. In gewissem Sinne kann man es als eine Kombination des Ritz-Verfahrens mit dem Differenzenverfahren auffassen.

Der Grundgedanke besteht darin, daß die im Funktional in (2.12) vorkommenden Differentialoperatoren durch entsprechende Differenzenoperatoren ersetzt werden und die Integration über das Definitionsgebiet mit Hilfe numerischer Methoden erfolgt. Aus den so gewonnenen Energieausdrücken ergeben sich dann durch Differentiation nach den Gitterpunktverschiebungen die Steifigkeits-, Massen- und Dämpfungsmatrizen. Es gilt

$$\partial U / \partial \underline{d} = \underline{K} \underline{d}$$

$$\partial T / \partial \underline{d} = \underline{M} \underline{d} \Omega^2$$

$$\partial W_D / \partial \underline{d} = i \Omega \vartheta \underline{B} \underline{d}$$

$$\partial W_E / \partial \underline{d} = \underline{f}_E$$

(3.22)

\underline{d} stellt darin wiederum den Gitterpunktverschiebungsvektor dar.

Es hat sich als zweckmäßig erwiesen, das Gebiet der Deckschale unabhängig von der Lage der Rippen mit einem Gitternetz gemäß Bild 6 zu belegen. Dabei sind die zwei dort dargestellten Varianten üblich.

Bei Anwendung gewöhnlicher Differenzenoperatoren und Integration durch einfache Summenbildung kann man z. B. den Ausdruck für das elastische Potential der Deckschale gemäß Gl. (14a) in folgender Form schreiben:

$$\begin{aligned} US &= \frac{E^* s}{2(1-\mu^2)\gamma} \sum \left\{ \begin{bmatrix} u \\ -u \end{bmatrix}^2 + \frac{1-\mu}{2} \gamma^2 [-u \ u]^2 \right. \\ &+ \frac{\mu\gamma}{2} \begin{bmatrix} u \\ 0 \\ -u \end{bmatrix} [-v \ 0 \ v] + \frac{1-\mu}{4} \gamma [-u \ 0 \ u] \begin{bmatrix} v \\ 0 \\ -v \end{bmatrix} \\ &+ \gamma^2 [-v \ v]^2 + \frac{1-\mu}{2} \begin{bmatrix} v \\ -v \end{bmatrix}^2 - (\kappa_x + \mu\kappa_y) \begin{bmatrix} u \\ 0 \\ -u \end{bmatrix} [w] \\ &- (\kappa_y + \mu\kappa_x) \gamma h_x [-v \ 0 \ v] [w] + (\kappa_x^2 + \kappa_y^2 + 2\mu\kappa_x\kappa_y) h_x^2 [w]^2 \\ &+ \frac{s^2}{12a^2 h_x^2} \left(\begin{bmatrix} v \\ -2w \\ w \end{bmatrix}^2 + \gamma^4 [w - 2w \ w]^2 \right) \\ &+ 2\mu\gamma^2 \begin{bmatrix} w \\ -2w \\ w \end{bmatrix} [w - 2w \ w] \end{aligned}$$

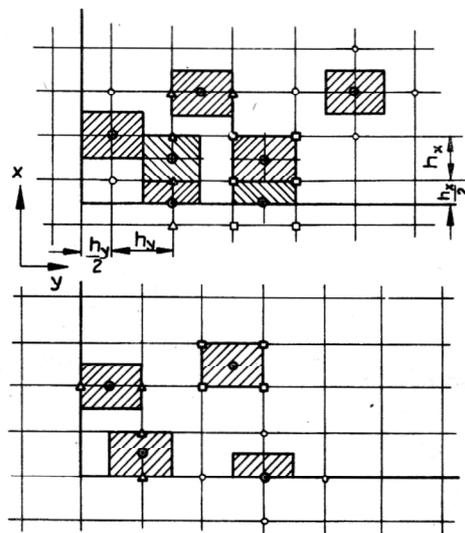


Bild 6
Konzeptionen für die Gitterpunktanordnungen und Integrationsgebiete beim Variationsdifferenzenverfahren
(⊙ Zentralpunkte)

$$+ 2(1-\mu)\gamma^2 \left[\begin{array}{cc} -w & w \\ w & -w \end{array} \right]^2 \quad (3.23)$$

mit

$$\gamma = \frac{a}{b} \frac{h_x}{h_y}; \quad \kappa_x = \kappa_x a; \quad \kappa_y = \kappa_y a \quad (3.24)$$

Darin entspricht die Anordnung der Differenzenmoleküle dem in Bild 6 dargestellten Bezugssystem. Aus Bild 6 sind die den einzelnen Differenzenmolekülen entsprechenden Zentralpunkte und die diesen zugeordneten Integrationsteilgebiete ersichtlich.

Bei der in Bild 6a dargestellten Variante sind die Gitterlinien zum Rand um jeweils einen halben Gitterlinienabstand versetzt.

Steifigkeits-, Massen- und Dämpfungsmatrizen sind beim Variationsdifferenzenverfahren symmetrisch. Sie besitzen Bandcharakter.

In der Regel werden Steifen nicht mit Gitterlinien zusammenfallen. In diesem Falle sind die Verschiebungen an den Steifen durch die benachbarten Gitterpunktverschiebungen durch Interpolation auszudrücken.

Man geht bei der praktischen Prozedur so vor, daß Steifigkeitsmatrizen und Massenmatrizen zunächst ohne Beachtung der kinematischen Randbedingungen aufgebaut werden, wobei die außerhalb des Definitionsbereiches liegenden Punkte in die Variation einbezogen werden. Die Einarbeitung der kinematischen Randbedingungen erfolgt dann durch Streichung, Addition bzw. Subtraktion entsprechender Zeilen und Spalten. Die kinetischen Randbedingungen werden bereits durch Einbeziehung der Außenpunkte in die Variation erfaßt. Die Elemente der Massenmatrix für die Außenpunkte verschwinden jedoch. Damit ist die Massenmatrix singular. Zerlegt man den Gitterpunktverschiebungsvektor \underline{d} in den Vektor der Innenpunkte (einschließlich Randpunkte) und den Vektor der Außenpunkte

$$\underline{d} = \underline{d}_i + \underline{d}_a \quad (3.25)$$

dann kann das Eigenwertproblem in der Form

$$\left(\begin{array}{cc} \underline{P}_{ii} & \underline{P}_{ia} \\ \underline{P}_{ai} & \underline{P}_{aa} \end{array} \right) - \lambda \left(\begin{array}{cc} \underline{M}_{ii} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} \end{array} \right) \begin{bmatrix} \underline{d}_i \\ \underline{d}_a \end{bmatrix} = \underline{0} \quad (3.26)$$

geschrieben werden.

Die Elimination von \underline{d}_a liefert dann

$$(\underline{P}_{ii} - \underline{P}_{ia} \underline{P}_{aa}^{-1} \underline{P}_{ia}^T - \lambda \underline{M}_{ii}) \underline{d}_i = \underline{0} \quad (3.27)$$

Veränderliche Krümmungen, veränderliche Dicken der Beplattung und veränderliche Steifenquerschnittsparameter lassen sich in die Matrizen unmittelbar durch Erfassung der den Gitterpunkten entsprechenden diskreten Werte einarbeiten. Veränderliche Schalendicken gestalten die Matrizen jedoch unübersichtlich. Deshalb wird man besser das Gesamtgebiet in Teilgebiete gleicher Schalendicke aufteilen und dann die Teilgebiete unter Beachtung der kinematischen Übergangsbedingungen zusammenschließen. In Bild 7 ist dies dargestellt. Gemäß Bild 7 muß gelten:

$$w_i^{(a)} = w_a^{(b)}; \quad w_R^{(a)} = w_R^{(b)}; \quad w_a^{(a)} = w_i^{(b)}$$

Die hochgestellten Indices charakterisieren das Teilgebiet und die tiefgesetzten entsprechen den Innen-, Rand- und Außenpunkten. Bei räumlichen Systemen muß bei der Zusammenfügung noch eine Koordinatentransformation vorgenommen werden.

Nichtrechteckige Berandungen erfordern eine Interpolation der Randbedingung. Wegerregungen lassen sich in einfacher Weise durch die der vorgegebenen Bewegung entsprechenden kinematischen Randbedingungen berücksichtigen.

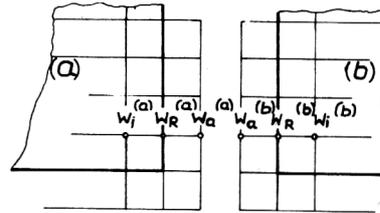


Bild 7 Zusammenfügen von Teilgebieten

3.5. Methode der finiten Elemente

Die Methode der finiten Elemente hat wegen ihrer Universalität breite Anwendung gefunden. Um dieses Verfahren mit den vorher behandelten vergleichen zu können, wird es in seiner Anwendung auf verrippte Platten dargelegt.

Als Grundelement der Beplattung wird ein gekrümmtes Quadratelement gemäß Bild 8 gewählt.

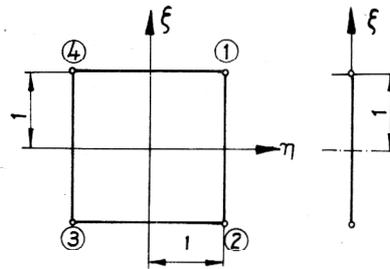


Bild 8 Quadratelement der Beplattung und Steifenelement

Durch geeignete Transformationen lassen sich daraus dann andere Elementformen bilden. Das Verschiebungsfeld im Schalelement wird durch den Ansatz

$$\underline{v}(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} u(\xi, \eta) \\ v(\xi, \eta) \\ w(\xi, \eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{f}^T & \underline{0}^T & \underline{0}^T \\ \underline{0}^T & \underline{f}^T & \underline{0}^T \\ \underline{0}^T & \underline{0}^T & \underline{g}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{d}_u \\ \underline{d}_v \\ \underline{d}_w \end{bmatrix} = \underline{\Phi}_e \underline{d}_e \quad (3.28)$$

beschrieben.

Darin bedeuten:

$$\underline{f}^T = [f_{22}, f_{42}, f_{24}, f_{12}, f_{32}, f_{14}, f_{11}, f_{31}, f_{13}, f_{21}, f_{41}, f_{23}] \quad (3.29a)$$

$$\underline{g}^T = [f_{22}, f_{42}, f_{24}, f_{44}, f_{12}, f_{32}, f_{14}, f_{34}, f_{11}, f_{31}, f_{13}, f_{33}, f_{21}, f_{41}, f_{23}, f_{43}] \quad (3.29b)$$

$$f_{ij}(\xi, \eta) = p_i(\xi) q_j(\eta) \quad (3.29c)$$

$$p_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)^2(2+\xi); \quad q_1 = \frac{1}{4}(1-\eta)^2(2+\eta)$$

$$p_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)^2(2-\xi); \quad q_2 = \frac{1}{4}(1+\eta)^2(2-\eta)$$

$$p_3 = \frac{1}{4}(1-\xi)^2(1+\xi); \quad q_3 = \frac{1}{4}(1-\eta)^2(1+\eta)$$

$$p_4 = -\frac{1}{4}(1+\xi)^2(1-\xi); \quad q_4 = -\frac{1}{4}(1+\eta)^2(1-\eta) \quad (3.29d)$$

$$\underline{d}_u = \begin{bmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{u}_2 \\ \underline{u}_3 \\ \underline{u}_4 \end{bmatrix}; \quad \underline{d}_v = \begin{bmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \\ \underline{v}_3 \\ \underline{v}_4 \end{bmatrix}; \quad \underline{d}_w = \begin{bmatrix} \underline{w}_1 \\ \underline{w}_2 \\ \underline{w}_3 \\ \underline{w}_4 \end{bmatrix} \quad (3.29e)$$

$$\underline{u}_i = \begin{bmatrix} u_i \\ u_{i,\xi} \\ u_{i,\eta} \end{bmatrix}; \quad \underline{v}_i = \begin{bmatrix} v_i \\ v_{i,\xi} \\ v_{i,\eta} \end{bmatrix}; \quad \underline{w}_i = \begin{bmatrix} w_i \\ w_{i,\xi} \\ w_{i,\eta} \\ w_{i,\xi\eta} \end{bmatrix} \quad (3.29f)$$

Demnach besitzt das Schalelement 40 Freiheitsgrade. Für die Stabelemente in ξ -Richtung werden sinngemäß Ansätze entsprechend Gl. (3.30) benutzt.

$$\underline{\bar{v}}(\xi) = \begin{bmatrix} \underline{\bar{u}}(\xi) \\ \underline{\bar{v}}(\xi) \\ \underline{\bar{w}}(\xi) \\ \underline{\bar{\varphi}}(\xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{s}^T & \underline{0}^T & \underline{0}^T & \underline{0}^T \\ \underline{0}^T & \underline{s}^T & \underline{0}^T & \underline{0}^T \\ \underline{0}^T & \underline{0}^T & \underline{s}^T & \underline{0}^T \\ \underline{0}^T & \underline{0}^T & \underline{0}^T & \underline{s}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\bar{d}}_u \\ \underline{\bar{d}}_v \\ \underline{\bar{d}}_w \\ \underline{\bar{d}}_\varphi \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

mit

$$\underline{\bar{d}}_u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_{1,\xi} \\ u_2 \\ u_{2,\xi} \end{bmatrix}; \quad \underline{\bar{d}}_v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_{1,\xi} \\ v_2 \\ v_{2,\xi} \end{bmatrix}; \quad \underline{\bar{d}}_w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_{1,\xi} \\ w_2 \\ w_{2,\xi} \end{bmatrix}; \quad \underline{\bar{d}}_\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_{1,\xi} \\ \varphi_2 \\ \varphi_{2,\xi} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

und

$$\underline{s}^T = [p_1, p_3, p_2, p_4] \quad (3.32)$$

Nach Einführung der Verschiebungsansätze (2.28) und (3.30) in die Energieausdrücke (2.13) bis (2.16) und Ableitung nach den Elementknotenverschiebungsvektoren $\underline{d}_u, \underline{d}_v, \underline{d}_w$ bzw. $\underline{\bar{d}}_u, \underline{\bar{d}}_v, \underline{\bar{d}}_w$ und $\underline{\bar{d}}$ erhält man die Steifigkeits-, Massen- und Dämpfungsmatrizen sowie die Erregerkraftvektoren.

Für ebene und gekrümmte Rechteckelemente lassen sich die Integrationen geschlossen ausführen und damit die Elementmatrizen explizit darstellen. Durch lineare (subparametrische) Verzerrung können aus den Quadratelementen allgemeine oder spezielle Viereckelemente und Dreieckelemente gebildet werden. Im allgemeinen Fall lassen sich die zur Bildung der Elementmatrizen erforderlichen Integrationen nur numerisch ausführen. In Bild 9 ist eine lineare Verzerrung des Quadratelementes dargestellt.

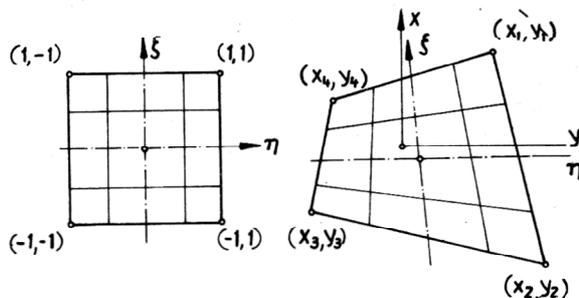


Bild 9
Lineare Verzerrung des Quadratelementes

Die Bildung der Systembeziehungen aus den Elementmatrizen sowie die Transformation auf ein globales Bezugssystem erfolgt in der üblichen Weise.

Die Transformationsbeziehungen für eine subparametrische Verzerrung lauten

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{t}^T(\xi, \eta) & \underline{0}^T \\ \underline{0}^T & \underline{t}^T(\xi, \eta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Darin bedeuten:

$$\underline{x}^T = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]; \quad \underline{y}^T = [y_1 \ y_2 \ y_3 \ y_4] \quad (3.34)$$

$$\underline{t}^T = [t_1 \ t_2 \ t_3 \ t_4]$$

$$t_1 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \quad t_2 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

$$t_3 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \quad t_4 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \quad (3.35)$$

Räumliche Systeme verrippter Flächentragwerke lassen sich häufig aus den in Bild 10 dargestellten Elementtypen aufbauen.

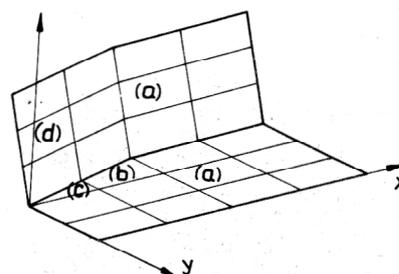


Bild 10
Räumliches System verrippter Flächentragwerke
a) Rechteckelement, b) Trapezelement
c) Dreieckelement, d) Rhombuselement

Die Erfassung der Schubverformung der Steifen läßt sich beim FE-Verfahren ohne Erhöhung der Anzahl der Freiheitsgrade in einfacher Weise durchführen. Auf diesbezügliche Einzelheiten wird im Rahmen dieser Arbeit nicht eingegangen.

4. Numerische Auswertung

Zum Vergleich der besprochenen Verfahren wurden numerische Berechnungen für die in Bild 11 dargestellten Systeme durchgeführt. Behandelt wurden Platten und flache Schalen ohne und mit einer bis drei Längssteifen.

Eine Gegenüberstellung der Ergebnisse für die unversteifte Platte zeigt Bild 12. Dargestellt sind die Abweichungen von der exakten Lösung für die FEM und das VD-Verfahren für die drei ersten symmetrischen Eigenformen. Es ist zu sehen, daß für diesen Fall die Methode der FE bei gleicher Anzahl an Freiheitsgraden genauere Ergebnisse liefert als das Variationsdifferenzenverfahren und das in diesem Falle gleichwertige Differenzenverfahren.

Gleichartige Ergebnisse erhält man auch beim Vergleich beider Verfahren im Falle der unversteiften Platte mit eingespannten Längsrändern und für reine Scheibenschwingungen der unversteiften Scheibe.

Eine Gegenüberstellung einiger Ergebnisse für Eigenschwingungen versteifter Platten zeigt Tabelle 1.

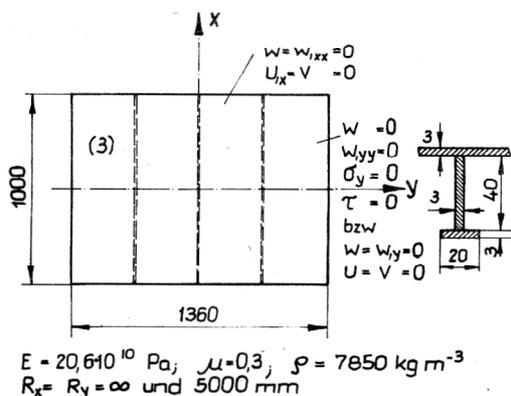


Bild 11
Untersuchte Systeme

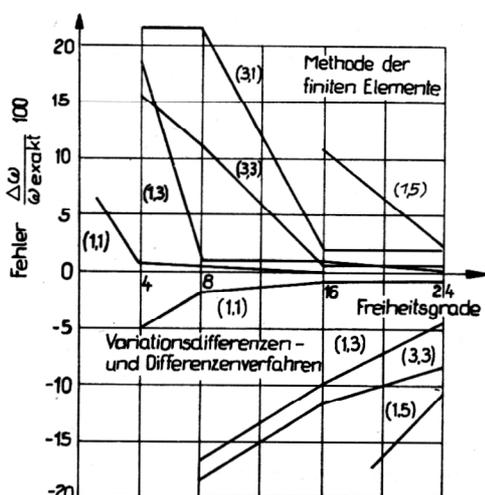


Bild 12
Fehlervergleich zwischen FEM und Variationsdifferenzenverfahren. (1, 1) Halbwellen in x- und y-Richtung

5. Zusammenfassung und Schlußfolgerungen

Nach den bisher vorliegenden Ergebnissen lassen sich folgende Schlußfolgerungen ableiten:

Zur Modellfindung:

Als Modell für die Berechnung des Schwingverhaltens verrippter Flächentragwerke genügt es in der Regel, die Deckplatte bzw. Deckschale als Kirchhoff-Platte oder aber als flache Schale aufzufassen. Die Theorie der flachen Schale gilt mit ausreichender Genauigkeit bis zu Pfeilhöhen von etwa 1/20 der Abmessungen der Schalenmittelfläche.

Die Versteifungen werden zweckmäßig als Wlassow-Timoshenko-Balken modelliert. Es genügt, die Schubdeformation in Richtung senkrecht zur Platten- bzw. Schalenmittelfläche zu erfassen. Schubdeformationen in Richtung der Schalenmittelfläche können dagegen stets vernachlässigt werden. Durch die Verbindung der Versteifungsprofile mit der Beplattung treten Wölbbehinderungen auf. Ihre Wirkung übertrifft die der St. Venant-Torsion um ein mehrfaches. Bei offenen Profilen ist jedoch der Torsionseinfluß auf das Schwingverhalten gering. Über den Einfluß der verschiedenen (insgesamt 13) Stabquerschnittsparameter auf das Schwingverhalten der Gesamtstruktur können noch keine abschließenden Aussagen gemacht werden. Hierzu sind noch weitere Untersuchungen erforderlich.

Zur Berechnung des Zwangsschwingverhaltens sind geeignete Ansätze zur Erfassung der Dämpfung erforderlich. Die Werkstoffdämpfung wird zweckmäßig proportional zur Verzerrungsgeschwindigkeit angesetzt. Das Phänomen, daß die Dämpfungswirkung bei Metallen weitgehend von der Frequenz unabhängig ist, wird dadurch berücksichtigt, daß im Ansatz für die Dämpfung durch die Kreisfrequenz dividiert wird.

Die äußere Dämpfung wird in erster Näherung proportional zur Oberflächengeschwindigkeit senkrecht zur Schalenmittelfläche angesetzt.

Zu den Lösungsmethoden:

Exakte Lösungen für das Eigen- und Zwangsschwingverhalten verrippter Platten und flacher Schalen sind nur möglich für den Sonderfall längsversteifter Platten und Schalen mit parallel verlaufenden Längssteifen, momentenfreien, normalkräftefreien und in Querrichtung unverschieblichen Querrändern. Bei flachen Schalen müssen außerdem die Krümmungen konstant sein. Für den Sonderfall der längsversteiften Platte liegen Lösungsalgorithmen und Rechenprogramme vor. Sie dienen in erster Linie zur Testung von Näherungsmethoden und zu systematischen Untersuchungen über den Einfluß verschiedener Parameter auf das Schwingverhalten.

Das Differenzenverfahren eignet sich gut zur Schwingungsberechnung verrippter flächenförmiger Konstruktionselemente. Es ist leicht algorithmisierbar und sehr übersichtlich. Nachteilig wirken sich die Tatsachen aus,

Tabelle 1
Vergleich von Eigenfrequenzen für die versteifte Platte

Methode	Exakt				Ritz				Variat. Diff.	FEM			
	OVPLA 1	ZWVRPL 2	OVPLA 2	OVSCHA	OVPLA 1	ZWVRPL 2	OVPLA 2	OVSCHA					
Anzahl der Freiheitsgr.	Scheibe	-	0	0	0	0	0	0	50	0	52	0	42
	Platte	-	25	64	24	72	24	24	24	24	24	72	24
System	Eigenfrequ. [Hz]	Abweichungen der Eigenfrequenzen in Prozent											
Platte mit	23,44	23,43	0,04	0,02	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-2,08	-2,08		
	29,29	29,38	1,22	0,71	1,21	0,44	1,11	-4,67	-5,39	-1,10	0,00		
Mittellängssteife	45,90	45,91	0,18	0,04	0,11	0,02	0,11						
	49,98	49,99	1,01	0,52	0,97	0,20	0,96						
Platte mit zwei	43,53				0,00	0,00	0,00	-3,24	-3,25	-0,89	0,26		
	49,07				1,62	0,56	1,45	-6,55	-7,50				
Längssteifen	59,08				6,82	2,18	6,32	-9,49	-12,50	-1,59	0,28		
	67,49				0,20	0,00	0,20						
Platte mit drei	71,04	71,07	0	0	0,03	0,00	0,03	-7,31	-7,32				
	73,34	73,94	1,08	1,08	1,05	0,67	0,80	-8,66	-9,96	-1,82			
Längssteifen	77,38	79,06	23,21	4,15	4,13	2,58	3,58	-9,94	-13,35				
	79,83	82,16	21,36	8,06	21,33	4,60	20,01	-8,72	-13,59	-0,16			

daß es wegen der Randbedingungen auf nichtsymmetrische Matrizen führt und daß neben den kinematischen Randbedingungen auch die kinetischen Randbedingungen erfüllt werden müssen. Ein weiterer Nachteil dieses Verfahrens besteht darin, daß es bei gleicher Anzahl der Freiheitsgrade ungenauere und schlechter konvergieren-

de Ergebnisse liefert als die Methode der Finiten Elemente. Diese Feststellung gilt jedoch nur, wenn man das gewöhnliche Differenzenverfahren mit dem Verfahren der Finiten Elemente unter Verwendung von Elementen, die den Verschiebungszustand durch Polynome dritten Grades annähern, vergleicht. Bei der Anwendung von

Differenzenoperatoren höherer Annäherung vermindern sich vermutlich diese Abweichungen. Dafür entstehen aber andere Nachteile, die in erster Linie in der recht umständlichen Formulierung der Randbedingungen liegen. Die höhere Genauigkeit des Verfahrens der Finiten Elemente gegenüber dem Differenzenverfahren wird bei gleicher Anzahl an Freiheitsgraden jedoch durch eine größere Bandbreite des ersteren erkauft.

Wegerregungen lassen sich bei Anwendung des Differenzenverfahrens in einfacher Weise erfassen. Dagegen bereitet das Vorhandensein von Einzelmassen und veränderlichen Blechdicken und Krümmungsradien keinerlei Schwierigkeiten.

Die Anwendung des Ritz-Verfahrens ist zweckmäßig bei verrippten Flächentragwerken mit regelmäßigen Berandungen und bei kleineren Strukturen. Für die orthogonal verrippte Platte und für die orthogonal verrippte flache Schale liegen Algorithmen und Rechenprogramme vor. Vorbereitungs- und Rechenzeit sind bei Anwendung dieser Methode relativ gering. Nachteilig wirkt sich das Fehlen eines Bandcharakters in den Matrizen aus. Dieser Nachteil hat besonders bei Eigen- und Randwertproblemen großen Formats Gewicht.

Das Variationsdifferenzenverfahren verbindet in gewissem Sinne das Differenzenverfahren mit dem Verfahren von Ritz. Es führt stets auf symmetrische Matrixeigenwertprobleme. Gegenüber dem Differenzenverfahren brauchen beim Variationsdifferenzenverfahren die kinetischen Randbedingungen nicht erfüllt zu werden. Das Verfahren ist in ganz ähnlicher Weise algorithmisierbar wie das FEM.

Auch die Rechenorganisation kann in gleicher Art und Weise erfolgen. Wegerregungen werden über die kinematischen Randbedingungen erfaßt.

Der Approximationsgrad des Variationsdifferenzenverfahrens entspricht in der hier angegebenen Form dem des gewöhnlichen Differenzenverfahrens.

Bei der Schwingungsberechnung verrippter flacher Schalen entfällt beim Variationsdifferenzenverfahren die bei der FEM erforderliche Transformation der Elementmatrizen auf das globale Bezugssystem.

Die Methode der finiten Elemente ist hinsichtlich Universalität von keinem anderen in dieser Arbeit untersuchten Verfahren zu übertreffen. Nach den bisher vorliegenden Ergebnissen kann angenommen werden, daß es auch hinsichtlich Genauigkeit dem Differenzenverfahren und dem Variationsdifferenzenverfahren überlegen ist. Dies gilt allerdings nur für die in dieser Arbeit vorgeschlagenen Elementtypen.

Für die Behandlung verrippter Flächentragwerke bieten sich Quadratelemente unter Verwendung von Hermitepolynomen dritten Grades für die Verschiebungen als etwa optimal an. Durch subparametrische Verzerrung können diese Elemente der Topographie des System angepaßt werden. Entsprechende Ansätze werden auch für die Stabelemente gemacht. Stab- und Schalenelemente sind voll verträglich. Das in dieser Arbeit vorgestellte FE-Konzept liefert bereits bei grober Elementteilung gute Ergebnisse. Die mitunter empfohlene Konzentration der Massen in den Knoten ist bei der hier dargelegten Konzeption nicht zweckmäßig, weil der dadurch bewirkte

Fehler die anderen methodenbedingten Fehler erheblich überschreiten kann.

Aus den durchgeführten Untersuchungen folgt, daß zumindest für die Schwingungsberechnung verrippter Flächentragwerke, die sich aus ebenen Teilsystemen aufbauen, die Anwendung der Methode der finiten Elemente vorzuziehen ist.

Für Systeme, die sich aus flachen verrippten Schalen zusammensetzen, kann das Variationsdifferenzenverfahren jedoch konkurrenzfähig werden. Voraussetzung hierfür ist, daß es hinsichtlich Organisation in gleicher Weise ausgebaut wird, wie die Methode der Finiten Elemente.

LITERATUR

- [1] Schlüter, H.-J.: Die Berechnung des Eigenschwingungsverhaltens der längsverrippten Rechteckplatte mit drehbar gelagerten Querrändern. Schiffbauforschung 11 (1972) H. 3/4, S. 104 – 127.
- [2] Hammer, R.; Postl, R.: Zwangsschwingungen längsverrippter Rechteckplatten mit frei drehbar gelagerten Querrändern. Tagung Dynamik und Getriebetechnik, 13. – 16. Juni 1973 Band B XXVIII/1, VEB Fachbuchverlag Leipzig 1973.
- [3] Schlüter, H.-J.: Die Berechnung von Eigenschwingungen verrippter Platten mit Hilfe der Energiemethode. Diss. B, Wilhelm-Pieck-Universität Rostock, 1979.
- [4] Döhl, V.: Eigenschwingungen orthogonal verrippter flacher Schalen. Abschlußbericht zum Thema: Schwingungen verrippter Flächentragwerke, Teilthema 2, Wilhelm-Pieck-Universität Rostock, 1980.
- [5] Schlüter, H.-J.: Die Berechnung des Schwingungsverhaltens der längsverrippten Rechteckplatte bei beliebigen Randbedingungen. Schiffbauforschung 12 (1973), H 5/6, S. 202 – 214.
- [6] Schlüter, H.-J.: Die Ermittlung von Eigenfrequenzen und Eigenschwingungsformen der orthogonal verrippten Rechteckplatte bei beliebigen Kombinationen eingespannter, frei-drehbar gelagerter und freier Ränder. Schiffbauforschung 15 (1976) H. 5/6, S. 152 – 162.
- [7] Schlüter, H.-J.: Berechnung der Eigenschwingungen orthogonal verrippter Rechteckplatten bei beliebigen Randbedingungen einschließlich elastisch gelagerter und elastisch eingespannter Ränder sowie Randmassenträgheiten, elastischer Stützen, Punktmassenträgheiten und elastisch befestigter starrer Körper. Schiffbauforschung 16 (1977) H. 3/4, S. 141 – 147.
- [8] Hammer, R.; Postl, R.: Angenäherte Berechnung fremd-erregter Schwingungen orthogonal verrippter Platten. Schiffbauforschung 16 (1977) H. 5/6, S. 209 – 222.

Anschrift der Verfasser:

Dr.-Ing. R. Hammer
Prof. em. Dr. Ing. Dr. Eh. R. Postl
Wilhelm-Pieck-Universität
Sektion Schiffstechnik
2500 Rostock
Universitätsplatz 1