

# Über einige Besonderheiten im Schwingungsverhalten von Rotationsschalen

G. Landgraf, M. Weber

## 1. Allgemeine Grundlagen

Prinzipiell treten bei den Rotationsschalen alle Schwingungsarten auf, die in dem räumlichen System überhaupt möglich sind. Aus der Vielfalt dieser Möglichkeiten sollen hier aber nur die achsensymmetrischen Schwingungen mit der Fourier-Ordnung  $m=0$  betrachtet werden, die wiederum als Biege-, Längs- und Torsionsschwingungen auftreten können. In der Biegetheorie lassen sich die

ersten beiden Schwingungsarten nicht mehr entkoppeln, während eine Entkopplung der Torsionsschwingung von den beiden anderen für  $m=0$  möglich ist.

Deshalb sollen die Torsionsschwingungen von den weiteren Betrachtungen ebenfalls ausgeschlossen werden.

Die gekoppelten Biege- und Längsschwingungen lassen sich für die Fourier-Ordnung  $m=0$  mit Hilfe der beiden folgenden gekoppelten Differentialgleichungen beschreiben:

$$\begin{aligned}
 & -u'' - \frac{r'}{r} u' - \left[ \left( \frac{r'}{r} \right) + (1-\nu) \frac{1}{r_1 r_2} \right] \cdot u + \left( \frac{1}{r_1} + \frac{\nu}{r_2} \right) \cdot w' + \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)' \cdot w \\
 & - \frac{h^2}{12 \cdot r_1} \cdot \left\{ -w''' - \frac{r'}{r} \cdot w'' - \left[ \nu \left( \frac{r'}{r} \right)' - \left( \frac{r'}{r} \right)^2 (1-\nu) \right] \cdot w' + \frac{u''}{r_1} + \left[ \frac{r'}{r} - 2 \frac{r'_1}{r_1} \right] \cdot \frac{u'}{r_1} \right. \\
 & \quad \left. + \left[ - \left( \frac{r'_1}{r_1} \right)' + \left( \frac{r'_1}{r_1} \right)^2 - \frac{r'_1}{r_1} \cdot \frac{r'}{r} + \nu \left( \frac{r'}{r} \right)' - \left( \frac{r'}{r} \right)^2 \cdot (1-\nu) \right] \cdot \frac{u}{r_1} \right\} = \\
 & = \omega^2 \cdot \frac{(1-\nu^2) \cdot \rho}{E} \cdot u
 \end{aligned} \tag{1}$$

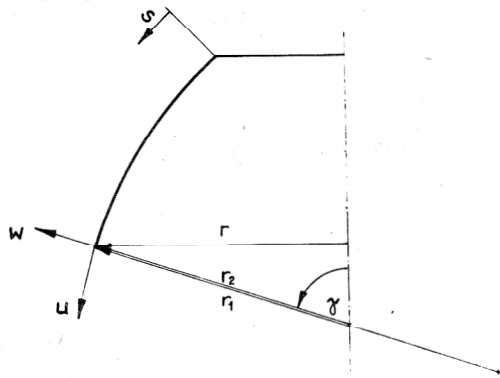
$$\begin{aligned}
 & \frac{h^2}{12} \cdot \left\{ \left( \frac{1}{r} \frac{d}{ds} r \frac{d}{ds} \right)^2 w - \frac{1-\nu}{r} (r'' w)' + \left[ \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{r} \frac{d}{ds} r \frac{d}{ds} \right) + \frac{1}{r} \frac{d}{ds} r' \frac{d}{ds} \right] \cdot \frac{u}{r_1} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1-\nu}{r} (r'' \frac{u}{r_1})' + \left[ \left( \frac{r'}{r} \right)'' + \frac{r'}{r} \left( \frac{r'}{r} \right)' \right] \frac{u}{r_1} \right\} + \left( \frac{1}{r_1} + \frac{\nu}{r_2} \right) \cdot u' \\
 & + \left( \frac{\nu}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \cdot \frac{r'}{r} u + \left( \frac{1}{r_1^2} + \frac{2\nu}{r_1 r_2} + \frac{1}{r_2^2} \right) \cdot w = \\
 & = \omega^2 \cdot \frac{(1-\nu^2) \cdot \rho}{E} \cdot w
 \end{aligned} \tag{2}$$

Dabei gilt:

$s$  Koordinate des Meridianbogens (mit den Randpunkten  $a$  und  $b$ )  
 $u(s)$ ,  $w(s)$  Komponenten des Verschiebungsvektors  
 $r_1(s)$  Krümmungsradius des Meridians  
 $r_2(s)$  Krümmungsradius des Breitenkreises  
 $h$  Dicke der Schale

$\nu$  Querkontraktionszahl  
 $E$  Elastizitätsmodul  
 $\rho$  Dichte des Schalenwerkstoffes  
 $\omega$  Eigenkreisfrequenz der Rotationsschale

$$( )' = \frac{\partial}{\partial s} ( )$$



**Bild 1**  
Bezeichnung der auftretenden Größen bei Rotationsschalen

Außerdem werden der Spektralparameter

$$\lambda = \frac{(1-\nu^2)}{E} \cdot \rho \cdot \omega^2 \quad (3)$$

und die beiden Funktionen

$$\varphi_1(s) = \frac{1-\nu^2}{r_2^2(s)} \quad s \in [a, b] \quad (4)$$

$$\varphi_2(s) = \frac{1}{r_1^2(s)} + \frac{1}{r_1(s) \cdot r_2(s)} + \frac{1}{r_2^2(s)}$$

mit den Definitionsbereichen  $\Phi_j = [\alpha_j, \beta_j]$ , ( $j = 1, 2$ ) eingeführt [1].

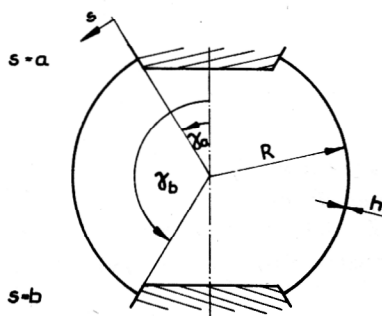
Das Problem (1), (2) tritt immer gekoppelt auf und besitzt ein diskretes Spektrum

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots \quad (5)$$

Im Gegensatz dazu stellt  $\Phi_1$  einen Bereich dar, wo in der Membrantheorie ( $h \rightarrow 0$ ) ein kontinuierliches Spektrum auftritt. Außerhalb von  $\Phi_1$  ist auch das Spektrum der Membrantheorie diskret [1].

## 2. Zum Schwingungsverhalten der Kugelschale

In [2] wurde für  $m=0$  der untere Teil des Eigenwertspektrums der in Bild 2 dargestellten Kugelschale, die bei  $s = a$  und  $s = b$  fest eingespannt ist, mit den folgenden Parametern untersucht:



**Bild 2**  
Geometrie der Kugelschale

$$\frac{R}{l_0} = 1$$

$$\frac{h}{R} = 0.01 \text{ und } 0.001$$

$$\gamma_a = 30^\circ$$

$$\gamma_b = 150^\circ$$

$$\frac{E}{E_0} = 1$$

$$\nu = 0.0 \text{ und } 0.3$$

Mit Hilfe der dabei verwendeten Bezugsgrößen  $l_0$  und  $E_0$  kann man auch die anderen benötigten Größen  $\omega^2$ ,  $\lambda$ ,  $\varphi_j$  in die dimensionslosen Größen  $\bar{\omega}^2$ ,  $\bar{\lambda}$ ,  $\bar{\varphi}_j$  überführen.

$$\bar{\omega}^2 = \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = \omega^2 \cdot \frac{l_0^2 \cdot \rho}{E}$$

$$\bar{\lambda} = \lambda \cdot l_0^2 = (1-\nu^2) \cdot \frac{E_0}{E} \cdot \bar{\omega}^2 \quad (6)$$

$$\bar{\varphi}_j = \varphi_j \cdot l_0^2$$

Da sich alle Zahlenangaben und Tabellen ausschließlich auf die dimensionslosen Größen beziehen, werden diese nachfolgend nicht mehr besonders gekennzeichnet.

Alle Eigenwerte wurden durch numerische Berechnungen mit Hilfe eines Restwertverfahrens erhalten.

### 2.1. Gegenüberstellung von Membran- und Biegeschwingungen

Der Membranzustand verlangt eine konstante Spannungsverteilung über den Querschnitt, was zur Folge hat, daß kein Schnittmoment auftritt. Membranschwingungen können deshalb nur Dehnschwingungen sein, die in den meisten Fällen als Längsschwingungen auftreten. Da bei der Kugelschale die beiden Krümmungsradien konstant sind, schrumpfen die Definitionsbereiche für  $\varphi_1(s)$  und  $\varphi_2(s)$  zu jeweils einer einzigen Zahl zusammen.

$$r_1(s) = r_2(s) = R = \text{const.}$$

$$\varphi_1(s) = \frac{1-\nu^2}{R^2} = \text{const.} \quad (7)$$

$$\varphi_2(s) = \frac{1}{R^2} + \frac{2\nu}{R^2} + \frac{1}{R^2} = \frac{2(1+\nu)}{R^2} = \text{const.}$$

Mit den Parametern der in [2] untersuchten Kugelschale ergibt sich aus (7) für  $\nu = 0,0$

$$\varphi_1 = \Phi_1 = 1,0$$

$$\varphi_2 = \Phi_2 = 2,0$$

und für  $\nu = 0,3$

$$\varphi_1 = \Phi_1 = 0,91$$

$$\varphi_2 = \Phi_2 = 2,6$$

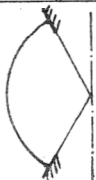
(8)


**Tabelle 1**

Eigenwerte  $\lambda$  der Kugelschale bei unterschiedlicher Lagerung, Querkontraktionszahl und Wandstärke

i	$\nu = 0.0$			$\nu = 0.3$			$\nu = 0.0$
	Membranth.	$\frac{h}{R} = 0.001$	$\frac{h}{R} = 0.01$	Membranth.	$\frac{h}{R} = 0.001$	$\frac{h}{R} = 0.01$	$\frac{h}{R} = 0.01$
1	0.24406	0.25738	0.28942	0.17548	0.18736	0.21712	0.24407
2	0.77902	0.79047	0.81928	0.64264	0.65500	0.68580	0.77941
3	0.90124	0.90857	0.93365	0.78261	0.79117	0.81872	0.90356
4	0.94443	0.94962	0.98544	0.83664	0.84286	0.88001	0.95185
5	0.96444	0.96856	1.0336	0.86254	0.86746	0.93251	0.98280
6	0.97531	0.97903	1.0976	0.87685	0.88122	0.99778	
7	0.98186	0.98570	1.1854	0.88556	0.88992	1.08754	
8	0.98611	0.99058	1.3070	0.89124	0.89613	1.21139	
9	0.98903	0.99469	1.4764	0.89516	0.90115	1.37893	
10	0.99111	0.99862	1.6858	0.89796	0.90570	1.59969	

Lagerung





Folglich existiert bei der Kugelschale kein kontinuierliches Spektrum. Jedoch ist in der Umgebung von  $\varphi_1$  sowohl für  $\nu = 0,0$  als auch für  $\nu = 0,3$  eine sehr starke Häufung der Membraneigenwerte zu verzeichnen, was aus Tabelle 1 ersichtlich ist. Oberhalb von  $\varphi_1 \approx \Phi_1$  vergrößert sich der Abstand der Membraneigenwerte untereinander wieder wesentlich. So liegt der nächstfolgende bei  $\varphi_2 = \Phi_2$ . Er wurde mit  $\lambda_{aM}$  bezeichnet und seine Schwingform stellt eine einfache über den Meridian konstante Aufweitung der Kugel dar, ohne daß dabei eine Tangentialverschiebung irgendeines Schalenelementes auftritt. Auch der darüber liegende Eigenwert  $\lambda_{bM}$  soll noch erwähnt werden (für  $\nu = 0,0$  ist  $\lambda_{bM} = 3,6457$ ). Die zu ihm gehörende Schwingform zeigt eine Bewegung der Kugelschale parallel zur Rotationsachse. Als grobe Näherung kann man hier das Schwingungsmodell auf eine Punktmasse abstrahieren, die an zwei Federn zwischen zwei Einspannungen hin und her schwingt. Die Biegeschwingungen werden besonders durch die Randbedingungen beeinflusst. Das ist deutlich aus Tabelle 1 zu erkennen, wo u. a. für  $\frac{h}{R} = 0,01$  und  $\nu = 0,0$  die ersten

fünf Eigenwerte für verschiedene Lagerungen angegeben wurden, in Spalte 4 für beidseitige Einspannung und in Spalte 8 für eine Membranlagerung der Kugelschale. Während bei der beidseitigen Einspannung die Ergebnisse beträchtlich von denen der Membrantheorie abweichen, sind im zweiten Lagerungsfall die untersten Eigenwerte fast identisch mit den Eigenwerten der Membrantheorie, die in der 2. Spalte von Tabelle 1 aufgeführt sind. Mit zunehmender Ordnung wird aber der Biegeeinfluß stärker, was zu immer größeren Abweichungen zwischen den Ergebnissen beider Theorien führt.

Die Eigenwerte (-frequenzen) der Biegetheorie sind in der Schwingform meistens durch die Normalenverschie-

bung charakterisiert, deren Maximalwerte i. a. etwa um eine Zehnerpotenz größer als die der Tangentialverschiebungen sind. Zwei benachbarte Biegeeigenfrequenzen unterscheiden sich dann dadurch, daß die untere von beiden einen Schwingungsbauch weniger in der Funktion  $w(s, \lambda)$  hat. Völlig aus dem Rahmen dieser Betrachtungsweise fallen die Eigenwerte, die in den Tabellen 2 und 3 stark eingerahmt sind (in Tabelle 3 wurde dieser Frequenzbereich für  $\frac{h}{R} = 0,001$  nicht mehr erreicht). Sie

wurden deshalb auch nicht in der Numerierung berücksichtigt, sondern mit  $\lambda_a$  und  $\lambda_b$  bezeichnet. Außerdem fällt bei einem Vergleich der Zahlenwerte in Tabelle 2 auf, daß sich der Zahlenwert von  $\lambda_a$  und  $\lambda_b$  für sinkendes  $\frac{h}{R}$  fast nicht ändert, während sonst die Zahlenwerte für EW gleicher Ordnung stark absinken; bei diesen beiden tritt sogar ein leichter Anstieg ein.

Eine nähere Untersuchung der Schwingformen ergab, daß es sich bei diesen beiden Eigenwerten offensichtlich um die beiden oben erwähnten Membranschwingungen  $\lambda_{aM}$  und  $\lambda_{bM}$  handelt, die hier aber noch von den jeweils benachbarten Biegeschwingungsformen überlagert werden. Bild 3 zeigt für  $\frac{h}{R} = 0,01$  und  $\nu = 0,0$  den Verlauf

der Schwingformen  $w(s, \lambda)$  von  $\lambda_a$  sowie von den beiden benachbarten EW  $\lambda_{10}$  und  $\lambda_{11}$ . Außerdem ist auch zum Vergleich die Schwingform oder Membranschwingung  $\lambda_{aM}$  mit angegeben. Aus Bild 4 ist der Verlauf von  $u(s, \lambda_{bM})$  und  $w(s, \lambda_{bM})$  zu erkennen. In beiden Bildern wurde die Meridiankrümmung bei der Darstellung nicht mit berücksichtigt. Auf die gleiche Darstellung mit  $\frac{h}{R} = 0,001$  und  $\nu = 0,0$  wurde wegen der schwie-

Tabelle 2

Eigenwerte  $\lambda$  für  $\frac{h}{R} = 0.01$  bzw.  $\frac{h}{R} = 0.001$  und  $\nu = 0.0$

$\frac{h}{R} = 0.01$		$\frac{h}{R} = 0.001$	
i	$\lambda_i$	i	$\lambda_i$
1	0.29842	1	0.25737
2	0.81928	2	0.79047
3	0.93365	3	0.90875
		4	0.94962
		5	0.96856
4	0.98544	6	0.97903
		7	0.98570
		8	0.99058
		9	0.99469
		10	0.99862
		11	1.0027
		12	1.0074
		13	1.0127
		14	1.0189
5	1.0336	15	1.0263
		16	1.0349
		17	1.0451
		18	1.0569
6	1.0967	19	1.0706
		20	1.0864
		21	1.1045
		22	1.1252
7	1.1854	23	1.1486
		24	1.1751
		25	1.2049
		26	1.2382
8	1.3079	27	1.2754
		28	1.3167
		29	1.3625
		30	1.4128
		31	1.4686
9	1.4764	32	1.5292
		33	1.5962
		34	1.6682
10	1.6858	35	1.7484
		36	1.8317
		37	1.9280
a	1.9736	a	1.9794
11	1.9856	38	2.0434
		39	2.1382
12	2.3912	40	2.2605
		41	2.3825
		42	2.5224
13	2.7923	43	2.6642
		44	2.8249
		45	2.9865
		46	3.1714
		47	3.3487
14	3.4073	48	3.5695
b	3.5359	b	3.6069
		49	3.8029

rigen Abbildbarkeit verzichtet, denn dabei hätten den Grundformen von  $w(s, \lambda_p)$  Schwingungen mit 37 bzw. 47 Wellenbäuchen überlagert werden müssen. Der prinzipielle Verlauf ist aber für beide EW derselbe.

Ebenso gilt diese Analogie für  $\nu = 0,3$ .

In Tabelle 4 sind die Zahlenwerte dieser beiden EW, die einerseits nach der Biegetheorie mit verschiedenen Wandstärken und andererseits nach der Membrantheorie er-

halten wurden, gegenübergestellt. Im Gegensatz zu den anderen Biegefrequenzen liegen in den hier betrachteten Fällen die Ergebnisse der Biegetheorie unter denen der Membrantheorie. Die Ursache dafür liegt vermutlich in der Tatsache, daß der Biegeeigenwert, welcher den jeweiligen Membraneigenwert beeinflusst und überlagert, unterhalb dieses Membraneigenwertes liegt und damit den Zahlenwert „nach unten zieht“.

Tabelle 3

Eigenwerte  $\lambda$  für  $\frac{h}{R} = 0.01$  bzw.  $\frac{h}{R} = 0.001$  und  $\nu = 0.3$

$\frac{h}{R} = 0.01$		$\frac{h}{R} = 0.001$	
i	i	i	i
1	0.21712	1	0.18770
2	0.68580	2	0.65500
3	0.81872	3	0.79117
		4	0.84286
		5	0.86748
4	0.88001	6	0.88122
		7	0.88992
		8	0.89613
		9	0.90115
		10	0.90570
		11	0.91027
		12	0.91528
		13	0.92083
5	0.93251	14	0.92729
		15	0.93484
		16	0.94358
		17	0.95386
		18	0.96569
		19	0.97952
6	0.99778	20	0.99536
		21	1.01362
		22	1.03428
		23	1.05767
		24	1.08435
7	1.08754	25	1.11411
		26	1.14742
8	1.21139	27	1.18464
9	1.37893	.	.
10	1.59969	.	.
11	1.89025	.	.
12	2.22540	.	.
a	2.58185		
13	2.70852		
14	3.32341		
15	3.89362		
b	4.56465		

Tabelle 4  
Gegenüberstellung der „Membraneigenwerte“  $\lambda_a$  und  $\lambda_b$  bei Berechnung nach der Membran- und der Biegetheorie

	Membrantheorie	Biegetheorie	
		$\frac{h}{R} = 0.001$	$\frac{h}{R} = 0.01$
$\nu = 0.0$			
$\lambda_a$	2.0000	1.9794	1.9736
$\lambda_b$	1.6457	3.6069	3.5359
$\nu = 0.3$			
$\lambda_a$	2.6000	...	2.58185
$\lambda_b$	...	...	4.56465

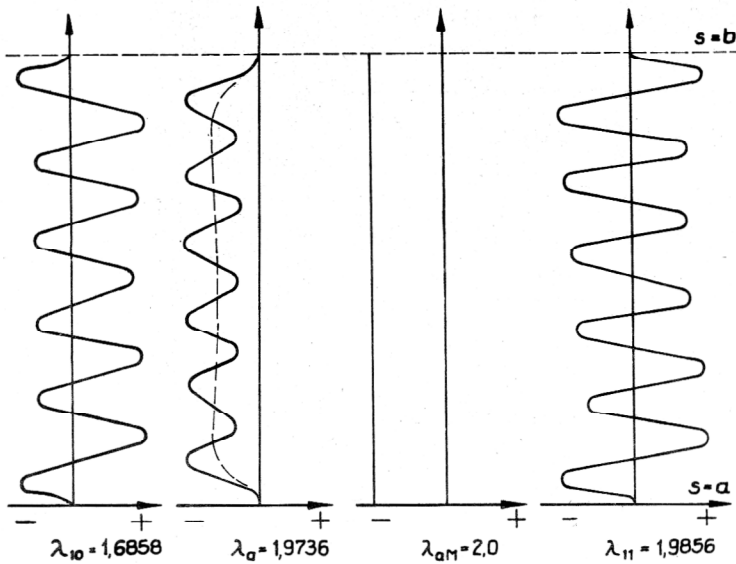


Bild 3

Schwingformen  $w(s, \lambda)$  für  $\frac{h}{R} = 0.01$  und  $\nu = 0.0$   
bei Berechnung nach Membran- und Biegetheorie

L I T E R A T U R

- [1] Aslanjan, A. G.; Lidskij, V. B.; Formula dlja cisla castot osesimmetričnych kolebanij obolocki vrasčenija, DAN, tom. 222, No. 4, 1975 g.
- [2] Weber, M.: Eigenschwingungsberechnung von Rotationschalen, Diplomarbeit, TU Dresden, 1976

Anschrift der Verfasser:

Prof. Dr. rer. nat. habil. G. Landgraf  
TU Dresden  
Sektion Grundlagen des Maschinenwesens  
8027 Dresden, Mommsenstr. 13

Dipl.-Ing. M. Weber  
AdW der DDR  
Institut für Mechanik

1199 Berlin Rudower Chaussee 5

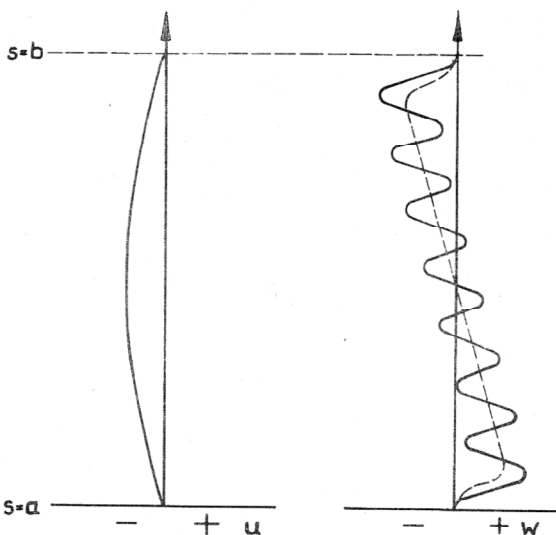


Bild 4

Schwingformen  $u(s, \lambda_b)$  und  $w(s, \lambda_b)$  für  $\frac{h}{R} = 0.01$   
und  $\nu = 0.0$  bei Berechnung nach der Biegetheorie

Aus Tabelle 4 läßt sich ablesen, daß für  $h \rightarrow 0$  die Eigenwerte die Biegetheorie in die der Membrantheorie übergehen, was allerdings im Gegensatz zu den in Tabelle 1 angegebenen Eigenwerten bei  $\lambda_a$  und  $\lambda_b$  mit einem leichten Anstieg der Zahlenwerte verbunden ist. Für diese scheinbar widersprüchliche Tendenz gibt es eine Erklärung. Mit sinkendem  $h$  rücken die Biegeeigenwerte immer dichter zusammen und somit wird die Differenz zwischen dem Membraneigenwert und einem sie beeinflussenden Biegeeigenwert immer kleiner, was ein geringeres Absinken des Membraneigenwertes in der Biegetheorie zur Folge hat.

2.2. Einfluß der Wandstärke auf die Eigenwerte

Für die Berechnung der EW nach der Membrantheorie spielt die Wandstärke keine Rolle, da hier Trägheitskräfte-

te und Normalschnittkräfte am Schalelement in einem dynamischen Gleichgewicht stehen, d. h. bei einer Veränderung der Wandstärke verändern sich beide Größen proportional zueinander, so daß das Gesamtgleichgewicht am Element nicht gestört wird.

Folglich ändern sich auch die EW nicht. Bei der Eigenwertberechnung nach der Biegetheorie bewirkt eine Verringerung der Wandstärke auch das Absinken der Biegeeigenwerte. Das resultiert daraus, daß das Schnittmoment mit  $h^3$  verknüpft ist, während die Trägheitskraft nur linear von  $h$  abhängig ist, so daß keine Proportionalität zwischen dem Schnittmoment und der Trägheitskraft auftreten kann.

Mechanisch gesehen kann man das Absinken auch in Analogie zum Feder-Masse-System erklären. Bei einer Verminderung von  $h$  wird die Schalenwand als Biegefeder weicher und verstimmt damit das System zu niedrigeren Werten.

Unterhalb von  $\Phi_1$  gehen für  $h \rightarrow 0$  die Biegeeigenwerte in die der Membrantheorie über, d. h. im Spannungszustand wird der Biegeanteil gegenüber dem Dehnungsanteil vernachlässigbar klein. Aus Tabelle 1 ist diese Tendenz deutlich herauszulesen.

3. Schlußbemerkung

Aus den im Rahmen dieser Arbeit vorgestellten Ergebnissen kann man schlußfolgern, daß die „Membraneigenwerte“, d. h. Eigenwerte, die durch ihre Schwingform im wesentlichen als Längs- und Dehnschwingungen charakterisiert sind, oberhalb einer Schranke  $\beta_1$  auch bei der Rechnung nach der Biegetheorie wertmäßig erhalten bleiben, praktisch unabhängig von der Wandstärke  $h$  sind und nur von der jeweils darunter liegenden Biegeschwingung beeinflusst werden. Die Schranke  $\beta_1 = \sup \varphi_1(s)$  kann nach [1] charakterisiert werden als oberer Begrenzungswert des kontinuierlichen Spektrums der Membrantheorie.

Damit treten bei Rotationsschalen Schwingformen auf, wie sie von der Balken- und Plattentheorie her nicht bekannt sind.