

Zur Berechnung von Strömungsvorgängen viskoelastischer Medien in Durchströmbauteilen

Stefan Meinel

0. Einleitung

In zahlreichen Herstellungs- und Verarbeitungsprozessen spielen Strömungen hochviskoser Medien eine wichtige Rolle. Die Produktivität und der Energiebedarf entsprechender industrieller Anlagen und die Qualität von Erzeugnissen wird von den Strömungsvorgängen mitbestimmt.

Die umfassende strömungsmechanische Untersuchung von Fließvorgängen hochviskoser Substanzen ist meist kompliziert. So weisen die in Betracht kommenden Medien häufig nicht-Newtonsches Viskositätsverhalten und viskoelastische Eigenschaften auf. Die dissipierte Wärme nimmt in vielen Fällen merklichen Einfluß auf den Strömungsvorgang. Die Form der Berandung des Strömungsgebietes sowie mögliche Zeitabhängigkeit der Vorgänge kann die Berücksichtigung von zwei, drei und sogar vier unabhängigen Variablen erfordern. Bei der Schaffung strömungsmechanischer Berechnungsverfahren werden daher zielgerichtet Modelle für die Strömung hochviskoser Medien betrachtet, die bestimmten ins Auge gefaßten Einflußfaktoren gerecht werden, andere dagegen vernachlässigen [1]. Es werden die prinzipiellen Wirkungen der verschiedenen physikalischen Parameter geklärt und die Probleme bei der mathematischen Beschreibung der Einflüsse untersucht. In der Perspektive gestattet dies, den realen Strömungsvorgängen weitgehend entsprechenden Modelle zu beherrschen.

1. Voraussetzungen und Vereinfachungen der Grundgleichungen

Es werden stationäre Strömungen betrachtet, an die folgende Voraussetzungen gestellt sind:

- Die Flüssigkeit ist homogen, inkompressibel und erfüllt die Haftbedingung an festen Begrenzungsflächen.
- Das rheologische Verhalten wird durch ein Stoffgesetz zweiter Ordnung

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \alpha_1 D_{ij} + \alpha_2 D_{ik} D_{kj} + \alpha_3 \left(v_k \frac{\partial D_{ij}}{\partial x_k} + W_{ik} D_{kj} - D_{ik} W_{kj} \right) \quad (1)$$

$$\alpha_1 = \alpha_1 (\Pi_D), \quad \Pi_D = D_{ik} D_{ki},$$

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad W_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)$$

für viskoelastische Medien beschrieben.

- Thermische Einflüsse auf den Strömungsvorgang bleiben unberücksichtigt.
- Die Trägheitsglieder in der Bewegungsgleichung können vernachlässigt werden.

Es sei hier vermerkt, daß, vor allem in der Plastverarbeitung, schleichende Fließvorgänge (Bed. d) mit hoher spezifischer Dissipationsleistung auftreten und die Bedingung c) in solchen Fällen sehr einschränkend ist. Demgegenüber treten in der chemischen Industrie (z. B. bei der Filmherstellung) Strömungsprozesse hochviskoser Medien auf, die unter der Bedingung konstanter Temperatur ablaufen.

Das zugrunde gelegte Stoffgesetz erlaubt, die Existenz zweier Normalspannungsdifferenzen in der Scherströmung und damit im Zusammenhang stehende Erscheinungen (Strangaufweitung, Weissenbergeffekt, Sekundärströmungen) zu erfassen. Außerdem gestattet die explizite Darstellung (1) das Einsetzen in die Bewegungsgleichung und vereinfacht damit die mathematisch-numerische Bearbeitung des Randwertproblems. Andererseits ist (1) ungeeignet für die Modellierung eines „langen Gedächtnisses“ viskoelastischer Medien. Es muß daher über die Flüssigkeit und über den Strömungsvorgang vorausgesetzt werden, daß die Relaxationszeiten klein sind gegenüber den Zeitintervallen, in denen wesentliche Änderungen der Deformationsgeschwindigkeit an den Teilchen stattfinden.

Ein praktisches Problem für die Anwendung der rheologischen Zustandsgleichung (1) ist die Bereitstellung der Materialparameter α_2 und α_3 . Sie können mit Hilfe der 1. und 2. Normalspannungsdifferenz ermittelt werden, doch ist die Messung beider Größen mit dem Rheogoniometer noch problematisch. In einem späteren Beitrag wird dargelegt, wie aus Wandnormalspannungsmessungen in speziellen Durchströmbauteilen Aussagen über die Parameter α_1 , α_2 , α_3 gewonnen werden können.

2. Zum mathematischen Randwertproblem für Durchströmbauteile

Bei Abwesenheit eines äußeren Kraftfeldes lauten die Grundgleichungen der Kontinuität und des Impulssatzes:

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0 \quad (2)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} [\alpha_1 D_{ik} + \alpha_2 D_{ij} D_{jk} + \alpha_3 \left(v_j \frac{\partial D_{ik}}{\partial x_j} + W_{ij} D_{jk} - D_{ij} W_{jk} \right)] = 0 \quad (3)$$

(Im folgenden immer: $i = 1, 2$ oder räumlich $i = 1, 2, 3$). Hinzu treten Randbedingungen am Eintritt (S_E), am Austritt (S_A) und an der Wand (S_M) des durchströmten Bauteils (Bild 1, 2).

$$v_i = 0 \quad \text{auf } S_M \quad (4)$$

$$v_i = v_{Ei} \quad \text{auf } S_E \quad (5)$$

$$v_i = v_{Ai} \quad \text{auf } S_A \quad \text{oder} \quad (6a)$$

$$\sigma_{ij} n_j = N_i \quad \text{auf } S_A \quad (6b)$$

(n_j Komponenten d. Normalenvektors, N_i vorgegebene Funktionen).

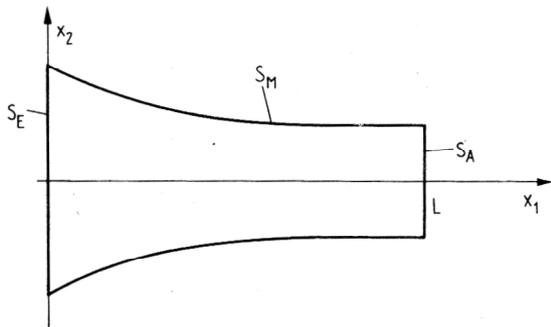


Bild 1
Ebenes Durchströmteile

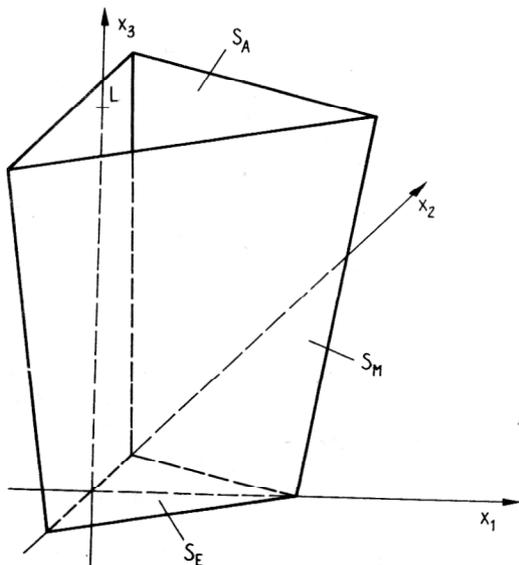


Bild 2
Räumliches Durchströmteile

Die Haftbedingung (4) und die Vorgabe einer Zuflussbedingung (5) sollen hier nicht diskutiert werden. Zur Gewährleistung der Eindeutigkeit der Lösung von (2), (3) muß weiterhin eine Randbedingung der Form (6a) oder (6b) vorliegen.

Dies ist wenig problematisch, wenn, wie in der Literatur meist vorausgesetzt, ein ausgebildetes Geschwindigkeitsprofil im Austritts- bzw. Endquerschnitt angenommen werden kann.

Bei „kurzen“ Bauteilen oder durch die Wirkung von Querschnittsänderung (auch durch einen nachfolgend

austretenden Freistrahle) kann der Fall eintreten, daß das Strömungsfeld im Querschnitt S_A nicht bekannt ist. Dann ist es angezeigt, die erforderlichen Größen experimentell zu ermitteln oder das Lösungsgebiet der Randwertaufgabe so zu erweitern, daß determinierte Randbedingungen angenommen werden können.

Die (willkürliche) Vorgabe von Randwerten auf S_A beeinflusst wesentlich die Lösung der Randwertaufgabe. Untersuchungen von Litvinov [2] an konvergenten Kanälen erbringen z. T. physikalisch sinnvolle Geschwindigkeitsfelder (Annahme: $N_i = 0$). Bei veränderter Kanalgeometrie werden mit denselben Randwerten völlig unbrauchbare Ergebnisse berechnet.

Verzichtet man a priori auf die Festlegung einer Randbedingung, führt dies bei Anwendung numerischer Lösungsverfahren zur Erfüllung von natürlichen Randbedingungen. Diese Vorgehensweise setzt im allgemeinen voraus, daß die so erhaltenen Bedingungen bekannt und für das betrachtete Problem sinnvoll sind.

Bei eigenen numerischen Rechnungen wurde anstelle (6a) bzw. (6b) der Druck auf S_A vorgegeben:

$$p = p_A \quad \text{auf } S_A \quad (6c)$$

Wie sich zeigt, gewährleisten (4), (5) und (6c) die Eindeutigkeit der Lösung von (2) und (3) nicht, so daß auch hier eine natürliche Bedingung hinzutritt.

3. Analytische und numerische Strömungsuntersuchungen für konstante Stoffparameter $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

Die Voraussetzung konstanter Werte $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ bewirkt Vereinfachungen in (2) und (3), die die numerische Behandlung erleichtern und in einigen Fällen analytische Lösungen gestatten. Andererseits wird die Anpassungsfähigkeit von (1) an das rheologische Verhalten realer Fluide beeinträchtigt.

3.1. Ebene Strömungsvorgänge

Wie man zeigen kann, genügt es bei ebenen Strömungen anstelle von (2) und (3) die Lösung des Stokesschen Problems

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0 \quad (7)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\alpha_1}{2} \Delta v_i = 0$$

mit entsprechenden Randbedingungen zu finden (Tanners Theorem, siehe [3]).

Das Geschwindigkeitsfeld ist von den Konstanten α_2 und α_3 nicht abhängig. Der vollständige Spannungstensor kann mittels (1) berechnet werden.

Eine Diskussion analytischer Lösungen von (7) und der zugehörigen Spannungsfelder führt Aberspach [4].

Für die Lösung des Stokesschen Problems existieren andererseits auch leistungsfähige numerische Algorithmen [7].

3.2. Ausgebildete Strömungen

Für die in axialer Richtung ausgebildeten Strömungen in zylindrischen Durchströmbauteilen (Bauteile mit konstantem Querschnitt, siehe Bild 3) existiert für konstante Stoffwerte α_i eine Lösung der Gleichungen (2), (3) in der Form

$$v_1 = v_2 = 0$$

$$v_3 = v(x_1, x_2)$$

$$p = \tilde{p}(x_1, x_2) - cx_3.$$

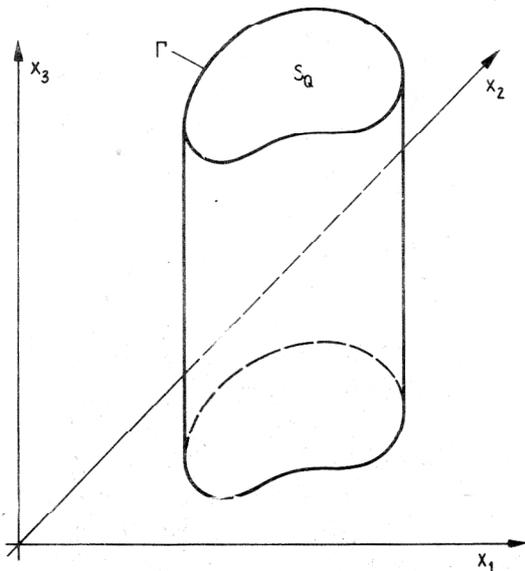


Bild 3

Für die Funktion $v(x_1, x_2)$ ist die Randwertaufgabe (8) in der Querschnittsfläche S_Q zu lösen.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} = -\frac{2c}{\alpha_1} \quad (8)$$

$$v = 0 \text{ auf } \Gamma$$

$\tilde{p}(x_1, x_2)$ kann leicht aus den Bewegungsgleichungen in den Richtungen x_1 und x_2 ermittelt werden.

Außer numerischen Verfahren kommen für die Lösung von (8) durchaus auch analytische Lösungsprinzipien in Betracht. So kann (8) durch die Transformation

$$f(x_1, x_2) = \frac{\alpha_1 v(x_1, x_2)}{c} + \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}$$

in eine Randwertaufgabe der Laplacegleichung (9) überführt werden, für die verschiedene Lösungswege (z. B. konforme Abbildung) bereitstehen.

$$\Delta f = 0$$

$$f = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \text{ auf } \Gamma. \quad (9)$$

Für spezielle Querschnitte S_Q können geschlossene Lösungen von (8) angegeben werden:

Gleichseitiges Dreieck (Bild 4 a):

$$v = \frac{\sqrt{3} c}{2\alpha_1 g} \left(g^2 x_1 - \frac{2\sqrt{3}}{3} g x_1^2 + \frac{1}{3} x_1^3 - x_1 x_2^2 \right).$$

Rechteck (Bild 4 b):

$$v = \frac{32c}{\alpha_1 \pi^4} \sum_{i=1,3,5}^{\infty} \sum_{j=1,3,5}^{\infty} \frac{\sin \frac{i\pi x_1}{a} \sin \frac{j\pi x_2}{b}}{ij \left(\frac{i^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2} \right)}$$

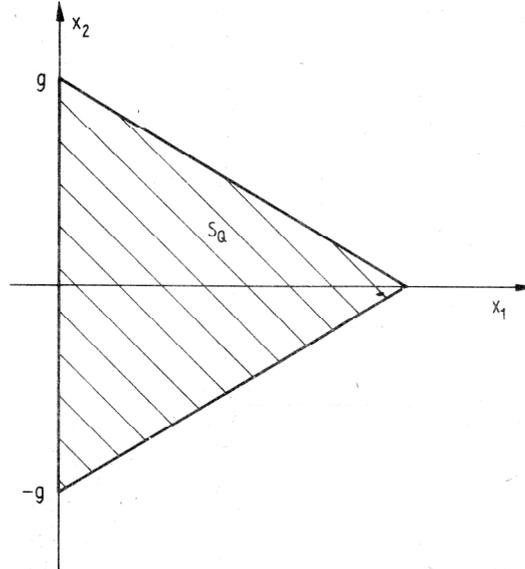


Bild 4 a

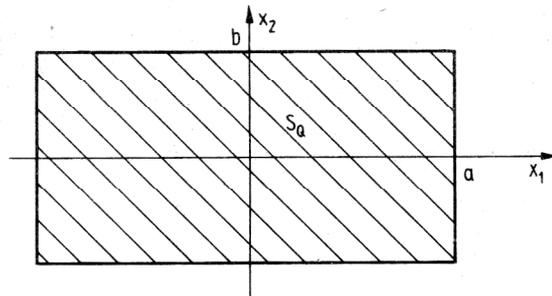


Bild 4 b

Die Verteilung $\tilde{p}(x_1, x_2)$ des isotropen Druckes im Querschnitt S_Q ergibt sich durch einfache Integration der Bewegungsgleichungen in den Richtungen von x_1 und x_2 . $\tilde{p}(x_1, x_2)$ ist dabei eine Funktion des Ausdruckes $\frac{\alpha_2}{4} + \frac{\alpha_3}{2}$, der im Stoffgesetz (1) ein Maß für die 2. Normalspannungsdifferenz darstellt [3].

3.3. Numerische Lösung

Neben den soeben diskutierten einfacheren Fällen besteht die Möglichkeit, für die Lösung von (2) und (3) numerische Verfahren einzusetzen. Die im folgenden beschriebene Vorgehensweise [3] richtet sich auf die Ermittlung des Geschwindigkeitsfeldes \vec{v} und des Druckes p für konstante Parameter $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ und Randbedingungen (4), (5) und (6 c).

Bei Abhängigkeit des Geschwindigkeitsfeldes von den viskoelastischen Gliedern muß die Bewegungsgleichung

(3) linearisiert werden. Als Vorschrift zur Bildung einer Folge von Näherungslösungen kann

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_k^{(n+1)}}{\partial x_k} &= 0 \\ - \frac{\partial p^{(n+1)}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\alpha_1 D_{ik}^{(n+1)}) & \quad (10) \\ + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} [\alpha_2 D_{ij}^{(n)} D_{jk}^{(n)} + \alpha_3 (v_j^{(n)} \frac{\partial D_{ik}^{(n)}}{\partial x_j} + W_{ij}^{(n)} D_{jk}^{(n)} - D_{ij}^{(n)} W_{jk}^{(n)})]}_{f_i^{(n)}} &= 0 \end{aligned}$$

Verwendung finden. Wie numerische Untersuchungen zeigten, konvergiert der Iterationsprozess bei hinreichend guter Startnäherung und wenn die Werte α_2 und α_3 in der Größenordnung von α_1 oder kleiner bleiben.

Die auf dem Verfahren von Newton-Kantorowitsch beruhende kompliziertere Iterationsvorschrift (11) erbrachte bezüglich der Konvergenz keine deutlichen Vorteile, erfordert aber weitaus höheren numerischen Aufwand [3].

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_k^{(n+1)}}{\partial x_k} &= 0 \\ - \frac{\partial p^{(n+1)}}{\partial x_i} + \frac{\alpha_1}{2} \Delta v_i^{(n+1)} + \frac{\partial}{\partial x_k} [\alpha_2 (D_{ij}^{(n)} D_{jk}^{(n+1)} + D_{ij}^{(n+1)} D_{jk}^{(n)} - D_{ij}^{(n)} D_{jk}^{(n)})] & \\ + \alpha_3 (v_j^{(n)} \frac{\partial D_{ik}^{(n+1)}}{\partial x_j} + v_j^{(n+1)} \frac{\partial D_{ik}^{(n)}}{\partial x_j} - D_{ij}^{(n+1)} W_{jk}^{(n)} - D_{ij}^{(n)} W_{jk}^{(n+1)} + W_{ij}^{(n+1)} D_{jk}^{(n)} & (11) \\ + W_{ij}^{(n)} D_{jk}^{(n+1)} - v_j^{(n)} \frac{\partial D_{ik}^{(n)}}{\partial x_j} + D_{ij}^{(n)} W_{jk}^{(n)} - W_{ij}^{(n)} D_{jk}^{(n)})] &= 0 \end{aligned}$$

Die linearisierte Differentialgleichung (10) kann in eine Variationsaufgabe überführt werden:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\frac{\alpha_1}{2} \frac{\partial v_k^{(n+1)}}{\partial x_j} \frac{\partial v_k^{(n+1)}}{\partial x_j} + 2 v_k^{(n+1)} f_k^{(n)} + 2 v_k^{(n+1)} \frac{\partial p^{(n+1)}}{\partial x_k} \right) dV & (12) \\ + \int_{S_E} p^{(n+1)} v_{E_n} dS & \longrightarrow \text{Extr.} \end{aligned}$$

Die Randbedingungen (4), (5) und (6c) werden in den Ansätzen für die gesuchten Funktionen (13) verankert.

$$v_i = \sum_{k=1}^{n_i} a_k^{(i)} \phi_k^{(i)} + v_{E_i} \quad p = \sum_{k=1}^{n_4} a_k^{(4)} \phi_k^{(4)} + p_A \quad (13)$$

Die Euler-Lagrangeschen Gleichungen von (12) sind identisch mit (10). Bei der Extremwertbildung (12) ergibt sich außerdem die natürliche Randbedingung

$$\frac{\partial v_i}{\partial n} = 0 \quad \text{auf } S_A \quad (14)$$

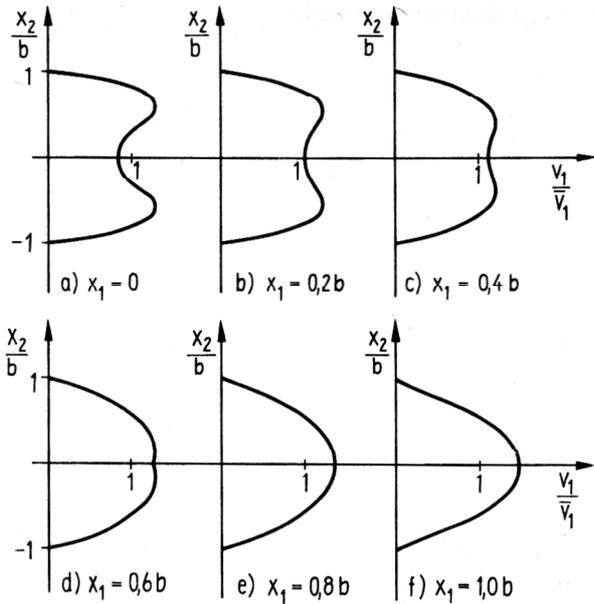


Bild 5
Entwicklung eines Geschwindigkeitsprofils im ebenen Kanal

Als Koordinatenfunktionen $\phi_k^{(i)}$ wurden im gesamten Lösungsgebiet definierte Polynome eingesetzt, die gewisse homogene Randbedingungen erfüllen. Der Rand des betrachteten Gebietes muß stückweise durch Polynome darstellbar sein und darf keine einspringenden Kanten enthalten.

Die Wahl dieses Funktionensystems erleichtert wesentlich die rechentechnische Realisierung von Operationen (Multiplikationen, Differentiationen, Integrationen) mit den Koordinatenfunktionen. Es ist außerdem bekannt, daß sich Polynome gut zur Darstellung ausgebildeter Geschwindigkeitsprofile eignen [5], [10]. Dies wird durch die Ergebnisse der Einlaufrechnung im ebenen Kanal (Bild 5) und im Kanal mit Dreiecksquerschnitt (Bild 6) unterstrichen. Bezüglich der Einlauflänge stimmen sie

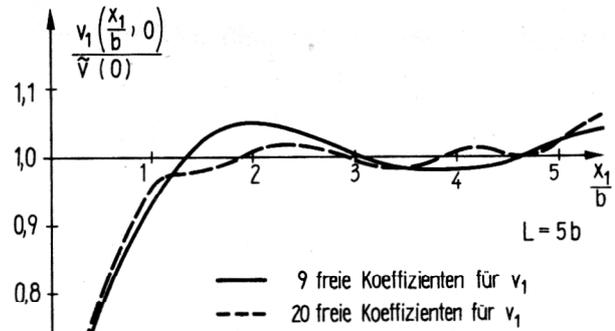


Bild 7
Zur Approximation der Einlauf- und ausgebildeten Strömung auf der Symmetrieachse eines ebenen Kanals durch Polynomansätze

$$\tilde{v}\left(\frac{x_2}{b}\right) = \frac{3}{2} \frac{\dot{V}}{2b} \left(1 - \frac{x_2^2}{b^2}\right)$$

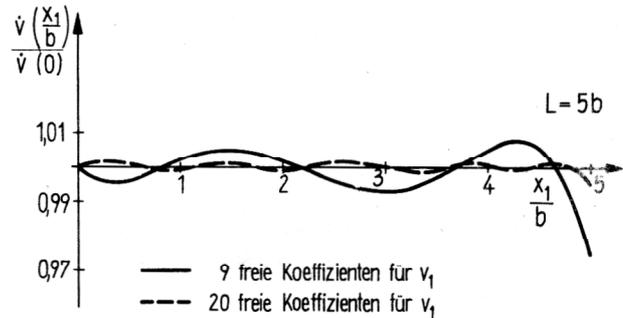


Bild 8
Die Approximation der Konstanz des Volumenstromes längs der Achse eines ebenen Kanals

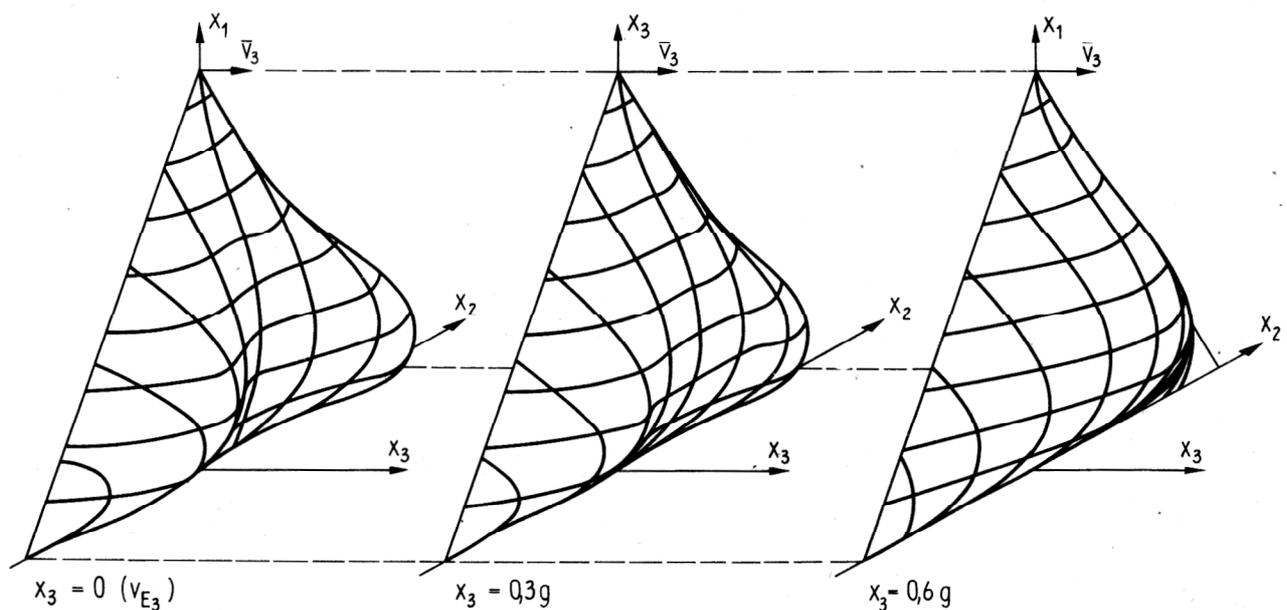


Bild 6
Verteilung der Geschwindigkeitskomponente v_3 in Querschnitten eines räumlichen Bauteils (Querschnittsfläche siehe Abb. 4 a)

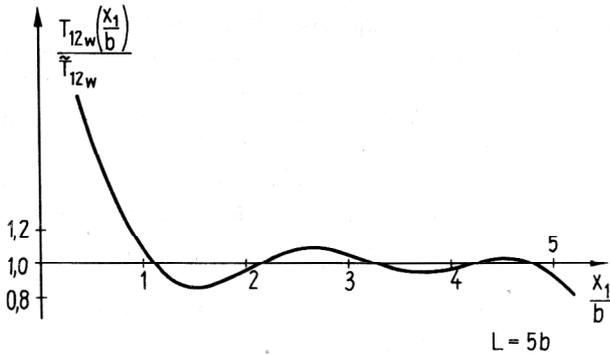


Bild 9
Verlauf der Wandschubspannung (bezogen auf T_{12w} der ausgebildeten Strömung) berechnet aus einer Geschwindigkeitsverteilung, die mit 25 Koeffizienten $a_k^{(1)}$ für v_1 bestimmt wurde

auch quantitativ gut mit bekannten Ergebnissen der Literatur [13] überein.

In Kanalachsenrichtung treten (im Bereich der ausgebildeten Strömung) in unterschiedlichem Maße Approximationsfehler zutage (Bilder 7 bis 9). Die Geschwindigkeitsverteilung (Bild 7) und auch der Druck können mit höherem Grad der Ansatzfunktionen zunehmend besser approximiert werden. Während integrale Größen, wie der Volumenstrom, sehr genau angenähert sind (Bild 8), ist bei der Berechnung der Deviatorspannungen ein starker Verlust an Genauigkeit zu verzeichnen (Bild 9). Da sich die Approximation der Spannungen mit steigendem Grad der Ansatzpolynome nur zögernd verbessert, ist damit eine gewisse Grenze des diskutierten Rechenverfahrens markiert.

Die Approximation des Druckes in (12) erfolgt vorteilhaft mit Ansätzen, die einen um eins niedrigeren Grad als die des Geschwindigkeitsfeldes aufweisen.

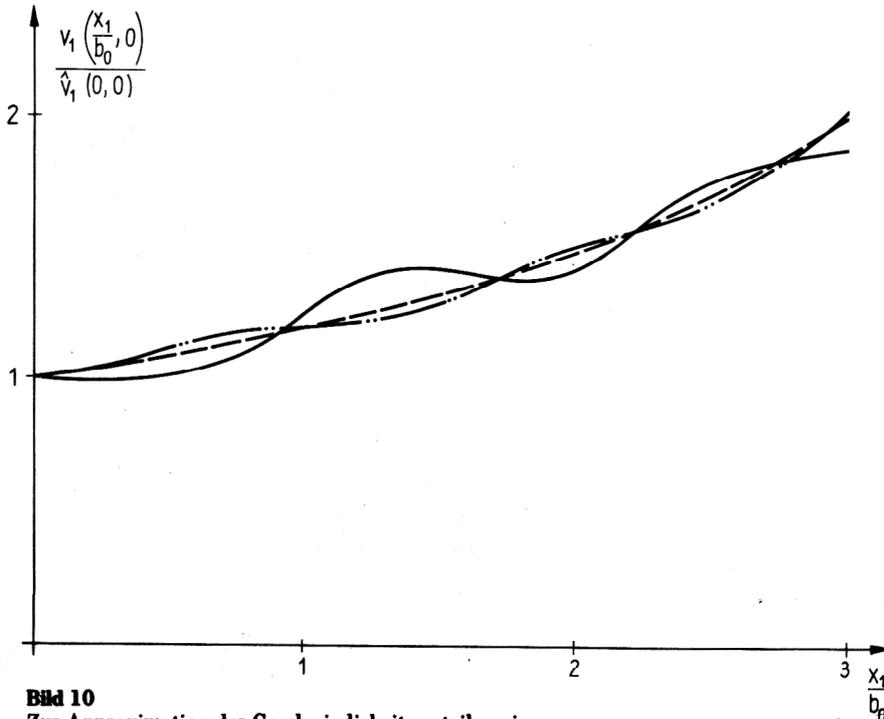


Bild 10
Zur Approximation der Geschwindigkeitsverteilung im konvergenten Kanal (exakte Lösung: gestrichelte Linie) durch die Variationsmethode (12) (durchgezogene Linie) und das Galerkinverfahren (15) (strichpunktierte Linie)

Bei den in den Abbildungen 5 ... 9 betrachteten Beispielen handelt es sich um solche Fälle, für die im Endquerschnitt S_A der Zustand ausgebildeter Strömung vorliegt und die Randbedingung (14) berechtigt ist. Für die Berechnung von Strömungen in konvergenten Kanälen eignet sich die Bedingung (14) nicht. Im numerischen Ergebnis äußert sich dies durch physikalisch unsinnige Verläufe der berechneten Feldgrößen (Bild 10, durchgezogene Kurve).

Um die natürliche Randbedingung (14) zu vermeiden, kann anstelle der Variationsaufgabe (12) das Galerkinverfahren eingesetzt werden. Mit den Ansätzen (13) entsteht das lineare Gleichungssystem (15) für die Koeffizienten $a_k^{(i)}$ der $(n + 1)$ ten Näherung.

$$\int_{\Omega} \phi_s^{(i)} \left[\frac{\alpha_1}{2} \Delta (a_k^{(i)} \phi_k^{(i)}) - \frac{\partial (a_k^{(4)} \phi_k^{(4)})}{\partial x_i} + \hat{f}_i \right] dV = 0 \quad (15)$$

$s = 1, \dots, n_i;$

$$\int_{\Omega} \phi_s^{(4)} \left[\sum_{i=1}^3 \frac{\partial (a_k^{(i)} \phi_k^{(i)})}{\partial x_i} + \hat{f}_4 \right] dV = 0$$

$s = 1, \dots, n_4 .$

Ein Vergleich dieses Systems mit dem aus (12) resultierenden Gleichungssystem zeigt, daß bestehende Unterschiede bei Gültigkeit von (14) verschwinden. Andererseits können durch die Aufhebung der natürlichen Randbedingung (14) auch im konvergenten Kanal sinnvolle Geschwindigkeitsverteilungen berechnet werden (B. 10).

Es gelang jedoch nicht, die für das Galerkinverfahren (15) notwendigerweise ebenfalls existierende natürliche Randbedingung auf theoretischem Wege aufzufinden.

4. Strömungsberechnungen für nicht konstante Parameter $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ im Stoffgesetz (1)

Zahlreiche experimentelle Untersuchungen viskoelastischer Medien, sowohl von Polymerlösungen als auch von Schmelzen, geben Auskunft über Fließkurvenverläufe und Normalspannungsdifferenzen. Bezieht man die Ergebnisse auf das Stoffgesetz (1), so zeigt sich, daß im praktischen Falle die Konstanz der Werte α_i oft nicht gewährleistet ist, sondern $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ Funktionen der 2. Invarianten des Deformationsgeschwindigkeitstensors sind.

Bei der Entwicklung von Berechnungsverfahren für diese Aufgabenklasse erwies es sich als nachteilig, daß (aufgrund meßtechnischer Probleme bei der Bestimmung der 2. Normalspannungsdifferenz) keine reproduzierbaren Verläufe von $\alpha_2(\Pi_D)$ und $\alpha_3(\Pi_D)$ verfügbar waren. In der Literatur werden insbesondere zwei wichtige Spezialfälle behandelt, auf die abschließend kurz eingegangen wird:

4.1. Ausgebildete Strömung in zylindrischen Bauteilen

Für die axial ausgebildete Strömung in zylindrischen Durchströmbauteilen sei ein Koordinatensystem entsprechend Abb. 3 eingeführt. Ein Geschwindigkeitsfeld der Form

$$\begin{aligned} v_1 &= v_2 = 0 \\ v_3 &= v(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (16)$$

als Lösung von (2) und (3) und damit geradlinige Bewegung der Flüssigkeitsteilchen kann nur auftreten, wenn mindestens eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist [8], [3]:

- Die Querschnittsfläche ist rotationssymmetrisch.
- Die Querschnittsfläche S_Q ist ein (unendlicher) Parallelstreifen, d. h. es handelt sich beim Bauteil um den ebenen Kanal.
- Es besteht der Zusammenhang

$$\frac{\alpha_2(\Pi_D)}{4} + \frac{\alpha_3(\Pi_D)}{2} = \text{konst.} \quad (17)$$

Die Bedingung (17) an die Stoffkoeffizienten kann mit den vorliegenden experimentellen Ergebnissen nicht bestätigt werden. Man muß daher schlußfolgern, daß in Bauteilen, die weder rotationssymmetrisch noch eben sind, Strömungsfelder der Form (16) nicht auftreten, d. h. die Flüssigkeitsteilchen sich nicht auf geraden Bahnen bewegen. Diesen physikalisch nicht sofort einleuchtenden Effekt wies 1967 Semjonov [9] auch experimentell in einer Plastschmelze nach und lieferte damit ein wesentliches Argument für die Anwendbarkeit des expliziten Stoffgesetzes (1) auf reale viskoelastische Medien.

Die numerische Lösung des Randwertproblems wurde von Litvinov und Mitarbeitern (z. B. [5], [6]) für verschiedene Querschnitte (Dreieck, Rechteck) erbracht.

Mit dem verwendeten Verfahren, das der in 3.3. beschriebenen Vorgehensweise ähnlich ist, werden hohe Genauigkeiten erreicht. In den Querschnittsflächen S_Q ergaben sich Stromlinienbilder für die Geschwindigkeitskomponenten v_1 und v_2 , wie sie in Bild 11 wiedergegeben sind. Die absolute Größe dieser Komponenten liegt bei dem betrachteten Medium (Lösung von Hydroxyl-ethylzellulose) jedoch unter 1 % der mittleren Geschwindigkeit in axialer Richtung. Auch der berechnete Einfluß von $\alpha_2(\Pi_D)$ und $\alpha_3(\Pi_D)$ auf die Komponente $v_3(x_1, x_2)$ bleibt in der ausgebildeten Strömung gering.

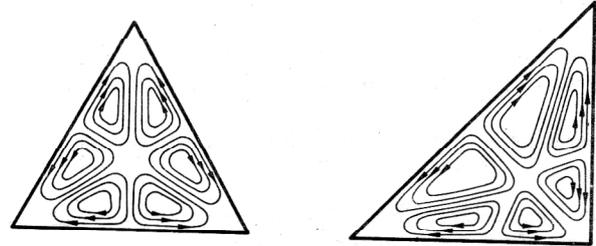


Bild 11
Stromlinienfeld der Quergeschwindigkeitskomponenten v_1 und v_2 in Kanälen mit Dreiecksquerschnitt [6]

4.2. Strömungen in ebenen konvergenten Kanälen

Theoretische und experimentelle Untersuchungen an ebenen konvergenten Kanälen unter Zugrundelegung des Stoffgesetzes (1) führten erstmals Han und Mitarbeiter [11], [12] durch.

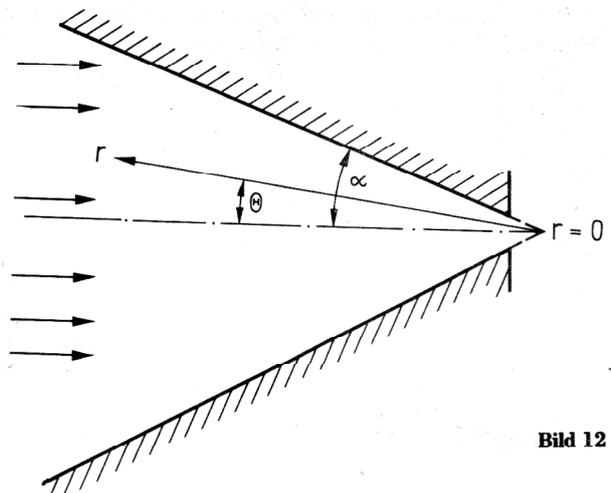


Bild 12

Zur Vereinfachung der numerischen Analyse setzen sie in einer Bauteilgeometrie entsprechend Bild 12 einschränkend ein Geschwindigkeitsfeld der Form

$$v_r = \frac{f(\Theta)}{r} \quad (18)$$

$$v_\Theta = 0$$

voraus. Weiterhin werden spezielle Potenzansätze (19) für die Verteilung der Materialfunktionen eingeführt:

$$\alpha_1 = c_1 \Pi_D^{\frac{n}{2}}$$

$$\alpha_2 = c_2 \Pi_D^{\frac{n-1}{2}} \quad (19)$$

$$\alpha_3 = c_3 \Pi_D^{\frac{n-1}{2}}$$

Die in (19) erkennbare Kopplung der Funktionen α_i wird durch Experimente Han's mit Plastschmelzen weitgehend bestätigt.

Das Geschwindigkeitsfeld wird iterativ mit einem Differenzenverfahren ermittelt, wobei nur gewöhnliche Differentialgleichungen auftreten.

Die Ergebnisse zeigen, daß in dieser Kanalgeometrie die Stoffparameter α_2 (Π_D) und α_3 (Π_D) merklichen Einfluß auf die Fließfelder besitzen.

Ein nach unserer Ansicht beträchtlicher Mangel der Untersuchungen besteht darin, daß durch die Voraussetzung (18) keine zutreffende Beschreibung der Strömung an Ein- und Austritt der relativ kurzen Bauteile möglich ist. Beim Vergleich der Rechenergebnisse mit Wandnormalspannungsmessungen (Plastschmelzen: Polystyren, Polypropylen, Hochdichtes Polypropylen) treten daher beträchtliche Abweichungen, besonders in der Nähe des Austrittsquerschnitts, auf.

LITERATUR

- [1] Rumpel, H.: Strömungen hochviskoser Newtonscher und nicht-Newtonscher Flüssigkeiten. *Techn. Mechanik* 2 (1981), 1.
- [2] Litvinov, V. G.: Dvizenie nelinejno vjazkoj zidkosti v konuse. In: *Problema teplo i massoperenosa*. Izd. Energija, Moskva 1970.
- [3] Meinel, S.: Ein Beitrag zur Untersuchung zwei- und dreidimensionaler Strömungen hochviskoser viskoelastischer Medien in Durchströmbauteilen. 1981 an der TH Karl-Marx-Stadt eingereichte Dissertationsschrift.
- [4] Aberspach, H.: Beitrag zum Fließen hochviskoser Medien in Durchströmbauteilen mit Zentralkörper. Diss., TH Karl-Marx-Stadt 1977.
- [5] Litvinov, V. G.: Tecenie nelinejnoj vjazko-uprugoj zidkosti v cilindreskich kanalach. *Mech. Pol.* (1968), 6.
- [6] Litvinov, V. G.; Goncareno, V. M.: Dvizenie nelinejnoj vjazko-uprugoj zidkosti v cilindreskich kanalach treugol'nogo secenija. *Mech. Pol.* (1974), 2.
- [7] Glowinski, R.; Pironneau, O.: On Numerical Methods for the Stokes Problem. In: *Energy Methods in Finite Element Analysis*. Wiley & Sons 1979.
- [8] Ledvin, N. K.; Fridman, M. L.; Malkin, A. J.; Vacagin, K. D.: Tecenie vjazko-uprugich termoplastichnich zidkostej v profilirujuscich kanalach ekstrusionnych golovok. *Mech. Pol.* (1977), 6.
- [9] Semjonov, V.: Sekundärströmungen hochpolymerer Schmelzen in einem Rohr von elliptischem Querschnitt. *Rheol. Acta* (1967), 2.
- [10] Schechter, R. S.: *The Variational Method in Engineering*. Mc. Graw-Hill, 1967.
- [11] Han, C. D.: Flow of Viscoelastic Polymeric Melts through Converging Ducts. *Rheol. Acta* 14 (1975).
- [12] Han, C. D.; Drexler, H.: Studies of Converging Flows of Viscoelastic Polymeric Melts. *Journ. Appl. Pol. Sci* 17 (1973).
- [13] Atkinson, B.; Brocklebank, M. P.; Card, C. C. H.; Smith, J. M.: Low Reynolds Number Developing Flows. *AIChE Journal* (1969).

Anschrift des Verfassers:
 Dipl.-Math. Stefan Meinel
 Technische Hochschule
 Sektion Maschinen-Bauelemente
 9010 Karl-Marx-Stadt
 PSF 964