

# Behandlung der Kraftübertragung zwischen parallelen elastischen Scheiben durch Integralgleichungen

P. Pfau

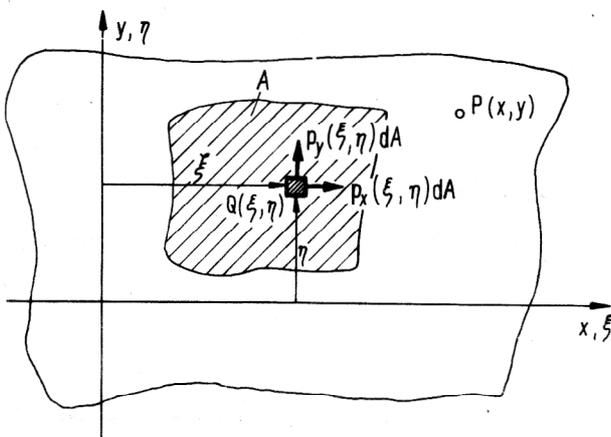
## 1. Einleitung

Probleme der Kraftübertragung zwischen benachbarten elastischen Körpern spielen in der internationalen Literatur der Festkörpermechanik eine wesentliche Rolle. Davon zeugen zahlreiche Aufsätze und Monographien, die sich gerade in jüngster Zeit mit Kontakt-, Verbund- und Kräfteinleitungsproblemen befassen, vgl. [1] bis [5]. Die Theorie bereitet, analytisch wie numerisch, große mathematische Schwierigkeiten, da an der gemeinsamen Kontaktfläche der untersuchten elastischen Körper gleichzeitig Bedingungen für Spannungen und Verschiebungen eingehalten werden müssen und somit gemischte Randwertprobleme zu lösen sind.

In einigen Fällen erweist sich die Formulierung und Lösung von Integralgleichungen als vorteilhaft. Dazu gehört auch die Kraftübertragung zwischen zwei parallelen elastischen Scheiben, die durch Schubelastische Nähte oder Flächen miteinander verbunden sind.

## 2. Herleitung der Integralgleichungen

Voraussetzung für die Formulierung von Integralgleichungen ist die quellenmäßige Darstellung gewisser Spannungen oder Verschiebungen des untersuchten elastischen Körpers, also ihre Darstellung als Integrale über eine Quell- und eine konkret gegebene Einflußfunktion. Für unendliche elastische Scheiben ist diese Voraussetzung im Rahmen des ebenen Spannungszustandes erfüllt. Unter der Wirkung von Linien- oder Flächenlasten in der Scheibenebene lassen sich sowohl Verschiebungen als auch Spannungen in einfacher Weise quellenmäßig darstellen (Bild 1).



**Bild 1**  
Prinzipische Skizze einer unendlichen Scheibe unter Flächenlastangriff

Quellfunktionen sind die verteilten Lasten, Einflußfunktionen bei vorausgesetzter Werkstoffisotropie die bekannten elementaren Funktionen der Greenschen Matrix, vgl. z. B. [2].

Bei der Herleitung der Integralgleichungen werden die Scheibenverschiebungen  $v_x(x, y)$ ,  $v_y(x, y)$  als Funktionen der Quellbelastung  $p_x(\xi, \eta)$ ,  $p_y(\xi, \eta)$  benötigt (vgl. Bild 1):

$$\left. \begin{aligned} v_x(x, y) &= \int_A [G_{xx}(x, y, \xi, \eta) \cdot p_x(\xi, \eta) \\ &\quad + G_{xy}(x, y, \xi, \eta) \cdot p_y(\xi, \eta)] dA + C_x - W_y \\ v_y(x, y) &= \int_A [G_{yx}(x, y, \xi, \eta) \cdot p_x(\xi, \eta) \\ &\quad + G_{yy}(x, y, \xi, \eta) \cdot p_y(\xi, \eta)] dA + C_y + W_x \end{aligned} \right\} (1)$$

$$\left. \begin{aligned} Eh G_{xx}(x, y, \xi, \eta) &= -\frac{1}{4\pi} [(3-\nu)(1+\nu) \ln |r| \\ &\quad + (1+\nu)^2 \frac{(y-\eta)^2}{r^2}] \\ Eh G_{xy}(x, y, \xi, \eta) &= Eh G_{yx}(x, y, \xi, \eta) \\ &= \frac{(1+\nu)^2 (x-\xi)(y-\eta)}{4\pi r^2} \\ Eh G_{yy}(x, y, \xi, \eta) &= -\frac{1}{4\pi} [(3-\nu)(1+\nu) \ln |r| \\ &\quad + (1+\nu)^2 \frac{(x-\xi)^2}{r^2}] \\ r^2 &= (\overline{PQ})^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 \end{aligned} \right\} (2)$$

Dabei sind  $E$  und  $\nu$  Elastizitätsmodul und Querdehnzahl des Scheibenwerkstoffes,  $h$  die Scheibendicke,  $|r|$  der Abstand zwischen Quellpunkt  $Q(\xi, \eta)$  und Aufpunkt  $P(x, y)$ . Mit  $A$  wird das Wirkungsgebiet der Quellbelastung bezeichnet. Im Falle der im Bild dargestellten Flächenlasten handelt es sich um eine Angriffsfläche, bei Linienbelastung um eine Angriffslinie.

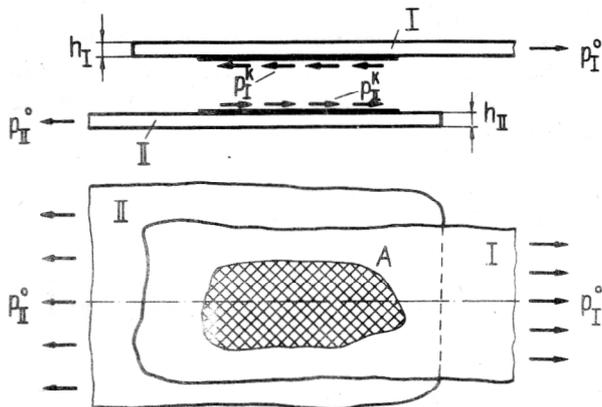
Entsprechend ist das Gebietselement  $dA$  als Flächen- oder als Linienelement in der  $\xi, \eta$ -Ebene zu verstehen.

Bei den Größen  $C_x$ ,  $C_y$  und  $W$  handelt es sich um die drei Komponenten der ebenen Starrkörperverschiebung,

die als unbestimmte Parameter in den jeweiligen Verschiebungsausdrücken berücksichtigt werden müssen.

Die angegebene Greensche Matrix ist symmetrisch und durch charakteristische Logarithmussingularitäten in den Hauptdiagonalgliedern gekennzeichnet. Einer Normierung der Logarithmusargumente steht angesichts der unbestimmten Parameter und (14) nichts im Wege.

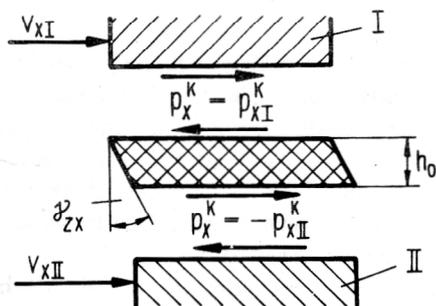
Nun soll das Problem der Kraftübertragung zwischen zwei großflächigen elastischen Scheiben formuliert werden, die parallel angeordnet und durch schubelastische Nähte oder Flächen miteinander verbunden sind (Bild 2).



**Bild 2**  
Kraftübertragung zwischen zwei parallelen großflächigen Scheiben über eine Verbindungsfläche

Verbindungsflächen werden im allgemeinen durch Kleben hergestellt, Verbindungsnahte entstehen beim Rollenschweißen, beim Kleben, in der Textiltechnik und in anderen technischen Disziplinen, können aber auch als schneidn förmiger Support auftreten, der eine Scheibe mit einer Grundplatte verbindet.

Verbindungsflächen übertragen Flächenlasten, Verbindungsnahte Linienlasten zwischen beiden Scheiben und werden selbst auf Schub beansprucht. In den Scheiben erzeugen die übertragenen Lasten unter der Voraussetzung kleiner Biegesteifigkeiten, die eine Vernachlässigung der Plattenbiegung erlauben, ebene Spannungs- und Verschiebungsfelder vom selben Typ, wie in den Gleichungen (1) beschrieben. Die Ausdrücke für die Verschiebungen in den Scheiben I und II lauten deshalb



**Bild 3**  
Schubverformung eines Klebschichtelementes

$$\begin{aligned}
 v_{xI} &= v_{xI}(p_I^K) + v_{xI}(p_I^0) + C_{xI} - W_{IY} \\
 &= \int_A [G_{xxI}(x, y, \xi, \eta) \cdot p_{xI}^K(\xi, \eta) \\
 &\quad + G_{xyI}(x, y, \xi, \eta) \cdot p_{yI}^K(\xi, \eta)] dA \\
 &\quad + v_{xI}(p_I^0, x, y) + C_{xI} - W_{IY} \\
 v_{yI} &= v_{yI}(p_I^K) + v_{yI}(p_I^0) + C_{yI} + W_{Ix} \\
 &= \int_A [G_{yxI}(x, y, \xi, \eta) \cdot p_{xI}^K(\xi, \eta) \\
 &\quad + G_{yyI}(x, y, \xi, \eta) \cdot p_{yI}^K(\xi, \eta)] dA \\
 &\quad + v_{yI}(p_I^0, x, y) + C_{yI} + W_{Ix} \\
 v_{xII} &= v_{xII}(p_{II}^K) + v_{xII}(p_{II}^0) + C_{xII} - W_{IIY} \\
 &= \int_A [G_{xxII}(x, y, \xi, \eta) \cdot p_{xII}^K(\xi, \eta) \\
 &\quad + G_{xyII}(x, y, \xi, \eta) \cdot p_{yII}^K(\xi, \eta)] dA \\
 &\quad + v_{xII}(p_{II}^0, x, y) + C_{xII} - W_{IIY} \\
 v_{yII} &= v_{yII}(p_{II}^K) + v_{yII}(p_{II}^0) + C_{yII} + W_{IIx} \\
 &= \int_A [G_{yxII}(x, y, \xi, \eta) \cdot p_{xII}^K(\xi, \eta) \\
 &\quad + G_{yyII}(x, y, \xi, \eta) \cdot p_{yII}^K(\xi, \eta)] dA \\
 &\quad + v_{yII}(p_{II}^0, x, y) + C_{yII} + W_{IIx} .
 \end{aligned} \tag{3}$$

Unter  $p_I^K$  und  $p_{II}^K$  sind die gegenseitig übertragenen Kontaktlasten, unter  $p_I^0$  und  $p_{II}^0$  die äußere Grundbelastung der beiden Scheiben zu verstehen (Bild 2). Aus Gleichgewichtsgründen gilt

$$\left. \begin{aligned}
 p_{xII}^K &= -p_{xI}^K = -p_x^K \\
 p_{yII}^K &= -p_{yI}^K = -p_y^K
 \end{aligned} \right\} \tag{4}$$

Dabei zeigen die positiven Komponenten von  $p_I^K$  und  $p_{II}^K$  jeweils in Koordinatenrichtung (s. a. Bild 3).

Die weitere Behandlung bezieht sich auf Verbindungen von sehr großen Scheiben, die beide unterschiedliche Steifigkeiten  $E_I h_I$  und  $E_{II} h_{II}$ , aber gleiche Querdehnzahlen haben:

$$\nu_I = \nu_{II} = \nu . \tag{5}$$

Werden nun die Scheiben als unendlich groß betrachtet, gelten für sie die einfachen Greenschen Funktionen (2). Mit (5) sind diese bis auf den Faktor  $Eh$  für beide Scheiben identisch:

$$\begin{aligned}
 E_I h_I G_{ikI}(x, y, \xi, \eta) &= E_{II} h_{II} G_{ikII}(x, y, \xi, \eta) \\
 &= Eh G_{ik}(x, y, \xi, \eta) \text{ nach (2) } i, k = x, y
 \end{aligned} \tag{6}$$

Wenn die äußere Grundbelastung von Scheibe I und Scheibe II  $p_I^0$  und  $p_{II}^0$  jeweils im Unendlichen eingeletet wird, ergibt sich eine weitere Vereinfachung. Die entsprechenden Verschiebungsausdrücke in den Gleichungen (3)  $v_{xI}(p_I^0)$  usw. verlieren ihren Feldcharakter und können mit den Ausdrücken für die Starrkörperverschiebung vereinigt werden. Symbolisch sei dieser Sachverhalt durch

$$v_{iI}(p_I^0) \rightarrow 0, \quad v_{iII}(p_{II}^0) \rightarrow 0, \quad i = x, y \quad (7)$$

beschrieben.

Im Kontaktgebiet A sind von den Verschiebungen beider Scheiben bestimmte kinematische Bedingungen einzuhalten. Bei starrer Verbindung handelt es sich um die Gleichheitsforderung

$$\left. \begin{aligned} v_{xI}(x, y) &= v_{xII}(x, y) \\ v_{yI}(x, y) &= v_{yII}(x, y) \end{aligned} \right\} x, y \ni A \quad (8)$$

Schubelastische Verbindungsstellen lassen dagegen Differenzen zwischen den Verschiebungen der benachbarten Scheiben zu. Bei linearer Elastizität besteht ein proportionaler Zusammenhang zwischen diesen Verschiebungsdifferenzen und den sie verursachenden Kontaktkräften:

$$\left. \begin{aligned} v_{xII}(x, y) - v_{xI}(x, y) &= \beta p_x^K(x, y) \\ v_{yII}(x, y) - v_{yI}(x, y) &= \beta p_y^K(x, y) \end{aligned} \right\} x, y \ni A \quad (9)$$

Die Bestimmung der Proportionalitätskonstante  $\beta$  muß der konkreten technischen Situation Rechnung tragen (Bild 3).

Im Falle einer Klebverbindung folgt aus der Schubverformung der Klebschicht (Schubmodul  $G_0$ , Höhe  $h_0$ ) nach Bild 3 die einfache Beziehung

$$\beta = \frac{v_{xII} - v_{xI}}{p_x^K} = \frac{\gamma_{zx} \cdot h_0}{\tau_{zx}} = \frac{h_0}{G_0} \quad (10)$$

Handelt es sich bei  $p_x$  und  $p_y$  um Linienlasten, die von einer Klebnaht der Breite  $b_0$  übertragen werden, gilt entsprechend:

$$\beta(L) = \frac{v_{xII} - v_{xI}}{p_{x(L)}^K} = \frac{\gamma_{zx} \cdot h_0}{\tau_{zx} \cdot b_0} = \frac{h_0}{G_0 \cdot b_0} \quad (11)$$

Im Falle einer Schweißverbindung erfordert eine realistische Ermittlung von  $\beta$  auch die Einbeziehung der Schubverformung der verbundenen Bleche an der Kontaktstelle [6].

Mit den kinematischen Bedingungen (9) sind die Grundgleichungen für die Gewinnung der Integralgleichungen gegeben, die das Problem der Kraftübertragung zwischen zwei parallelen unendlichen elastischen Scheiben beschreiben sollen, die durch Nähte oder Flächen endlicher Ausdehnung schubelastisch verbunden sind und im Unendlichen belastet werden.

Einsetzen der Verschiebungsausdrücke (3) in die kinematischen Bedingungen (9) ergibt unter Berücksichtigung von (4), (5), (6) und (7)

$$\left. \begin{aligned} - \left( \frac{1}{E_I h_I} + \frac{1}{E_{II} h_{II}} \right) \int_A E h [G_{xx}(x, y, \xi, \eta) \\ \cdot p_x^K(\xi, \eta) + G_{xy}(x, y, \xi, \eta) \cdot p_y^K(\xi, \eta)] dA \\ + (C_{xII} - C_{xI}) - (W_{II} - W_I) y = \beta p_x^K(x, y) \\ - \left( \frac{1}{E_I h_I} + \frac{1}{E_{II} h_{II}} \right) \int_A E h [G_{yx}(x, y, \xi, \eta) \\ \cdot p_x^K(\xi, \eta) + G_{yy}(x, y, \xi, \eta) \cdot p_y^K(\xi, \eta)] dA \\ + (C_{yII} - C_{yI}) + (W_{II} - W_I) x = \beta p_y^K(x, y) \end{aligned} \right\} x, y \ni A \quad (12)$$

Im weiteren soll der Lastindex K weggelassen werden. Einsetzen von (2) und Zusammenfassen von Konstanten führt auf:

$$\left. \begin{aligned} p_x(x, y) - \lambda_0 \int_A \left\{ \left[ (3-\nu) \ln \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \right. \right. \\ \left. \left. + (1+\nu) \frac{(y-\eta)^2}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \right] p_x(\xi, \eta) \right. \\ \left. - (1+\nu) \frac{(x-\xi)(y-\eta)}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} p_y(\xi, \eta) \right\} dA \\ = \bar{C}_x - \bar{W}_y \\ p_y(x, y) - \lambda_0 \int_A \left\{ \left[ (3-\nu) \ln \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \right. \right. \\ \left. \left. + (1+\nu) \frac{(x-\xi)^2}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \right] p_y(\xi, \eta) \right. \\ \left. - (1+\nu) \frac{(x-\xi)(y-\eta)}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} p_x(\xi, \eta) \right\} dA \\ = \bar{C}_y + \bar{W}_x \\ \lambda_0 = \frac{1+\nu}{4\pi} \left( \frac{1}{E_I h_I} + \frac{1}{E_{II} h_{II}} \right) \frac{1}{\beta}, \quad x, y \ni A \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Damit sind die gesuchten Integralgleichungen gefunden. Es handelt sich um ein inhomogenes System zweier Fredholmscher Integralgleichungen 2. Art für die gesuchten Kontaktkräfte  $p_x(x, y)$  und  $p_y(x, y)$ , die als Flächenlasten in einer Verbindungsfläche oder als Linienlasten in einer Verbindungsnaht übertragen werden. Im ersten Fall bedeutet  $dA$  das Flächenelement  $d\xi d\eta$ , im zweiten Fall das entsprechende Linienelement  $ds$  in der  $\xi, \eta$ -Ebene. In beiden Fällen hat der Parameter  $\lambda_0$  formal die Dimension  $1/A$ , im ersten Fall also  $1/\text{Fläche}$  und im zweiten  $1/\text{Länge}$ .

Die rechten Seiten der Integralgleichungen stellen die beiden Komponenten einer Differenz von Starrkörperverschiebungen dar und sind vorerst unbekannt. Die drei Parameter  $\bar{C}_x$ ,  $\bar{C}_y$  und  $\bar{W}$  sind allerdings nicht frei wähl-

bar, sondern durch die integralen Gleichgewichtsbedingungen für die Kontaktkräfte festgelegt:

$$\left. \begin{aligned} \int_A p_x(\xi, \eta) dA &= -F_x \\ \int_A p_y(\xi, \eta) dA &= -F_y \\ \int_A [-p_x(\xi, \eta) \cdot \eta + p_y(\xi, \eta) \cdot \xi] dA &= -M \end{aligned} \right\} (14)$$

Die Größen  $F_x$ ,  $F_y$  und  $M$  geben die resultierenden äußeren Kräfte und Momente an, die in Scheibe I eingeleitet werden und mit den entsprechenden Integralen der Kontaktkräfte im Gleichgewicht stehen müssen.

Die Beschreibung des behandelten Problems durch das Integralgleichungssystem (13) ist erst in Verbindung mit den 3 Nebenbedingungen (14) vollständig.

Mit Hilfe eines einfachen Integrationsverfahrens lassen sich aus (13) und (14) Systeme von Integralgleichungen mit erweiterten Kernen und bekannten rechten Seiten gewinnen [17].

### 3. Lösungseigenschaften der Integralgleichungen

Die Kerne des vorliegenden Systems haben logarithmische Singularitäten. Sie sind damit nicht nur über dem Grundgebiet quadratisch integrierbar, sondern genügen auch der weitergehenden A-Bedingung [7], S. 16. Damit ist die Fredholmsche Theorie voll anwendbar, insbesondere ist die gleichmäßige Konvergenz der Neumannschen Reihen für kleine  $\lambda_0$  sichergestellt.

Kerne (und Kernmatrix) sind darüber hinaus symmetrisch und negativ definit. Damit hat das Integralgleichungssystem nur reelle, negative Eigenwerte. Da es aber im vorliegenden physikalischen Zusammenhang nur für positive  $\lambda_0$ -Werte definiert ist, hat es als inhomogenes System im gesamten Definitionsbereich eindeutige Lösungen.

Die rechten Seiten sind beschränkt und stetig. Damit ergeben sich aber unabhängig von der konkreten geometrischen Gestalt des jeweiligen Kontaktgebietes beschränkte und stetige Lösungen. Diese wichtige Erkenntnis folgt unmittelbar aus der Theorie der Integralgleichungen [7], S. 91 ff. Weitergehende Betrachtungen zeigen, daß die Lösungen im Falle eines Flächenkontaktes im gesamten Kontaktgebiet auch stetige erste Ableitungen haben. Das gilt auch für den Rand und selbst für Eckpunkte. Im Falle eines Linienkontaktes liegen dagegen stetige erste Ableitungen der übertragenen Linienlasten nur im Inneren von hinreichend glatten Nahtabschnitten vor. An Eck- und Randpunkten von Nähten werden die ersten Ableitungen nach einem Logarithmusgesetz unendlich groß. Die Kenntnis dieser Eigenschaften ist für die numerische Behandlung außerordentlich wichtig.

Interesse verdienen auch die Grenzfälle  $\lambda_0 \rightarrow 0$  und  $\lambda_0 \rightarrow \infty$ . Kleine  $\lambda_0$ -Werte kennzeichnen Verbindungen mit relativ hoher Schubnachgiebigkeit. Der Grenzfall  $\lambda_0 = 0$  wird entweder bei Starrheit der verbundenen Scheiben oder bei verschwindender Schubsteifigkeit

der Verbindung erreicht. Dabei verschwinden die Integralglieder im Gleichungssystem, als Lösungen ergeben sich elementare Verteilungen: die gleichmäßige bei Kraftübertragung und die lineare bei Übertragung eines Momentes. Hohe  $\lambda_0$ -Werte verkörpern relativ hohe Schubsteifigkeiten. Der Grenzfall  $\lambda_0 \rightarrow \infty$  kann, wenn auch physikalisch unrealistisch, als starre Verbindung zweier Scheiben ohne jegliche Schubelastizität gedeutet werden ( $\beta \rightarrow 0$ ). In diesem Fall verschwinden im System (12) die rechts stehenden Glieder mit den Stammfunktionen, und es verbleibt ein Integralgleichungssystem 1. Art mit extremen Lösungseigenschaften.

Bei hohen  $\lambda_0$ -Werten des diskutierten Systems (13) muß also mit steilen Lösungsgradienten und sehr unangenehmen numerischen Effekten gerechnet werden. Bei niedrigen  $\lambda_0$ -Werten sind dagegen relativ gute numerische Ergebnisse zu erwarten.

Das Integralgleichungssystem beschreibt auch Verbindungsflächen und -nähte mit variabler Schubelastizität  $\beta = \beta(x, y)$ . Dazu gehören z. B. Nähte mit variabler Breite  $b_0 = b_0(s)$ . In diesem Fall wird der Parameter  $\lambda_0$  koordinatenabhängig, und die bisherigen Lösungsaussagen müssen relativiert werden. So bilden sich z. B. Unstetigkeitsstellen der Funktion  $\lambda_0 = \lambda_0(x, y)$  auch in den Lösungsfunktionen ab.

### 4. Lastverteilung über einer geraden Naht

Als Beispiel sei die Übertragung einer Kraft  $F_x$  zwischen zwei großflächigen elastischen Scheiben behandelt, die durch eine in Krafrichtung  $x$  angeordnete gerade Naht der Länge  $2a$  mit konstanter Schubsteifigkeit verbunden sind. Gesucht ist der Verlauf der übertragenen Linienlast  $p_x(x)$  über der Nahtlänge  $|x| \leq a$ .

Mit  $y = 0$ ,  $\eta = 0$  findet eine Entkopplung des Systems (13) statt. Da weder eine Kraft in  $y$ -Richtung noch ein Moment übertragen wird, hat die zweite Gleichung die triviale Lösung

$$p_y(x) \equiv 0 \quad (15)$$

Die gesuchte Linienlast ist Lösung der ersten Gleichung und der entsprechenden Nebenbedingung, es gilt  $dA = ds = d\xi$ :

$$\left. \begin{aligned} p_x(x) - \lambda_0 \int_{-a}^a (3-\nu) \ln |x-\xi| p_x(\xi) d\xi &= \bar{C}_x \\ \int_{-a}^a p_x(\xi) d\xi &= -F_x, \quad |x| \leq a \end{aligned} \right\} (16)$$

Nach Normierung der Koordinaten

$$x = a\bar{x}, \quad \xi = a\bar{\xi} \quad (17)$$

und anschließender Weglassung der Querstriche folgt

$$\left. \begin{aligned} p_x(x) - \lambda \int_{-1}^1 \ln |x-\xi| p_x(\xi) d\xi &= C \\ \int_{-1}^1 p_x(\xi) d\xi &= -\frac{F_x}{a}, \quad |x| \leq 1 \end{aligned} \right\} (18)$$

mit dem dimensionslosen Parameter

$$\lambda = (3-\nu) \lambda_0 a = \frac{(3-\nu)(1+\nu)}{4\pi} \left( \frac{1}{E_I h_I} + \frac{1}{E_{II} h_{II}} \right) \frac{a}{\beta}. \quad (19)$$

Damit ist die Integralgleichung des konkreten Problems aufgestellt, eine inhomogene Fredholmsche Integralgleichung 2. Art mit gerader Lösungsfunktion. Es handelt sich um die bekannte Staermansche Integralgleichung, mit der 1949 ein klassisches Kontaktproblem der Elastizitätstheorie verallgemeinert werden konnte [8]. Später ist diese Gleichung auch bei anderen Kontaktproblemen [10], [11] und in jüngster Zeit in der Bruchmechanik aufgetreten [9].

Analytische Lösungen sind nicht bekannt geworden. Die Näherungsgüte numerischer Lösungen war bisher unbefriedigend [10], [11]. Sie wird durch die Tatsache beeinträchtigt, daß die erste Ableitung der gesuchten Lösung  $dp_x(x)/dx$  an den Nahtenden  $x = \pm 1$  logarithmisch gegen Unendlich geht [12] bis [14]. Die Lösungskurve bleibt wohl beschränkt, läuft aber mit senkrechten Tangenten in ihre beiden Randpunkte ein!

Am Wissenschaftsbereich Mechanik der TH Karl-Marx-Stadt wurde die Integralgleichung (18) eingehend untersucht [15], [16]. Einzelheiten werden gesondert veröffentlicht [17].

An dieser Stelle seien einige Ergebnisse mitgeteilt. Die Neumannsche Reihe der Lösungsfunktion

$$p_x(x) = p_x^{(0)}(x) + \lambda p_x^{(1)}(x) + \lambda^2 p_x^{(2)}(x) + \dots \quad (20)$$

konvergiert bekanntlich für Parameterwerte  $\lambda$ , die kleiner als der Betrag des kleinsten Eigenwertes der Integralgleichung  $|\lambda_1|$  sind. Mit  $\lambda_1 = -0,63857$  [18] gilt:

$$\lambda < |\lambda_1| = 0,63857. \quad (21)$$

Die ersten Glieder von (20) lauten:

$$p_x^{(0)} = -\frac{F_x}{2a} \quad (22)$$

$$p_x^{(1)}(x) = -\frac{F_x}{2a} [(1+x) \ln(1+x) + (1-x) \ln(1-x) - 2 \ln 2 + 1] \quad (23)$$

$$p_x^{(2)}(x) = -\frac{F_x}{2a} \left\{ \left( \frac{1+x}{2} \right)^2 \left[ \left( \ln \frac{1+x}{2} \right)^2 - \frac{2}{3} \pi^2 \right] + 2 \mathcal{L}_2 \left( \frac{1+x}{2} \right) + \left( \frac{1-x}{2} \right)^2 \left[ \left( \ln \frac{1-x}{2} \right)^2 - \frac{2}{3} \pi^2 \right] + 2 \mathcal{L}_2 \left( \frac{1-x}{2} \right) + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} \pi^2 \right\}. \quad (24)$$

Die Vorzeichen beziehen sich auf die in Bild 3 festgelegten Krafttrichtungen. Bemerkenswert ist die Tatsache, daß die logarithmische Singularität der ersten Ableitung der Lösungsfunktion an den beiden Randpunkten bereits vom linearen Glied der Neumannschen Reihe  $\lambda p_x^{(1)}(x)$  richtig reproduziert wird! Das quadratische Glied läßt sich nicht mehr durch elementare Funktio-

nen darstellen. Es enthält den Eulerschen Dilogarithmus [19], S. 72:

$$\mathcal{L}_2(x) = -\int_0^x \frac{\ln(1-s)}{s} ds = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i^2}. \quad (25)$$

Die Neumannsche Reihe ist das Ergebnis einer Potenzreihenentwicklung der Lösung um den Punkt  $\lambda = 0$ . Eine schnelle Konvergenz bleibt deshalb auf sehr kleine  $\lambda$ -Werte beschränkt. Nur dort lassen sich auch die durch Abbruch der Reihe entstehenden linearen oder quadratischen Näherungsausdrücke numerisch auswerten. Über eine Möglichkeit der Konvergenzverbesserung und der analytischen Fortsetzung der Lösung über  $\lambda = |\lambda_1|$  hinaus soll an anderer Stelle berichtet werden.

Als leistungsfähiges numerisches Lösungsverfahren hat sich für Parameterwerte bis etwa  $\lambda = 100$  das folgende Kollokationsverfahren erwiesen. Die gesuchte Lösungsfunktion wird für das gesamte Intervall durch einen endlichen Reihenausdruck aus geraden Tschebyscheff-Polynomen 1. Art approximiert:

$$p_x(x) \approx \bar{p}_x^{(1)}(x) = \sum_{j=1}^{n+1} C_j T_{2j-2}(x). \quad (26)$$

Die Ansatzparameter  $C_j$  ergeben sich als Lösungen eines algebraischen Gleichungssystems, das aus der Forderung nach Erfüllung der Integralgleichung (18) in den  $n+1$  Tschebyscheff-Knoten

$$x_i = \cos \frac{i-1}{n} \pi \quad i = 1, 2, \dots, n+1 \quad (27)$$

hervorgeht. Bei der Aufstellung der entsprechenden Koeffizientenmatrix werden die Integralausdrücke

$$I_{ij} = \int_{-1}^1 T_{2j-2}(\xi) \ln |x_i - \xi| d\xi \quad i, j = 1, 2, \dots, n+1 \quad (28)$$

benötigt, die mit Hilfe einer Rekursionsprozedur exakt berechnet werden konnten. Ein Konvergenzbeweis für das beschriebene Kollokationsverfahren liegt seit kurzem vor [14].

Die erzielbare Näherungsgüte wird, wie schon erwähnt, durch das singuläre Randverhalten der Lösung beeinträchtigt. Die Leistungsfähigkeit des Verfahrens kann deshalb durch erweiterte Lösungsansätze, die diesem Randverhalten von vornherein Rechnung tragen, wesentlich verbessert werden. Ausgezeichnete Lösungseigenschaften hat der Ansatz

$$p_x(x) \approx \bar{p}_x^{(2)}(x) = \sum_{j=1}^n C_j T_{2j-2}(x) + C_{n+1} \sqrt{1-x^2} \quad (29)$$

und der aus dem linearen Glied der Neumannschen Reihe (23) gewonnene Ansatz

$$p_x(x) \approx \bar{p}_x^{(3)}(x) = \sum_{j=1}^n C_j T_{2j-2}(x) + C_{n+1} [(1+x) \ln(1+x) + (1-x) \ln(1-x)] \quad (30)$$

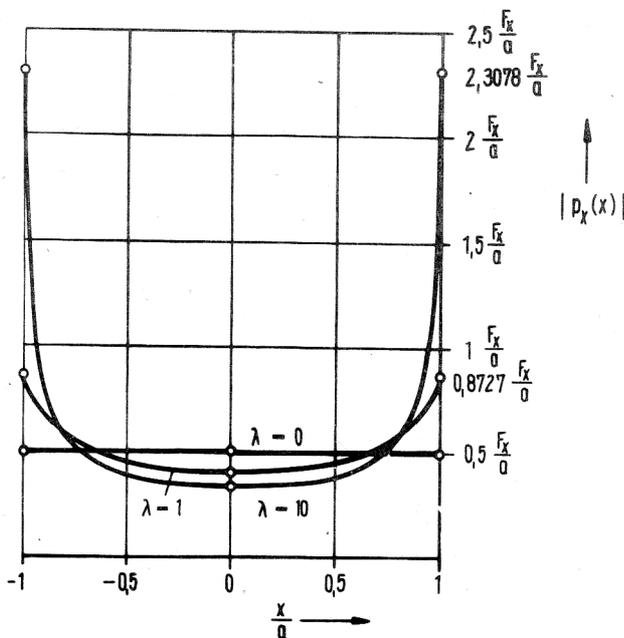
bewiesen.

in Bild 4 sind zwei der erhaltenen Ergebniskurven skizziert. Der Verlauf der übertragenen Linienlast über der Naht zeigt eine für Kleb- und Schweißverbindungen allgemein charakteristische Schüsselform [20]. Einem nur schwach belasteten Innengebiet stehen hoch beanspruchte Randgebiete gegenüber (Bild 4). Der Grad der Ungleichmäßigkeit der Lastverteilung nimmt mit wachsendem Steifigkeitsparameter  $\lambda$  zu. Die Maximalwerte am Nahtende sind ein Maß für die maximale Beanspruchung des Nahtwerkstoffes, wenn sich diese auch auf komplizierte Weise in einem lokalen räumlichen Spannungsfeld einstellt [21].

Die Maximallasten  $|p_x(x)|_{\max} = |p_x(1)|$  konnten trotz singulärer Gradienten in hoher Genauigkeit berechnet werden.

Tabelle 1 gibt einen Überblick über einige Zahlenwerte in Abhängigkeit von  $\lambda$  (Tabelle 1).

Zum Schluß sei vermerkt, daß für das Integralgleichungssystem (13), (14) exakte Lösungen angegeben werden können, wenn das Kontaktgebiet eine Kreisfläche ist. Sie wurden in [20] durch Behandlung eines äquivalenten Randwertproblems gewonnen.



**Bild 4**  
Verteilung der Linienlast  $|p_x(x)|$  über der geraden Naht

**Tabelle 1**  
Maximalwerte  $|p_x(1)|$  in Abhängigkeit von  $\lambda$

$\lambda$	$ p_x(1) $	$\lambda$	$ p_x(1) $
0	0,500 000	1	0,872 714
0,1	0,547 997	1,2	0,929 728
0,2	0,592 493	1,6	1,034 228
0,3	0,634 095	2	1,128 908
0,4	0,673 261	5	1,673 493
0,5	0,710 347	10	2,307 805
0,6	0,745 633	20	3,217 876
0,7	0,779 344	50	5,039 46
0,8	0,811 664	100	7,101 4

## LITERATUR

- [ 1 ] Grigoljuk, E. I.; V. M. Tolkacev: Kontaktnye zadaci teorii plastin i obolocek, Moskva, Masinostroenie, 1980, 415 S.
- [ 2 ] Lukasicwicz, St.: Local Loads in Plates and Shells, Warszawa, PWN, und Leyden, Noordhoff, 1979, 569 S.
- [ 3 ] Gladwell, G. M. L.: Contact Problems in the Classical Theory of Elasticity, Alphen aan den Rijn, Noordhoff, 1980, 716 S.
- [ 4 ] Popov, G. Ja.; V. M. Tolkacev: Problema kontakta zestklich tel s tonkostennymi elementami, Izv. AN SSSR, Mechanika tverdogo tela, 1980, No 4, S. 192 – 206, 104 Lit.
- [ 5 ] Popov, G. Ja.: Koncentracija uprugich naprjazenij voze stamпов, razrezov, tonkich vkljucenij i podkreplenij, Moskva, Nauka, vorauss. 1982.
- [ 6 ] Pfau, P.: Viskoelastische Klebverbindungen, unveröffentlichter Forschungsbericht zum Thema VF 122 – 03 – 05 – 0 vom 25. 11. 1980, TH Karl-Marx-Stadt, Sektion Maschinen-Bauelemente.
- [ 7 ] Michlin, S. G.: Vorlesungen über lineare Integralgleichungen, Berlin, Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1962
- [ 8 ] Staerman, I. JA.: Kontaktnaja zadaca teorii uprugosti, Moskva, Leningrad, GITTL, 1949, S. 157 ff.
- [ 9 ] Erdogan, F.: Mixed Boundary-value Problems in Mechanics, in: Mechanics today, Vol. 4, S. 1 – 86, Pergamon Press, 1978.
- [ 10 ] Lubkin, J. L.; L. C. Lewis: Adhesive Shear Flow for an Axially-loaded, Finite Stringer Bonded to an Infinite Sheet, Quart. Journ. Mech. Appl. Math. 23 (1970), S. 521 – 533.
- [ 11 ] Vedeneeva, N. N.; V. D. Kljusnikov; R. I. Mazing: Zadaca o sklejke dvuch poluploskostej, Izv. AN SSSR, Mechanika tverdogo tela, 1974, No 1, S. 133 – 135.
- [ 12 ] Delves, L. M.; L. F. Abd-Elal; J. A. Hendry: A Fast Galerkin Algorithm for Singular Integral Equations, J. Inst. Maths. Applies. 23 (1979), S. 139 – 166.
- [ 13 ] Vainikko, G. M.: O metodach resenija integralnych uravnenij perenosa izlucenija, 7. Tagung über Probleme und Methoden der Mathematischen Physik, TH Karl-Marx-Stadt, Tagungsberichte 1979, S. 57 – 64.
- [ 14 ] Sloan, I. H.; B. J. Burin: Collocation with Polynomials for Integral Equations of Second Kind, J. Int. Equ. 1 (1979), S. 77 – 94.
- [ 15 ] Forschungsbericht zum Thema VF 122 – 03 – 05 – 0, unveröffentlicht, TH Karl-Marx-Stadt, Sektion Maschinen-Bauelemente, November 1979.
- [ 16 ] Pfau, P.: Integral operator theory of load transfer between two thin elastic sheets, unpublished lectures, Stefan Banach International Mathematical Center, Warsaw, March 1981.
- [ 17 ] Pfau, P.; J. Schindler: Numerische Behandlung einer schwach singulären Integralgleichung 2. Art der Elastizitätstheorie, in Vorbereitung.
- [ 18 ] Davis, A. M. J.: Waves in the Presence of an Infinite Dock with Gap, J. Inst. Maths. Applies. 6 (1970), S. 141 – 156.
- [ 19 ] Gröbner, W.; N. Hofreiter: Integraltafel, II. Teil, 2. Aufl., Wien, Springer, 1958, S. 72 f.
- [ 20 ] Pfau, P.: Spannungskonzentration in Flächenverbindungen, Wiss. Z. Techn. Univ. Dresden 21 (1972), S. 61 – 68.
- [ 21 ] Rabinovic, A. L.: Vvedenie v mehaniku armirovannyh polimerov, Moskva, Nauka 1970.

Anschrift des Verfassers  
Dr.-Ing. P. Pfau  
Technische Hochschule  
Sektion Maschinen-Bauelemente  
9010 Karl-Marx-Stadt  
PSF 964