

# Zur Darstellung der periodisch-instationären Rohrströmung unter Berücksichtigung mäßiger Kompressibilität

H. Stehr

## 1. Einleitung

Zur Berechnung der querschnittsgemittelten periodisch-instationären Strömungszustände in stark verzweigten und mehrfach erregten Rohrleitungssystemen haben die geschlossenen Berechnungsverfahren und hiervon insbesondere das sogenannte Wellenzeigerverfahren [1] bis [3] eine vorrangige Bedeutung erlangt. Die Vorteile dieser geschlossenen Berechnungsverfahren gegenüber den schrittweisen bzw. numerischen Verfahren bestehen in einem wesentlich geringeren rechentechnischen Aufwand, großer Variabilität einmal entwickelter Programme und einer übersichtlichen Problem-, Ergebnis- und Auswertungsdarstellung. Dem steht jedoch eine geringere Genauigkeit der Ergebnisse infolge notwendiger Linearisierung des Problems gegenüber.

Für eine reibungsfreie Betrachtung wird die Grenze der Anwendung des Wellenzeigerverfahrens durch die beim Strömungsvorgang auftretende Dichte-, bzw. Druckänderung des Fluids geprägt. Bei Berücksichtigung des Reibungsverhaltens des Fluids können sich neben der Dichte- bzw. Druckänderung weitere, die Anwendung einschränkende Kriterien ergeben. Diese resultieren aus dem Unvermögen der Verwendung zeitabhängiger Reibungs- bzw. Dämpfungsfunktionen und aus der Schwierigkeit der Formulierung einer Reibungsfunktion, die das Reibungsverhalten aller am Vorgang beteiligter harmonischer Teilschwankungsgrößen berücksichtigt.

Bisher lagen keine dem Verfahren entsprechende praktikable Reibungs- bzw. Dämpfungsansätze vor, so daß die Anwendung des Wellenzeigerverfahrens [4], [5] stets ohne Berücksichtigung der Dämpfung der Schwankungsbewegung infolge Reibung erfolgte.

Ein von Christ [6] empfohlener Dämpfungsansatz berücksichtigt nur einen aus der Reibung der zeitlich gemittelten Strömung resultierenden Dämpfungsanteil, während Schley [7] in seinem Dämpfungsansatz nur die Reibung der inkompressibel formulierten Schwankungsgröße berücksichtigt. Letzteres gilt auch für einen Dämpfungsansatz nach Melcher [8].

Die vorstehend genannten Reibungs- bzw. Dämpfungsansätze stellen somit nur die Grenzfälle einer zu entwickelnden allgemeinen Reibungs- bzw. Dämpfungsfunktion dar.

Die Entwicklung einer praktikablen Reibungs- bzw. Dämpfungsfunktion für die Schwankungsgrößen und einer entsprechenden Reibungsfunktion für den zeitlich gemittelten Geschwindigkeitsanteil erfolgt auf der Grundlage bekannter Zustandsverläufe der Strömung über dem Rohrquerschnitt. Im Folgenden wird für laminares Strömen ein Verfahren zur Ermittlung der quer-

schnittsabhängigen Zustandsgrößen, basierend auf den querschnittsgemittelten Größen des Wellenzeigerverfahrens, mitgeteilt. Dieses Verfahren ermöglicht, über die inkompressibel formulierten Lösungen von Sexl [9], Lutz [10], Uchida [11] und den schwach kompressibel formulierten Lösungen von Ohmi et. al [12] und Benyo [13] hinaus, den Einfluß mäßiger Kompressibilität und den Einfluß eines zeitlich gemittelten Geschwindigkeitsanteiles auf die Schwankungsgrößen zu berücksichtigen. Unter mäßiger Kompressibilität soll eine relative Druckänderung  $\frac{\Delta p}{p_0} \leq 0,2$  und eine maximal auftretende Machzahl  $Ma \leq 0,5$  verstanden werden.

## 2. Darstellung des Wellenzeigerverfahrens

Ausgehend von den eindimensional betrachteten Kontinuitäts- und Bewegungsgleichungen unter Voraussetzung isentropen Zustandsverhaltens des Fluids, lassen sich durch Linearisierung und entsprechende Separationsansätze die querschnittsgemittelten Strömungsparameter im eingeschwungenen Zustand darstellen. Die Formulierung der Wechselgrößen erfolgt in komplexer Darstellung, wobei der Zusammenhang zwischen den reellen und komplexen Größen der Druck- bzw. Schallgeschwindigkeitsänderung und der Geschwindigkeitsänderung gegeben ist durch die Beziehungen

$$\frac{\Delta p}{p_0} = \frac{2\kappa}{\kappa - 1} \frac{\Delta \bar{a}}{a_0} = \kappa \frac{\bar{a}^{*re}}{a_0} \quad \text{und} \quad (1)$$

$$\Delta \bar{v} = \bar{v}^{*re}$$

Die komplexen Wechselgrößen ergeben sich als Summe entsprechender harmonischer Teilwechselgrößen in der Form

$$\bar{a}^* = \sum_{k=1}^n \exp(ik\omega t) \hat{a}_k^* \quad (2)$$

und

$$\bar{v}^* = \sum_{k=1}^n \exp(ik\omega t) \hat{v}_k^* \quad (3)$$

d. h. die Berechnung basiert auf der Anwendung der harmonischen Analyse und Synthese auf einen beliebigen periodischen Verlauf der Wechselgrößen.  $\bar{a}^*$  und  $\bar{v}^*$  sind die komplexen Wechselgrößen der Schallgeschwindigkeit und Geschwindigkeit,  $\hat{a}_k^*$  und  $\hat{v}_k^*$  sind die entsprechenden örtlichen Wellenzeiger der Teilwechselgrößen, die einer

zeitlichen Änderung nach  $\exp(i k \omega t)$  unterworfen werden. Die örtlichen Wellenzeiger ergeben sich wiederum aus hin- und rücklaufenden Partialwellen nach den Beziehungen

$$a_k^* = K_{ak} (W_{mk}^* + W_{nk}^*) \quad (4)$$

und

$$v_k^* = K_{vk} (W_{mk}^* - W_{nk}^*) \quad (5)$$

$K_{ak}$  und  $K_{vk}$  sind die sich aus der Verträglichkeit der querschnittsgemittelten und aus der Separation der querschnittsabhängigen Strömungsparameter ergebenden komplexen Verschiebungen. Die hin- bzw. rücklaufenden reibungsgedämpften Partialwellen  $W_{mk}^*$  bzw.  $W_{nk}^*$  an beliebigen Orten  $x$  eines Rohrabchnittes lauten

$$W_{mk}^* = W_{mk}^*(x=0) \exp \left\{ -\frac{1}{2} [R_k^{*re} + i(2 + R_k^{*im})] \frac{1}{1 + Ma_0} \cdot \frac{k \omega x}{a_0} \right\} \quad (6)$$

$$W_{nk}^* = W_{nk}^*(x=0) \exp \left\{ \frac{1}{2} [R_k^{*re} + i(2 + R_k^{*im})] \frac{1}{1 - Ma_0} \cdot \frac{k \omega x}{a_0} \right\} \quad (7)$$

Hierin sind  $W_{mk}^*(x=0)$  und  $W_{nk}^*(x=0)$  die Partialwellen am Rand eines zu betrachtenden Rohrabchnittes.  $R_k^*$  ist eine komplexe dimensionslose und in dieser Form frequenzabhängige Reibungsfunktion, die mit einer für alle harmonischen Teilschwankungsgrößen geltenden, aus dem linearen Reibungsansatz in der Bewegungsgleichung hervorgehenden Reibungsfunktion  $r^*$  zusammenhängt

$$R_k^* = \frac{r^*}{k \omega} \quad (8)$$

Das Ziel der Arbeit des Verfassers ist die Ermittlung einer praktikablen Reibungsfunktion  $r^*$ , die den Forderungen nach Allgemeingültigkeit bezüglich  $\frac{\Delta \bar{v}}{v_0}$  in einem zu ermittelnden Parameterbereich für  $\frac{\Delta P}{P_0}$  und  $Ma$  entspricht. Diesem Ziel dient das in dieser Arbeit vorgestellte Verfahren zur Berechnung der querschnittsabhängigen Strömungsparameter.

### 3. Die Grundgleichungen, ihre Linearisierung und Separation

Den Ausgangspunkt zu den Betrachtungen der querschnittsabhängigen Strömungsparameter bilden die Navier-Stokesschen Gleichungen und die Kontinuitätsgleichung in Zylinderkoordinaten dargestellt, unter den Voraussetzungen vernachlässigbarer azimuthaler Komponente der Geschwindigkeit, konstanter Viskosität im Bereich der Zustandsänderung, Vernachlässigung des Kompressibilitätseinflusses im Reibungsglied. Es wird isentrope Zustandsverhalten des Fluids angenommen, Dissipation und Druckrückgewinn wird vernachlässigt, so daß die Energiegleichung entfällt bzw. implizit in den Zustandsgleichungen enthalten ist.

Eine Linearisierung der Grundgleichungen erfolgt durch die Ansätze

$$a = a_0 + \Delta a = a_0 + \frac{\kappa - 1}{2} a^{*re} \quad \frac{\Delta a}{a_0} \ll 1$$

$$v = v_0 + \Delta v = v_0 + v^{*re} \quad 0 < \frac{\Delta v}{v_0} \ll \infty \quad (9)$$

$$v_r = v_r^{*re}$$

Bezeichnend hierbei ist, daß für die Längsgeschwindigkeit keine der bisher üblichen Beschränkung bezüglich  $\frac{\Delta v}{v_0}$  besteht. Damit ergeben sich die Bewegungsgleichung für die zeitgemittelten Zustandsgrößen

$$v_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} = -\frac{2}{\kappa - 1} a_0 \frac{\partial a_0}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_0}{\partial r} \right) \quad (10)$$

die Bewegungsgleichungen für die komplexen Schwankungsgrößen

$$\begin{aligned} \frac{\partial v^*}{\partial t} + (v_0 + v^*) \frac{\partial v^*}{\partial x} + v_r^* \frac{\partial v^*}{\partial r} \\ = -a_0 \frac{\partial a^*}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v^*}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r^*}{\partial t} + v_r^* \frac{\partial v_r^*}{\partial r} + (v_0 + v^*) \frac{\partial v_r^*}{\partial x} \\ = -a_0 \frac{\partial a^*}{\partial r} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_r^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r^*}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_r^*}{\partial x^2} - \frac{v_r^*}{r^2} \right) \end{aligned} \quad (12)$$

und die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial a^*}{\partial t} + (v_0 + v^*) \frac{\partial a^*}{\partial x} + a_0 \left( \frac{\partial v^*}{\partial x} + \frac{\partial v_r^*}{\partial r} + \frac{v_r^*}{r} \right) = 0 \quad (13)$$

Infolge einer Separation der komplexen Schwankungsgrößen in der Form

$$a^* = \sum_{k=1}^n f_{ak}^* \bar{a}_k^* \quad (14)$$

$$v^* = \sum_{k=1}^n f_{vk}^* \bar{v}_k^* \quad (15)$$

$$v_r^* = \sum_{k=1}^n f_{rk}^* \bar{a}_k^* \quad (16)$$

werden die komplexen Funktionen

$f_a^*(r')$  = komplexe Schallgeschwindigkeitsverteilungsfunktion

$f_v^*(r')$  = komplexe Längsgeschwindigkeitsverteilungsfunktion

$f_r^*(r')$  = komplexe Radialgeschwindigkeitsverteilungsfunktion

eingeführt, die nur vom dimensionslosen Radius  $r' = r/R$  abhängen. Die Zeitabhängigkeit und die Ortsabhängig-

keit in Längsrichtung des Rohres verbleiben bei den querschnittsgemittelten Größen. Auch für den zeitgemittelten Geschwindigkeitsanteil wird ein Separationsansatz eingeführt.

$$v_o = f_o \bar{v}_o \quad (17)$$

Die folgenden Betrachtungen werden zunächst für eine harmonische Schwankung durchgeführt. Die Summation aller maßgeblich beteiligten harmonischen Schwankungen an einer zu betrachtenden beliebigen Periodizität erfolgt dann im Anschluß.

Für die Bewegungsdifferentialgleichung in Längsrichtung, diese soll hier als Beispiel für eine weitere Umwandlung angeführt werden, ergibt sich mit den Separationsansätzen (14), (15), (16) und (17) eine Differentialgleichung für  $f_v^*$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 f_v^*}{\partial r'^2} + \left( \frac{1}{r'} - \frac{1}{2} \frac{a^* R}{\nu} f_r^* \right) \frac{\partial f_v^*}{\partial r'} \\ & - \left\{ \frac{R^2}{\bar{v}^* \nu} \left[ \frac{\partial \bar{v}^*}{\partial t} + (v_o f_o + \bar{v}^* f_v^*) \frac{\partial \bar{v}^*}{\partial x} \right] - \frac{R^2}{\bar{v}^*} \frac{\partial^2 \bar{v}^*}{\partial x^2} \right\} f_v^* \\ & = \frac{R^2}{\bar{v}^* \nu} a_o \frac{\partial a^*}{\partial x} f_a^* \quad (18) \end{aligned}$$

Die Zeit- und Ortsableitungen der querschnittsgemittelten Größen werden aus den sich nach dem Wellenzeigerverfahren darstellbaren Beziehungen gebildet und lauten:

$$\frac{\partial \bar{v}^*}{\partial t} = i \omega \bar{v}^* \quad (19)$$

$$\frac{\partial \bar{a}^*}{\partial t} = i \omega \bar{a}^* \quad (20)$$

$$\frac{\partial \bar{v}^*}{\partial x} = -i \kappa_v^* \sqrt{1 - i R^*} \frac{\omega}{a_o} \bar{a}^* \quad (21)$$

$$\frac{\partial \bar{a}^*}{\partial x} = -i \kappa_a^* \sqrt{1 - i R^*} \frac{\omega}{a_o} \bar{v}^* \quad (22)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{v}^*}{\partial x^2} = -\kappa_a^* \kappa_v^* (1 - i R^*) \left( \frac{\omega}{a_o} \right)^2 \bar{v}^* \quad (23)$$

Die Größen  $\kappa_a^*$  und  $\kappa_v^*$  stehen mit  $K_a^*$  und  $K_v^*$  in (4) und (5) in Verbindung und resultieren somit aus der Verträglichkeit der querschnittsgemittelten, aus der Mittelung der querschnittsabhängigen Strömungsparameter sowie aus der unterschiedlichen Geschwindigkeit der hin- und rücklaufenden Partialwellen.

Werden die Ableitungen (19), (21) bis (23) in (18) eingesetzt, so ergibt sich eine Differentialgleichung für die komplexe Längsgeschwindigkeitsverteilungsfunktion, in der diese selbst, sowie die Verteilungsfunktionen für die Radial- und Schallgeschwindigkeit als Koeffizienten bzw. im Störglied enthalten sind.

Analog wird mit den Differentialgleichungen (12) und (13) verfahren, wobei durch eine Größenabschätzung

belegt, die Bewegungsgleichung in radialer Richtung reibungsfrei betrachtet werden kann, d. h. das gesamte Reibungsglied wird vernachlässigt. Berücksichtigt man, daß alle komplexen Verteilungsfunktionen nur vom dimensionslosen Radius abhängen, dann lassen sich alle partiellen Differentialgleichungen in gewöhnliche überführen. Somit ergibt sich aus den Bewegungsdifferentialgleichungen und der Kontinuitätsgleichung folgendes gewöhnliche Differentialgleichungssystem für die komplexen Verteilungsfunktionen

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 f_v^*}{dr'^2} + \left( \frac{1}{r'} - \frac{1}{2} \text{Re}^* Z^* T_a^* f_r^* \right) \frac{df_v^*}{dr'} \\ & + \left\{ \text{Ma}_\omega^2 \kappa_v^* \kappa_a^* (1 - i R^*) - i \text{Re}_\omega [1 - \kappa_v^* \sqrt{1 - i R^*} Z^* T_z^* \right. \\ & \left. \cdot (\text{Ma}_o f_o + \text{Ma}^* T_v^* f_v^*) \right\} f_v^* = -i \text{Re}_\omega \kappa_a^* \sqrt{1 - i R^*} f_a^* \quad (24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Pi_a^* T_a^* f_r^* \frac{df_r^*}{dr'} + i \text{Ma}_\omega [1 - \kappa_a^* \sqrt{1 - i R^*} Z^{*-1} T_z^{*-1} \\ & \cdot (\text{Ma}_o f_o + \text{Ma}^* T_v^* f_v^*)] f_r^* = -\frac{df_a^*}{dr'} \quad (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{df_r^*}{dr'} + \frac{1}{r'} f_r^* = -i \text{Ma}_\omega \left\{ [1 - \kappa_a^* \sqrt{1 - i R^*} Z^{*-1} T_z^{*-1} \right. \\ & \left. \cdot (\text{Ma}_o f_o + \text{Ma}^* T_v^* f_v^*)] f_a^* - \kappa_v^* \sqrt{1 - i R^*} f_v^* \right\} \quad (26) \end{aligned}$$

Hierin sind die Ähnlichkeitskennzahlen

$$\text{Re}^* = \frac{2|v^*| R}{\nu} = \text{Reynoldsche Zahl der Geschwindigkeitsschwankung}$$

$$\text{Re}_\omega = \frac{R^2 \cdot \omega}{\nu} = \text{modifizierte Reynoldsche Zahl}$$

$$\text{Ma}_o = \frac{\bar{v}_o}{a_o} = \text{Machzahl des zeitgemittelten Geschwindigkeitsanteiles}$$

$$\text{Ma}_\omega = \frac{R \omega}{a_o} = \text{modifizierte Machzahl}$$

$$\text{Ma}^* = \frac{|v^*|}{a_o} = \text{Machzahl der Geschwindigkeitsschwankung}$$

und die Verhältnisgrößen

$$\Pi_a^* = \frac{|a^*|}{a_o} = \text{komplexe Kompressibilität}$$

$$Z^* = \frac{|a^*|}{|v^*|} = \text{Amplitudenverhältnis der Wechselgrößen}$$

sowie

$$T_v^* = \exp[i(\omega t + \varphi_v)] = \text{komplexe Zeitfunktion für } \bar{v}^*$$

$$T_a^* = \exp[i(\omega t + \varphi_a)] = \text{komplexe Zeitfunktion für } \bar{a}^*$$

$$T_z^* = \exp[i(\varphi_a - \varphi_v)] = \text{komplexe Phasenschiebung}$$

enthalten. Die Ermittlung der komplexen Verteilungsfunktionen  $f_v^*$ ,  $f_r^*$  und  $f_a^*$  aus den vorstehenden nicht-linearen inhomogenen Differentialgleichungen erfolgt mittels eines iterativen Störansatzverfahrens.

Ausgehend von einer reinen inkompressiblen Betrachtung des Strömungsvorganges läßt sich das Differentialgleichungssystem (24) bis (26) auf eine lösbare Differentialgleichung für  $f_v^*$  reduzieren. Auf der Grundlage dieser inkompressiblen Lösung für  $f_v^*$  lassen sich aus (25) und (26) näherungsweise Lösungen für  $f_r^*$  und  $f_a^*$  ermitteln. Damit läßt sich wiederum eine verbesserte kompressible Lösung für  $f_v^*$  erreichen, indem man ausgehend von (24) einer inkompressibel formulierten homogenen Lösung eine kompressibel formulierte Partikulärlösung überlagert, welche die mit  $f_r^*$  und  $f_a^*$  und als Koeffizient mit  $f_v^*$  behafteten kompressibilitätsabhängigen Glieder als Störfunktion beinhaltet. Mit dieser so ermittelten komplexen Längsgeschwindigkeitsverteilungsfunktion muß nun geprüft werden, inwieweit sich die Lösungen für  $f_r^*$ ,  $f_a^*$  und somit wiederum für  $f_v^*$  wesentlich verbessern lassen.

#### 4. Die komplexen Verteilungsfunktionen als Erstlösungen

Unter der Voraussetzung eines inkompressiblen Fluidverhaltens, für das gilt:

$$a_0 \rightarrow \infty \quad \text{und damit} \quad Ma_0 \rightarrow 0, \quad Ma_\omega \rightarrow 0, \quad M\bar{a} \rightarrow 0$$

$$\bar{a}^* = 0 \quad \text{und damit} \quad \Pi\bar{a}^* = 0, \quad Z^* = 0$$

reduzieren sich (24) bis (26) auf eine Differentialgleichung vom Besselschen Typ für  $f_v^*$  in der Form

$$\frac{d^2 f_v^*}{dr_\omega^2} + \frac{1}{r_\omega} \frac{df_v^*}{dr_\omega} - f_v^* = -\kappa_a^* \sqrt{1 - iR^*} \quad (27)$$

mit  $r_\omega = \sqrt{i Re_\omega} \cdot r$  bzw.  $R_\omega = \sqrt{i Re_\omega}$ . Die an sich bekannte Lösung [8], [10] für die hier verwendete Form der Betrachtung lautet

$$f_v^* = \kappa_a^* \sqrt{1 - iR^*} [1 - J_0/0(r'_\omega)] \quad (28)$$

mit  $J_0/0 = J_0(r'_\omega)/J_0(\sqrt{i Re_\omega})$  worin J die modifizierten Besselfunktionen mit imaginärem Argument sind, der Index weist auf den Grad der Funktion hin. Mit der aus dem Separationsansatz (15) folgenden Bedingung

$$2 \int_{r=0}^1 f_v^* r' dr' = 1$$

ergibt sich  $\kappa_a^*$  zu

$$\kappa_a^* = \frac{1}{\sqrt{1 - iR^*} \left[ 1 - \frac{2 J_1/0(R'_\omega)}{\sqrt{i Re_\omega}} \right]} \quad (29)$$

und damit

$$f_v^* = \frac{1 - J_0/0(r'_\omega)}{1 - \frac{2}{\sqrt{i Re_\omega}} J_1/0(R'_\omega)} \quad (30)$$

Für große Werte von  $Re_\omega$  wird aus (30) unter Berücksichtigung der asymptotischen Darstellung von  $J_{1/0}(R'_\omega)$

$$f_v^* = 1 - J_0/0(r'_\omega). \quad (31)$$

Alle weiteren Betrachtungen sollen unter der Voraussetzung großer Werte von  $Re_\omega$  erfolgen, so daß weiterhin für  $f_v^*$  näherungsweise die Beziehung (31) verwendet wird.

Die Ermittlung der komplexen Radialgeschwindigkeitsverteilungsfunktion erfolgt aus den Differentialgleichungen (25) und (26), die durch entsprechende Umformung, d. h. differenzieren von (26) nach  $r'$ , eliminieren von  $df_a^*/dr'$  aus (25) und in die differenzierte Beziehung (26) eingesetzt, diese transformiert auf  $r'_{Ma\omega} = Ma_\omega r'$ , eine Differentialgleichung vom Besselschen Typ ergeben

$$\frac{d^2 f_r^*}{dr_{Ma\omega}^2} + \frac{1}{r'_{Ma\omega}} \frac{df_r^*}{dr'_{Ma\omega}} + \left(1 - \frac{1}{r_{Ma\omega}^2}\right) f_r^* = -i \frac{\sqrt{i Re_\omega}}{Ma_\omega} \kappa_a^* \kappa_v^* (1 - iR^*) J_{1/0}(r'_\omega). \quad (32)$$

Hierbei wurden Glieder kleiner Größenordnung vernachlässigt. Die Lösung dieser Differentialgleichung erfolgt unter der Voraussetzung kleiner Werte von  $r'_{Ma\omega}$  ( $r'_{Ma\omega} \ll 1$ ), so daß für die Bessel-Funktionen und deren Integration die Reihenentwicklungen um den Nullpunkt verwendet werden können. Mit den für die Radialgeschwindigkeit zutreffenden Randbedingungen:

für  $r'_{Ma\omega} = 0$  wird  $v_r^* = 0$  (Symmetriebedingung)

für  $r'_{Ma\omega} = Ma_\omega$  bzw.  $r' = 1$  wird  $v_r^* = 0$

(Rohrwandbedingung)

ergibt sich die komplexe Radialgeschwindigkeitsverteilungsfunktion zu

$$f_r^* = \sqrt{i} Ha_\omega^{-\frac{1}{2}} \kappa_a^* \kappa_v^* (1 - iR^*) [r' J_{1/0}(R'_\omega) - J_{1/0}(r'_\omega)]. \quad (33)$$

Hierin ist

$$Ha_\omega = \frac{Re_\omega}{Ma_\omega^2} = \frac{a_0^2}{\omega \cdot \nu}$$

eine modifizierte Hagenzahl bezüglich der Radialbewegung. Für große  $Re_\omega$  wird die komplexe Radialgeschwindigkeitsfunktion zu

$$f_r^* = \sqrt{i} Ha_\omega^{-\frac{1}{2}} \kappa_a^* \kappa_v^* (1 - iR^*) [r' - J_{1/0}(r'_\omega)]. \quad (34)$$

Der mögliche Wertebereich von  $Ha_\omega^{-\frac{1}{2}}$  deutet schon auf die geringe Größe von  $f_r^*$  und somit von  $v_r^*$  hin, obwohl

dadurch über den Einfluß auf eine kompressible Lösung für  $f_v^*$ , insbesondere im Grenzschichtbereich, noch nichts ausgesagt werden kann.

Eine Entwicklung der komplexen Schallgeschwindigkeitsverteilungsfunktion erfolgt aus der Differentialgleichung (25) unter Verwendung der Beziehungen (31) und (34) für  $f_v^*$  und  $f_r^*$ . Die Randbedingung für  $f_a^*$  an der Rohrwand ergibt sich aus der Betrachtung der Differentialgleichung (26) für  $r' = 1$ , wofür sich mit

$$f_v^*|_{r'=1} = 0 \quad \text{und} \quad f_r^*|_{r'=1} = 0 \quad \text{ergibt}$$

$$\left. \frac{df_r^*}{dr'} \right|_{r'=1} = -i Ma_\omega f_a^*|_{r'=1} \quad (35)$$

Infolge differenzieren nach  $r'$  und betrachten für  $r' = 1$  wird aus (34)

$$\left. \frac{df_r^*}{dr'} \right|_{r'=1} = -i Ha_\omega \frac{1}{2} \sqrt{Re_\omega} \kappa_v^* \kappa_a^* (1 - iR^*) \quad (36)$$

Gleichsetzen der Beziehungen (35) und (36) liefert die Randbedingung für  $f_a^*$

$$f_a^*|_{r'=1} = \kappa_a^* \kappa_v^* (1 - iR^*) \quad (37)$$

Unter Vernachlässigung von Gliedern kleiner Größenordnung ergibt sich aus der Integration der entsprechend umgeformten Differentialgleichung (25) und Berücksichtigung der Randbedingung (37) die komplexe Schallgeschwindigkeitsverteilungsfunktion zu

$$f_a^* = \kappa_a^* \kappa_v^* (1 - iR^*) \left\{ 1 - i Ha_\omega [\pi_a^* T_a^* (1 - r' J_{0/0}(r'_\omega)) - \frac{1}{2} (\pi_a^* T_a^* - \sqrt{i} Ma_\omega) (1 - r'^2)] \right\} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} g(r'_\omega) = & -\kappa_a^* \sqrt{1 - iR^*} - \pi_a^* T_a^* \kappa_a^* \kappa_v^* (1 - iR^*) \left[ \frac{1}{\sqrt{i Re_\omega}} r'_\omega J_{1/0}(r'_\omega) - J_{1/0}(r'_\omega) \right. \\ & - 2 Ma_0 Z^* T_z^* \kappa_v \sqrt{1 - iR^*} \left[ 1 - \frac{r_\omega^2}{i Re_\omega} + \frac{r_\omega^2}{i Re_\omega} J_{0/0}(r'_\omega) - J_{0/0}(r'_\omega) \right] \\ & \left. - \pi_a^* T_a^* \kappa_v \sqrt{1 - iR^*} (1 - 2 J_{0/0}(r'_\omega) + J_{0/0}^2(r'_\omega)) \right] \quad (41) \end{aligned}$$

Die Beziehung (38) zeigt, daß infolge  $Ha_\omega^{-1}$  und  $\pi_a^*$  bzw.  $Ma_\omega$  vor den eigentlichen Verteilungsfunktionen die Schallgeschwindigkeitsprofilierung sehr klein ist und zu Recht in den bisherigen Arbeiten von vornherein die Schallgeschwindigkeit über dem Rohrquerschnitt als konstant angenommen wird.

Mit der aus dem Separationsansatz (14) resultierenden Bedingung

$$2 \int_{r'=0}^1 f_a^* r' dr = 1$$

ergibt sich näherungsweise unter Vernachlässigung der Schallgeschwindigkeitsprofilierung

$$\kappa_v^* = \frac{1}{\kappa_v^* (1 - iR^*)} \quad (39)$$

## 5. Eine verbesserte kompressible Lösung für die komplexe Längsgeschwindigkeitsverteilungsfunktion

Die Bewegungsdifferentialgleichung (24) wird in eine bezüglich der homogenen Lösung bekannte Differentialgleichung vom Besselschen Typ umgeformt. Die hierbei nicht zu berücksichtigenden kompressibilitätsabhängigen Glieder der linken Seite sowie die rechte Seite von (24) werden unter Verwendung der bisher ermittelten Beziehungen für  $f_v^*$ ,  $f_r^*$  und  $f_a^*$  zu einer Störfunktion  $g(r'_\omega)$  zusammengefaßt. Die Lösung der sich ergebenden Differentialgleichung in der Form

$$\frac{d^2 f_v^*}{dr_\omega'^2} + \frac{1}{r'_\omega} \frac{df_v^*}{dr'_\omega} - f_v^* = g(r'_\omega) \quad (40)$$

mit

beinhaltet somit die Überlagerung einer inkompressibel formulierten homogenen Lösung mit einer die Kompressibilität berücksichtigenden Partikulärlösung. Dieses ist jedoch mit vertretbarem Aufwand nur für die Betrachtung großer Argumente der Bessel-Funktionen, also nur für große Werte von  $\sqrt{i Re_\omega} r'$  möglich. Das bedeutet, daß nur der äußere Bereich des Rohrquerschnittes betrachtet werden kann. Da für spätere Untersuchungen bezüglich der Reibung nur das Grenzschichtverhalten der Strömung entscheidend ist, kann eine Lösung nur für den Außenbereich des Rohrquerschnitts geltend, akzep-

tiert werden. Übrigens ist eine Lösung für kleine Argumente  $\sqrt{i Re_\omega} r'$ , d. h. eine Lösung für den Rohrmit-  
tenbereich, ebenfalls mit vertretbarem Aufwand zu ermitteln.

Unter Berücksichtigung der Randbedingungen für  $f_v^*$ , die lauten:

für  $r'_\omega = 0$  bzw.  $r' = 0$  gilt endliche Längsgeschwindigkeit,

für  $r'_\omega = \sqrt{i Re_\omega}$  bzw.  $r' = 1$  gilt  $f_v^* = 0$

ergibt sich eine verbesserte, den Kompressibilitätseinfluß berücksichtigende komplexe Längsgeschwindigkeitsver-  
teilungsfunktion für den äußeren Bereich des Rohrquerschnittes zu

$$\begin{aligned} f_v^* = & \kappa_a^* \sqrt{1-iR^*} [1-J_{0/0}(r'_\omega)] + \frac{1}{4} \Pi_a^* T_a^* \kappa_a^* \kappa_v^* (1-iR^*) \sqrt{i Re_\omega} (1-r'^2) J_{0/0}(r'_\omega) \\ & - \Pi_a^* T_a^* \kappa_v^* \sqrt{1-iR^*} [\sqrt{i Re_\omega} (1-r') J_{0/0}(r'_\omega) - (1-J_{0/0}(r'_\omega))] \\ & - Ma_0 Z^* T_z^* \kappa_v^* \sqrt{1-iR^*} [\sqrt{i Re_\omega} (1-r') J_{0/0}(r'_\omega) - 2(1-r'^2)] \end{aligned} \quad (42)$$

Für große  $Re_\omega$ -Werte in Verbindung mit der Erstlösung für  $f_v^*$  und der sich damit ergebenden Beziehung (29) so-  
wie mit der Beziehung (39) ergeben sich näherungsweise die aus der Verträglichkeit zwischen  $v^*$  und  $a^*$  resultie-  
renden Größen  $\kappa_a^*$  und  $\kappa_v^*$

$$\kappa_a^* = \kappa_v^* = \frac{1}{\sqrt{1-iR^*}}$$

und damit die komplexe Längsgeschwindigkeitsverteilungsfunktion zu

$$\begin{aligned} f_v^* = & [1-J_{0/0}(r'_\omega)] + \frac{1}{4} \Pi_a^* T_a^* \sqrt{i Re_\omega} (1-r'^2) J_{0/0}(r'_\omega) - \Pi_a^* T_a^* [\sqrt{i Re_\omega} (1-r') J_{0/0}(r'_\omega) \\ & - (1-J_{0/0}(r'_\omega))] - Ma_0 Z^* T_z^* [\sqrt{i Re_\omega} (1-r') J_{0/0}(r'_\omega) - 2(1-r'^2)] \end{aligned} \quad (43)$$

Eine erste Betrachtung von (42) bzw. (43) zeigt, daß diese Beziehungen einmal der Randbedingung bezüglich  $r' = 1$  genügen und sie zum anderen für verschwindende Kompressibilität auf die inkompressible Form für  $f_v^*$  (28) bzw. (31) zurückgeführt werden. Die numerische Auswertung von  $f_v^*$  auf der Grundlage der Beziehungen (42) bzw. (43) sowie eine Diskussion bezüglich weiterer Verbesserungen der Ergebnisse für  $f_r^*$ ,  $f_a^*$  und dann für  $f_v^*$  erfolgt in einem späteren Beitrag.

#### LITERATUR

- [1] Lutz, O.: Über Resonanzschwingungen in Ansaug- und Auspuffleitungen von Reihenmotoren. Deutsche Luftfahrtforschung 16 (1939) und 17 (1940).
- [2] Kuhlmann, P.: Berechnung von Schwingungen in den Rohrleitungen von Kolbenverdichtern. VDI-Forschungsheft 516 (1966).
- [3] Stehr, H.: Beitrag zur Berechnung von Gasschwingungen in Rohrleitungen und deren Einfluß auf den Gastransport durch sich periodisch öffnende Ventile am Beispiel von Ansauganlagen mehrzylindriger Verbrennungsmotoren. Diss. TH Merseburg 1971.
- [4] Stehr, H.: Die Berechnung der periodisch-instationären Gasströmungen in den verzweigten Rohrleitungssystemen von Hochdruck-Polyäthylen-Anlagen. Forschungsbericht zur VF 390-01-50-1, TH Karl-Marx-Stadt, Sektion Maschinen-Bauelemente 1978.
- [5] Leske, T.: Beitrag zur Berechnung der Luftschwingungen im Einlaßtrakt von aufgeladenen Schiffsdieselmotoren unter besonderer Berücksichtigung des Dämpfungsverhal-

tens des Ladeluftkühlers. Diss. Wilhelm-Pieck-Universität Rostock 1978.

- [6] Christ, A.: Periodische Gasströmungen mit großen Schwingungsamplituden in Rohrleitungen. Mitt. aus dem Institut für Thermodynamik und Verbrennungsmotoren der ETH Zürich, Nr. 17, 1955.
- [7] Schley, W.: Theoretische und experimentelle Untersuchungen zur analytischen Darstellung der Wellendämpfung in Leitungen von hydraulischen Einspritzsystemen. Diss. TU Berlin 1967.
- [8] Melcher, K.: Ein Reibungsmodell zur Berechnung von instationären Strömungen in Rohrleitungen an Brennkraftmaschinen. Diss. Universität Stuttgart 1974 s. auch: Bosch Technische Berichte 4 (1974), S. 273 - 290.
- [9] Sexl, T.: Über den von E. G. Richardson entdeckten Annulareffekt. Z. Physik 61 (1930), S. 349 - 362.
- [10] Lutz, O.: Die periodische, viskose Rohrströmung. Forsch. Ing.-Wes. 36 (1970), S. 184 - 191.
- [11] Uchida, S.: The pulsating viscous flow superposed on the steady laminar motion of incompressible fluid in a pipe. ZAMP 7 (1956), S. 403 - 422.
- [12] OHMI et. al.: Pressure and Velocity Distributions in Pulsating. Bulletin of the JSME. Vol. 19 No. 129 March 1976.
- [13] Benyo, P.: Flow of compressible viscous fluids in straight pipe under consideration of the radial speed.

Anschrift des Verfassers:

Dr.-Ing. H. Stehr  
Technische Hochschule  
Sektion Maschinen-Bauelemente  
9010 Karl-Marx-Stadt  
PSF 964