

# Die bandselektive Fouriertransformation und ihre Anwendung zur Simulation von Schmalbandprozessen

Friedrich Wahl

## 0. Einleitung

Methoden zur Simulation stochastischer Prozesse, die auf dem Algorithmus der Schnellen Fouriertransformation (FFT) basieren, haben in der theoretischen und in der experimentellen Forschung eine weite Verbreitung gefunden (siehe z. B. [1] bis [3]). Ein gewisser Nachteil dieser Verfahren besteht darin, daß die Frequenzauflösung der erzeugten Signale mit der z. Z. verfügbaren Technik nicht beliebig erhöht werden kann, wodurch besonders die Möglichkeiten zur Simulation schmalbandiger Zufallsprozesse eingeschränkt werden. Die Ursache liegt darin, daß bei der gewöhnlichen FFT der Spektralbereich stets bei der Nullkomponente beginnt und, daß damit die mögliche Anflösung von der Satzlänge der zu transformierenden Daten abhängt. Die Satzlänge ist jedoch praktisch nicht beliebig erweiterungsfähig, sondern sie stellt eine Kompromißlösung zwischen wirtschaftlichen Erwägungen und rechentechnischen Erfordernissen dar (Kernspeicherkapazität, Rechengenauigkeit, Auflösungsvermögen von Digital-Analog-Umsetzern u. a. m.). Ein z. Z. bei Klein- und Mikrorechnern sowie bei FFT-Prozessoren übliche Satzlänge liegt bei  $N = 1024$  Daten.

Die Simulation von Schmalbandprozessen führt unter den genannten Bedingungen aufgrund der unzureichenden Frequenzauflösung zu einer Verschlechterung der statistischen Eigenschaften der erzeugten Signale [4]. Eine weitere Einschränkung des verfügbaren Frequenzbereiches ergibt sich aus der Notwendigkeit, die über Digital-Analog-Umsetzer ausgegebenen Signale über analoge Tiefpässe zu filtern, um Spektralanteile oberhalb der halben Samplingfrequenz zu unterdrücken.

Einen Ausweg aus diesen Problemen ermöglicht die bandselektive Fouriertransformation, die für die Analyse von Signalen in kommerziell verfügbaren Systemen nach unterschiedlichen Prinzipien realisiert wurde, wie die sog. BSFA-Technik [5] und die sog. ZOOM-Transformation [6].

In den folgenden Ausführungen wird gezeigt, wie die ZOOM-Transformation zur Erzeugung von Signalen eingesetzt werden kann. Das Prinzip besteht darin, durch mehrmalige Anwendung der üblichen FFT auf ein Frequenzband mit anschließender Überlagerung der erhaltenen Zeitfunktionen dieses Frequenzband im Zeitbereich „aufzuspreizen“.

Um die Effektivität des Verfahrens voll auszunutzen, wird grundsätzlich von komplexen Werten im Zeitbereich ausgegangen. Dazu wird zunächst die in [6] beschriebene ZOOM-Transformation auf komplexe Eingangswerte erweitert. Im Pkt. 2. wird dann die Lösung

der dazu inversen Aufgabenstellung erläutert und unter Pkt. 3. ein Algorithmus zur Simulation von Schmalbandprozessen abgeleitet. Abschließend werden einige Hinweise zu einer günstigen rechentechnischen Aufbereitung gegeben.

## 1. Die komplexe ZOOM-Transformation

Es wird vorausgesetzt, daß  $2\beta N$  Werte

$$u(n), \quad n = 0, 1, \dots, (2\beta N - 1)$$

eines zu äquidistanten Zeitpunkten abgetasteten Signals  $u(t)$  vorliegen. Die Aufgabe besteht darin, die zugehörigen Spektralwerte  $U(k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, \beta N$  zu bestimmen.

Der Wert  $\beta$  stellt den sog. „ZOOM-Faktor“ dar, der bei praktischen Anwendungen in der Größenordnung 10 bis 100 liegt.

Der Grundgedanke des im folgenden beschriebenen Verfahrens zur Berechnung der  $U(k)$  besteht darin, daß nicht der gesamte Datensatz von  $2\beta N$  Werten  $u(n)$  simultan transformiert wird, sondern daß durch mehrmaliges Anwenden des FFT-Algorithmus auf Datensätze von nur  $N$  Werten Teilspektren erzeugt werden, deren Überlagerung das gesuchte Spektrum innerhalb eines gewünschten Frequenzbandes ergibt.

Dieses Vorgehen ermöglicht es, die Frequenzauflösung gegenüber dem herkömmlichen FFT-Algorithmus wesentlich zu erhöhen.

Um die Leistungsfähigkeit des Verfahrens voll auszuschöpfen, wird zunächst die reelle Ausgangsfolge  $u(n)$  zerlegt, indem die Werte  $u(n)$  mit geradem Index als Realität, die Werte mit ungeradem Index als Imaginärteil einer komplexen Folge

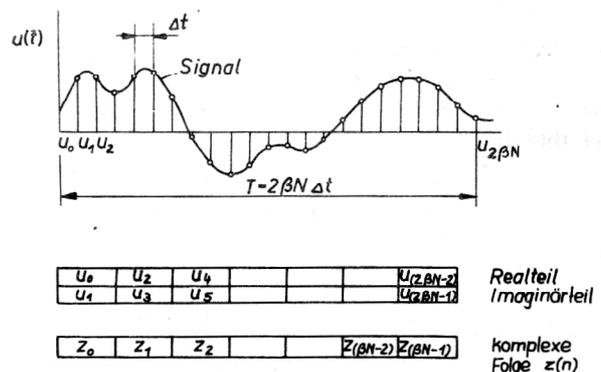


Bild 1  
 Signalverlauf und komplexe Abtastfolge  $z(n)$

$$z(n) = x(n) + j y(n); n = 0, 1, \dots (\beta N - 1) \quad (1)$$

aufgefaßt werden (vgl. Bild 1).

In den folgenden Ausführungen wird gezeigt, wie die ZOOM-Transformation auf die komplexe Folge  $z(n)$  angewendet werden kann.

Die Beziehung zu den gesuchten Spektralwerten der Folge  $z(n)$  wird durch die diskrete Fouriertransformation hergestellt. Man erhält für die Spektralwerte

$$Z(k) = \frac{1}{\beta N} \sum_{n=0}^{\beta N - 1} z(n) e^{-j \frac{k 2 \pi n}{\beta N}}; k = 0, 1, \dots (\beta N - 1) \quad (2)$$

Zerlegt man die Folge  $z(n)$  in komplexe Unterreihen nach folgendem Schema

$$\begin{aligned} \bar{z}_0(n) &= (z(0), z(\beta), z(2\beta), \dots, z(N\beta - \beta)); \\ \bar{z}_1(n) &= (z(1), z(\beta + 1), z(2\beta + 1), \dots, z(N\beta - \beta - 1)); \\ &\vdots \\ \bar{z}_{(\beta-1)}(n) &= (z(\beta - 1), z(2\beta - 1), \dots, z(N\beta - 1)) \end{aligned} \quad (3)$$

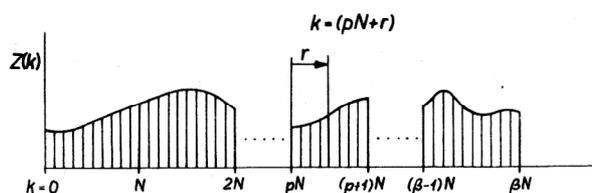
und führt die Teilsummen ein

$$\left. \begin{aligned} (k) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \bar{z}_0(n) e^{-j \frac{k 2 \pi n}{N}} \\ (k) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \bar{z}_1(n) e^{-j \frac{k 2 \pi n}{N}} \\ &\vdots \\ (\beta-1)(k) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \bar{z}_{(\beta-1)}(n) e^{-j \frac{k 2 \pi n}{N}} \end{aligned} \right\} k = 0, 1, \dots (\beta N - 1) \quad (4)$$

so wird aus Gl. (2):

$$Z(k) = \sum_{i=0}^{\beta-1} \bar{Z}_i(k) e^{-j \frac{k 2 \pi i}{\beta N}}; k = 0, 1, \dots (\beta N - 1) \quad (5)$$

Formal bietet Gl. (5) gegenüber Gl. (2) keine Vereinfachungen. Der entscheidende Vorteil der Zerlegung von Gl. (2) in Teilsummen nach Gl. (5) liegt aber darin, daß man die Spektralwerte  $\bar{Z}_i(k)$  gesondert über den FFT-Algorithmus berechnen kann. Dazu wird der gesamte Spektralbereich in Blöcke zu je  $N$  Werten zerlegt und für jeden Block ein neuer Laufindex  $r$  eingeführt (vgl. Bild 2).



**Bild 2**  
Aufteilung des Spektralbereiches

$$\begin{aligned} \text{Mit } k &= pN + r; \quad p = 0, 1, \dots (\beta - 1) \\ r &= 0, 1, \dots (N - 1) \end{aligned} \quad (6)$$

läßt sich Gl. (5) wesentlich vereinfachen.

Zunächst erhält man mit (6) für die Teilspektren (4):

$$\bar{Z}_i(k) = \bar{Z}_i(pN + r) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \bar{z}_i(n) e^{-j \frac{(pN+r)2 \pi n}{N}} = \bar{Z}_i(r),$$

mit

$$\bar{Z}_i(r) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \bar{z}_i(n) e^{-j \frac{r 2 \pi n}{N}}; r = 0, 1, \dots (N - 1). \quad (7)$$

Man ersieht daraus, daß die Teilspektren  $\bar{Z}_i(k)$  periodisch mit  $k = N$  sind und daß sie sich nach Gl. (7) gesondert über die FFT berechnen lassen.

Für die Exponentialfunktionen in Gl. (5) erhält man mit (6):

$$e^{-j \frac{k 2 \pi i}{\beta N}} = e^{-j \frac{(pN+r)2 \pi i}{\beta N}} = w_{pi} \cdot \alpha_i(r) \quad (8)$$

Hierbei wurde gesetzt

$$w_{pi} = e^{-j \frac{p 2 \pi i}{\beta}} \quad (9)$$

$$\alpha_i(r) = e^{-j \frac{r 2 \pi i}{\beta N}} \quad (10)$$

Unter Berücksichtigung von (6), (7), (9) und (10) wird aus der Gl. (5):

$$\beta Z(pN + r) = \sum_{i=0}^{\beta-1} w_{pi} \cdot \bar{Z}_i(r) \cdot \alpha_i(r); r = 0, 1, \dots (N - 1) \quad (11)$$

$$p = 0, 1, \dots (\beta - 1).$$

Die nächste Aufgabe besteht darin, aus den nach Gl. (11) errechneten Spektralwerten die gesuchten Spektralwerte  $U(k)$  der reellen Ausgangsfolge  $u(n)$  zu bestimmen.

Der Zusammenhang zwischen den Werten  $Z(k)$  und  $U(k)$  soll als nächstes erläutert werden:

Wegen (1) läßt sich Gl. (2) in der Form schreiben:

$$Z(k) = X(k) + j Y(k) \quad (12)$$

mit den komplexen Spektren

$$X(k) = \frac{1}{\beta N} \sum_{n=0}^{\beta N - 1} x(n) e^{-j \frac{k 2 \pi n}{\beta N}} \quad (13)$$

und

$$Y(k) = \frac{1}{\beta N} \sum_{n=0}^{\beta N - 1} y(n) e^{-j \frac{k 2 \pi n}{\beta N}}; \quad (14)$$

$$k = 0, 1, \dots (\beta N - 1).$$

Andererseits wird aus (12) wegen (13) und (14)

$$Z^*(\beta N - k) = X(k) - j Y(k) \quad (15)$$

Aus (12) und (15) erhält man die Beziehungen

$$2X(k) = Z(k) + Z^*(\beta N - k); \quad (16)$$

$$2jY(k) = Z(k) - Z^*(\beta N - k) \quad (17)$$

und für  $k = pN + r$

$$2X(pN + r) = Z(pN + r) + Z^*(\beta N - pN - r); \quad (18)$$

$$2jY(pN + r) = Z(pN + r) - Z^*(\beta N - pN - r); \quad (19)$$

$$r = 0, 1, \dots, (N - 1)$$

$$p = 0, 1, \dots, (\beta - 1).$$

Da zwischen den Teilspektren  $X(k)$ ,  $Y(k)$  und dem Spektrum  $U(k)$  der Zusammenhang besteht

$$2U(k) = X(k) + Y(k) e^{-j \frac{k \pi}{\beta N}}, \quad k = 0, 1, \dots, (\beta N - 1) \quad (20)$$

bzw. für die einzelnen Teilbereiche

$$2U(pN + r) = X(pN + r) + Y(pN + r) e^{-j \frac{(pN + r) \pi}{\beta N}}, \quad (21)$$

$$r = 0, 1, \dots, (N - 1)$$

$$p = 0, 1, \dots, (\beta - 1).$$

erhält man aus (21) mit (18) und (19) den gesuchten Zusammenhang zwischen den Spektralwerten  $U(k)$  und  $Z(k)$  der einzelnen Teilbereiche:

$$4U(pN + r) = Z(pN + r) + Z^*(\beta N - pN - r) - j [Z(pN + r) - Z^*(\beta N - pN - r)] e^{-j \frac{(pN + r) \pi}{\beta N}}; \quad (22)$$

$$r = 0, 1, \dots, (N - 1)$$

$$p = 0, 1, \dots, (\beta - 1).$$

Mit den Gleichungen (7), (11) und (22) sind die grundlegenden Beziehungen bereitgestellt, die es gestatten, die komplexe ZOOM-Transformation auf reelle Eingangsdaten anzuwenden. Es ergibt sich folgender Ablauf:

1. Aufstellen der Unterreihen nach (3);
2. Berechnung der Teilspektren  $\bar{Z}_i(r)$  nach Gl. (7) (komplexe FFT);
3. Aufsummieren der Teilspektren entsprechend Gl. (11), wobei man sich auf die Berechnung einer Zeile (bzw. eines Frequenzbandes) des Systems (11) beschränkt;
4. Berechnung der Spektralwerte  $U(k)$  der reellen Ausgangsfolge  $u(n)$  nach Gl. (22).

1) Die konjugiert-komplexen Werte werden mit einem Stern gekennzeichnet.

## 2. Die inverse ZOOM-Transformation

Die unter Pkt. 1. hergeleiteten Beziehungen gestatten es, die anfangs genannte Aufgabenstellung zu lösen:

Gegeben seien  $\beta N$  komplexe Spektralwerte  $U(k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, (\beta N - 1)$ , gesucht sei die Folge  $u(n)$ ,  $n = 0, 1, \dots, (2\beta N - 1)$  im Zeitbereich.

Die Grundlage der im folgenden beschriebenen Transformationsbeziehungen liefern die Gleichungen (7), (11) und (22), die in umgekehrter Reihenfolge nach den jeweiligen gesuchten Größen umgestellt werden.

Zunächst werden aus der Gl. (22) die  $Z(k)$  errechnet. Der Ausgangspunkt dazu ist Gl. (20), aus der folgt:

$$2U(pN + r) = X(pN + r) + Y(pN + r) e^{-j \frac{(pN + r) \pi}{\beta N}}; \quad (23)$$

$$2U^*(\beta N - pN - r) = X(pN + r) - Y(pN + r) e^{-j \frac{(pN + r) \pi}{\beta N}}; \quad (24)$$

$$r = 0, 1, \dots, (N - 1).$$

bzw.

$$X(pN + r) = U(pN + r) + U^*(\beta N - pN - r); \quad (25)$$

$$Y(pN + r) = [U(pN + r) - U^*(\beta N - pN - r)] e^{j \frac{(pN + r) \pi}{\beta N}}; \quad (26)$$

$$r = 0, 1, \dots, (N - 1).$$

Das Einsetzen der Gleichungen (25) und (26) in Gl. (12) liefert:

$$Z(pN + r) = U(pN + r) + U^*(\beta N - pN - r) + j [U(pN + r) - U^*(\beta N - pN - r)] e^{j \frac{(pN + r) \pi}{\beta N}}; \quad (27)$$

$$r = 0, 1, \dots, (N - 1)$$

wodurch Gl. (22) nach den unbekanntem Spektralwerten  $Z(k)$  umgestellt ist.

Der Zusammenhang zwischen den Spektralwerten  $Z(pN + r)$  und den Spektralwerten  $\bar{Z}_i(r)$  der Unterreihen wird durch die Gl. (11) beschrieben, aus der wegen

$$\sum_{p=0}^{\beta-1} w_{mp}^* \cdot w_{pi} = \begin{cases} \beta & \text{für } m = i \\ 0 & \text{für } m \neq i \end{cases} \quad (28)$$

folgt:

$$\bar{Z}_i(r) \cdot \alpha_i(r) = \sum_{p=0}^{\beta-1} w_{ip}^* \cdot Z(pN + r); \quad r = 0, 1, \dots, (n-1) \quad (29)$$

$$i = 0, 1, \dots, (\beta - 1)$$

Die Gleichungen (27) und (29) beschreiben die Grundlagen der inversen ZOOM-Transformation; sie stellen den Zusammenhang her zwischen den vorgegebenen Spektralwerten  $U(k)$  und den Spektralwerten  $\bar{Z}_i(r)$ , aus denen über die inverse FFT die in (3) angegebenen komplexen Unterreihen  $\bar{z}_i(n)$  errechnet werden können.

Die folgende Tabelle 1 zeigt noch einmal in übersichtli-

cher Form die grundlegenden Gleichungen der ZOOM-Transformation.

Tabelle 1 Grundbeziehungen der komplexen ZOOM-Transformation

ZOOM-Transformation	Zeitbereich $\longleftrightarrow$ Frequenzbereich
<b>Vorgegeben:</b>	
reelle Folge $u(n)$ ;	$n = 0, 1, \dots (2\beta N - 1)$
<b>Ausführung:</b>	
1. Bilden der komplexen Folge $z(n)$ ;	$n = 0, 1, \dots (\beta N - 1)$
2. Bilden der Unterreihen $\bar{z}_i(n)$ ;	$n = 0, 1, \dots (N - 1)$ $i = 0, 1, \dots (\beta - 1)$
3. Komplexe FFT	
$\bar{Z}_i(r) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \bar{z}_i(n) e^{-j \frac{r 2\pi n}{N}};$	$r = 0, 1, \dots (N - 1)$ $i = 0, 1, \dots (\beta - 1)$
4. $\beta Z(pN+r) = \sum_{i=0}^{\beta-1} w_{pi} \bar{Z}_i(r) \cdot \alpha_i(r);$	$r = 0, 1, \dots (N - 1)$ $p = 0, 1, \dots (\beta - 1)$
5. Berechnung der Spektralwerte $U(k)$	
$4 U(pN+r) = Z(pN+r) + Z^*(\beta N - pN - r) - j [Z(pN+r) - Z^*(\beta N - pN - r)] e^{-j \frac{(pN+r)\pi}{\beta N}}$	$r = 0, 1, \dots (N - 1)$ $p = 0, 1, \dots (\beta - 1)$
<b>Inverse ZOOM-Transformation</b>	<b>Frequenzbereich <math>\longleftrightarrow</math> Zeitbereich</b>
<b>Vorgegeben:</b>	
Komplexe Spektralwerte $U(k)$ ;	$k = 0, 1, \dots (\beta N - 1)$
<b>Ausführung:</b>	
1. Berechnung der Spektralwerte $Z(k)$	
$Z(pN+r) = U(pN+r) + U^*(\beta N - pN - r) + j [U(pN+r) - U^*(\beta N - pN - r)] e^{j \frac{(pN+r)\pi}{\beta N}}$	$r = 0, 1, \dots (N - 1)$ $p = 0, 1, \dots (\beta - 1)$
2. $\bar{Z}_i(r) = \alpha_i^*(r) \sum_{p=0}^{\beta-1} w_{ip}^* Z(pN+r);$	$r = 0, 1, \dots (N - 1)$ $i = 0, 1, \dots (\beta - 1)$
3. Komplexe FFT	
$\bar{z}_i(n) = \sum_{r=0}^{N-1} \bar{Z}_i(r) e^{j \frac{n 2\pi r}{N}};$	$n = 0, 1, \dots (N - 1)$ $i = 0, 1, \dots (\beta - 1)$
4. Abspeichern der Unterreihen $\bar{z}_i(n)$ ;	$i = 0, 1, \dots (\beta - 1)$
5. Bilden der komplexen Folge $z(n)$ , bzw. der reellen Folge $u(n)$ ;	$n = 0, 1, \dots (\beta N - 1)$ $n = 0, 1, \dots (2\beta N - 1)$

### 3. Erzeugung von Zufallssignalen

Mit Hilfe des unter Pkt. 2. beschriebenen Verfahrens der inversen ZOOM-Transformation ist es möglich, stochastische Schmalbandprozesse zu simulieren. Dazu wird aus der Leistungsspektraldichte  $S_{\xi\xi}(f)$  des Vorbild-Prozesses ein komplexes Amplitudenspektrum  $U(k)$  bestimmt, dessen Transformation in den Zeitbereich eine Realisierung  $u(n)$  dieses Prozesses liefert.

Zur Berechnung des komplexen Amplitudenspektrums wird gesetzt:

$$U(k) = U_k e^{j \frac{R_k \pi}{\beta N}} ; k = 0, 1, \dots, (\beta N - 1) \quad (30)$$

Die  $R_k$  sind gleichverteilte, unabhängige Zufallszahlen in  $(0, 2\beta N)$ , während die  $U_k$  die Beträge des zweiseitigen Amplitudenspektrums darstellen, die mit der zweiseitigen Leistungsspektraldichte in Beziehung stehen durch

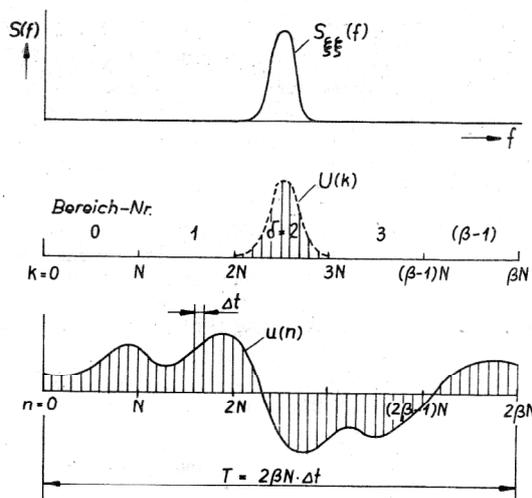
$$U_k = \sqrt{\frac{S_{\xi\xi}(k \Delta f)}{T}} \quad (31)$$

Es bedeuten (siehe Bild 3):

$$\text{Periodendauer der Realisierung } T = 2\beta N \Delta t = 2\beta N \cdot \frac{1}{f_s}$$

$$\text{Bandbreite } \Delta f = \frac{1}{T} = \frac{f_s}{2\beta N} ;$$

$f_s$  – Samplingfrequenz.



**Bild 3**  
Spektral- und Zeitbereich eines Schmalbandprozesses

Im weiteren wird vorausgesetzt, daß sich der gesamte Spektralbereich so aufteilen läßt, daß die Werte  $U(k)$  nur innerhalb eines Frequenzbandes (bzw. innerhalb eines Blockes von  $N$  Spektrallinien) ungleich Null sind (siehe Bild 3).

Diese Voraussetzung vereinfacht die rechentechnische Realisierung des im Pkt. 2 beschriebenen Verfahrens entscheidend und ermöglicht es, einen einfachen Algorithmus zur Erzeugung von Zufallssignalen abzuleiten. Setzt man Gl. (27) in die Gl. (29) ein, so erhält man:

$$\bar{Z}_i(r) = \alpha_i^* \sum_{p=0}^{\beta-1} w_{ip}^* \left\{ U(pN+r) + U^*(\beta N - pN - r) \right. \\ \left. + j [U(pN+r) - U^*(\beta N - pN - r)] e^{j \frac{(pN+r)\pi}{\beta N}} \right\} ; (32)$$

$r = 0, 1, \dots, (N-1)$   
 $i = 0, 1, \dots, (\beta-1)$ .

Wenn man die entsprechend Bild 3 aufgeteilten Frequenzbänder numeriert, wobei der Parameter  $\delta$  die Nummer des entsprechenden Bereiches angibt, in dem die Spektralwerte ungleich Null sind, so gilt für die Summendarstellung (32):

$$U(pN+r) = \begin{cases} U(\delta N+r) & \text{für } p = \delta \\ 0 & \text{für } p \neq \delta \end{cases} \quad (33)$$

$$U(\beta N - pN - r) = \begin{cases} U(\delta N + N - r) & \text{für } p = (\beta - 1 - \delta) \\ 0 & \text{für } p \neq (\beta - 1 - \delta) ; \\ & r = 1, 2, \dots, (N-1) \end{cases}$$

Für  $r = 0$  ergibt sich:

$$U(pN) = \begin{cases} U(\delta N) & \text{für } p = \delta \\ 0 & \text{für } p \neq \delta \end{cases} ; \quad (34)$$

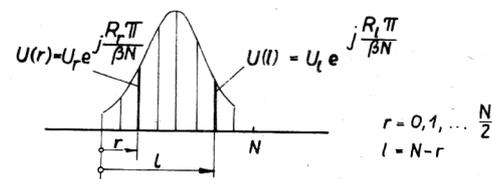
$$U(\beta N - pN) = \begin{cases} U(\delta N) & \text{für } p = (\beta - \delta) \\ 0 & \text{für } p \neq (\beta - \delta) \end{cases}$$

Für die weitere Rechnung wird der zusätzliche Index

$$l = N - r \quad (35)$$

eingeführt (siehe Bild 4), und zur Vereinfachung der Schreibweise wird gesetzt:

$$U(\delta N+r) \equiv U(r) ; U(\delta N+N-r) \equiv U(l)$$



**Bild 4**  
Spektralwerte des vorgegebenen Frequenzbandes

Unter Beachtung von (33) bis (35) erhält man aus der Summendarstellung (32) die folgenden endgültigen Gleichungen zur Berechnung der Spektralwerte  $\bar{Z}_i(r)$ :

$$\bar{Z}_i(r) = U_r (\cos \varphi_1 - \sin \varphi_2) + U_l (\cos \varphi_3 + \sin \varphi_4) \\ + j [U_r (\sin \varphi_1 + \cos \varphi_2) + U_l (\sin \varphi_3 - \cos \varphi_4)] ; (36)$$

$$\bar{Z}_i(l) = U_r(\cos\varphi_1 + \sin\varphi_2) + U_1(\cos\varphi_3 - \sin\varphi_4) + j[U_r(-\sin\varphi_1 + \cos\varphi_2) + U_1(-\sin\varphi_3 - \cos\varphi_4)]; \quad (37)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \left[ \frac{(\delta N + r) 2i + R_r}{2\beta} \right] \frac{2\pi}{N} \\ \varphi_2 &= \left[ \frac{(\delta N + r) (2i + 1) + R_r}{2\beta} \right] \frac{2\pi}{N} \\ \varphi_3 &= \left[ \frac{((\beta - \delta)N - 1) 2i - R_1}{2\beta} \right] \frac{2\pi}{N} \\ \varphi_4 &= \left[ \frac{((\beta - \delta)N - 1) (2i + 1) - R_1}{2\beta} \right] \frac{2\pi}{N} \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

$$r = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$$

$$l = N - r$$

$$i = 0, 1, \dots, (\beta - 1)$$

$$\bar{Z}_i(r=0) = U_0[\cos\varphi_{10} - \sin\varphi_{20} + \cos\varphi_{30} + \sin\varphi_{40} + j(\sin\varphi_{10} + \cos\varphi_{20} + \sin\varphi_{30} - \cos\varphi_{40})]; \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \text{mit } \varphi_{10} &= \varphi_1 \quad (r=0) \\ \varphi_{20} &= \varphi_2 \quad (r=0) \\ \varphi_{30} &= \varphi_3 \quad (l=0) \\ \varphi_{40} &= \varphi_4 \quad (l=0) \end{aligned} \quad (40)$$

Die Gleichungen (36) bis (40) bilden die Grundlage für eine bandselektive Simulation von Zufallsprozessen. Für den Algorithmus ergibt sich der folgende Ablauf (vgl. auch Tabelle 1):

1. Beginnend mit  $i = 0$ :  
Aufbau des komplexen Feldes  $\bar{Z}_i(r)$  nach den Gleichungen (36) bis (40).
2. Inverse Fouriertransformation (FFT),  
Abspeichern der komplexen Unterreihe  $\bar{z}_i(n)$  (siehe (3))
3. Wiederholung der Schritte 1. und 2. für  $i = 1, 2, \dots, (\beta - 1)$

Im Ergebnis der Rechnung liegen  $\beta N$  komplexe Werte  $z(n)$  bzw.  $2\beta N$  reelle Werte  $u(n)$  einer Realisierung im Zeitbereich vor. Dabei können, ohne die Brauchbarkeit des Verfahrens einzuschränken, die  $\bar{Z}_i(r=0)$  generell zu Null erklärt werden, wodurch die Gleichungen (39) und (40) entfallen und der Ablauf des Algorithmus erleichtert wird.

#### 4. Rechentechnische Realisierung

Die Effektivität der Verfahren hängt wesentlich von der programmtechnischen Aufbereitung der Gleichungen (36) bis (38) ab. Beschränkt man sich für den Wert des ZOOM-Faktors  $\beta$  auf Potenzen von 2, so lassen sich die in Klammern gesetzten Ausdrücke in (38) ohne Multi-

plikationen nur durch Additionen und Verschiebungen bestimmen.

Zur Berechnung der in den Gln. (36) und (37) benötigten trigonometrischen Funktionen werden die Größen  $\varphi_\mu(r)$  bereitgestellt in der Form

$$\varphi_\mu(r) = (K_\mu + \epsilon_\mu) \frac{2\pi}{N}; \quad \mu = 1, 2, 3, 4 \quad (41)$$

mit  $K_\mu < N$ , natürliche Zahl  
und  $|\epsilon_\mu| < 1$ .

Die Werte  $K_\mu$  werden durch Abspalten ganzzahliger Vielfacher von  $N$  erhalten, was in einem Assembler-Programm leicht durch Maskierungen möglich ist. Mit (41) erhält man für die trigonometrischen Funktionen

$$\begin{aligned} \sin\varphi_\mu &\approx \sin \frac{2\pi K_\mu}{N} + \epsilon_\mu \frac{2\pi}{N} \cos \frac{2\pi K_\mu}{N} \\ \cos\varphi_\mu &\approx \cos \frac{2\pi K_\mu}{N} - \epsilon_\mu \frac{2\pi}{N} \sin \frac{2\pi K_\mu}{N}; \end{aligned} \quad (42)$$

$$\mu = 1, 2, 3, 4$$

wobei die Funktionswerte  $\sin \frac{2\pi K_\mu}{N}$  und  $\cos \frac{2\pi K_\mu}{N}$  der für den FFT-Algorithmus bereitgestellten Tabelle der Exponentialfunktion  $\exp j \left[ \frac{2\pi K}{N} \right]$ ,  $K = 0, 1, \dots$ , entnommen werden.

Auf diese Weise läßt sich erreichen, daß die Gesamt-rechenzeit der inversen ZOOM-Transformation durch den Aufbau der komplexen Felder  $\bar{Z}_i(r)$  nicht merklich beeinflusst wird, sondern im wesentlichen von der durch den ZOOM-Faktor  $\beta$  bestimmten Anzahl der komplexen FFT abhängt.

#### LITERATUR

- [1] Mohr, H.: Numerische Simulation stochastischer Vektorprozesse unter Verwendung der Schnellen Fouriertransformation, Tagung Festkörpermechanik, Dynamik und Getriebetechnik, 1979 in Dresden, Bd. C, S. XXXVIII/1 - 18. VEB Fachbuchverlag Leipzig 1979.
- [2] Styles, D. D., Dodds, C. J., Simulation of Random Environments for Structural Dynamics Testing. Experimental Mechanics, Nov. 1976, S. 416 - 424.
- [3] Ramsey, K. A.: Effective Measurements for Structural Dynamics Testing, Part II. Sound and Vibration, April 1976, S. 18 - 31.
- [4] Forschungsberichte Experimentelle und theoretische Ermittlung stochastischer Kenngrößen. TH Magdeburg, 1981, unveröffentlicht.
- [5] McKinney, W.: Band Selectable Fourier Analysis. Hewlett-Packard Journal, April 1975, S. 20 - 24.
- [6] Thrane, N.: ZOOM-FFT Brüel & Kjaer Technical Review, Nr. 2, 1980.

Anschrift des Verfassers:

Dr.-Ing. Friedrich Wahl  
Technische Hochschule  
„Otto von Guericke“  
Sektion Maschinenbau  
3010 Magdeburg  
PSF 124