

Berechnung ebener Grenzschichtströmungen mit Hilfe unstetiger Wirbelschichten

Tibor Czibere

Innerhalb der Strömungsgrenzschichten kann die Strömung wirbelbehaftet betrachtet werden. Daher stellt die Grenzschicht gleichzeitig auch eine Wirbelschicht dar. Die Wirbeldichtefunktion hat an der Oberfläche des Körpers eine Unstetigkeitsstelle bzw. einen Pol. Von diesem Grundgedanken ausgehend gibt die Arbeit ein Verfahren zur Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes von ebenen Grenzschichtströmungen an.

1. Einleitung

Es ist bekannt, daß sich die Wirkung der realen Flüssigkeiten bei großen Reynolds-Zahlen auf eine dünne Grenzschicht beschränkt. Außerhalb dieser Schicht kann die Strömung mit Hilfe des reibungslosen Flüssigkeitsmodells beschrieben werden. Das bedeutet, daß die reale Strömung im Fall großer Reynolds-Zahlen außerhalb der Grenzschicht als Potentialströmung angesehen und das Strömungsbild durch Verfahren der Potentialtheorie bestimmt werden kann. Diese Verfahren sind dadurch charakterisiert, daß sie sich auf partikuläre Lösungen der Laplace-Gleichung stützen, die die gegebenen Randbedingungen erfüllen. Die Laplace-Gleichung kann sowohl für die Geschwindigkeits-Potentialfunktion als auch für die Stromfunktion der wirbellosen Strömung aufgeschrieben werden. Die in der Grenzschicht sich ausbildende Strömung ist eine wirbelbehaftete Strömung, womit die Verfahren, die ausgezeichnet für die Bestimmung der Potentialströmung geeignet sind, für die Grenzschichtströmung nicht unmittelbar verwendet werden können. Gleichzeitig stellt sich aber die Frage, ob vielleicht irgendein Verfahren zum Ergebnis führt, das sich auf die Bestimmung des Vektorpotentials der wirbelbehafteten Strömung stützt. Dieser Weg ist möglich, wenn die Wirbelverteilung der Grenzschicht bekannt ist.

Im folgenden wird ein neues Verfahren zur Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes gezeigt, das sich innerhalb und außerhalb der Grenzschicht um dünne Profile ausbildet. Die theoretische Grundlage des Verfahrens besteht darin, daß die Grenzschichtströmung ersetzt wird durch ein Geschwindigkeitsfeld, das von Wirbelschichten induziert wird, die sich in der Grenzschicht ausbilden. Mit Hilfe des Vektorpotentials dieser Wirbelschichten können die Geschwindigkeiten bestimmt werden. Da das Vektorpotential des wirbelbehafteten Geschwindigkeitsfeldes im Fall zweidimensionaler Strömungen durch die Stromfunktion ausgedrückt werden kann, läßt sich die Bestimmung des durch die Wirbelschicht induzierten Geschwindigkeitsfeldes auf die Lösung der für die Grenzschichtströmung aufgeschriebenen Poisson'schen Gleichung der Stromfunktion zurückführen.

2. Die Grenzschicht als Wirbelschicht

Es wird eine ebene, wirbelbehaftete Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit in der x, y -Ebene angenommen. Die Strömung sei stationär. In diesem Fall kann die Geschwindigkeits- und die Wirbelverteilung als Funktion von x, y wie folgt aufgeschrieben werden:

$$\vec{c} = u(x, y) \vec{i} + v(x, y) \vec{j}$$

$$\vec{\omega} = -\omega(x, y) \vec{k}$$

Hierbei wird angenommen, daß $\omega(x, y)$ positiv ist, wenn die Drehrichtung des Wirbelvektors dem Uhrzeigersinn entspricht. Die zwei Gleichungen, die die behandelte zweidimensionale Strömung beschreiben, sind die Kontinuitätsgleichung und die Gleichung, die die Wirbelstärke der Strömung ausdrückt:

$$\text{div } \vec{c} = 0, \text{ bzw. } \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\text{rot } \vec{c} = 2\vec{\omega} \text{ bzw. } \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -2\omega(x, y) \quad (2)$$

Es ist bekannt, daß das Geschwindigkeitsfeld der wirbelbehafteten Strömung aus einem Vektorpotential durch Rotationsbildung ermittelt werden kann:

$$\vec{c} = \text{rot } \vec{\Omega} \quad (3)$$

Wenn man diesen Zusammenhang in die Gleichung (2) einsetzt und für $\vec{\Omega}$ voraussetzt, daß $\text{div } \vec{\Omega} = 0$ ist, dann ergibt sich bekannterweise für das Vektorpotential $\vec{\Omega}$ die folgende Gleichung:

$$\Delta \vec{\Omega} = -2\vec{\omega}$$

Daraus, daß $\vec{\omega}$ auf der Ebene x, y senkrecht steht, ergibt sich, daß nur die auf der Ebene x, y senkrechte Komponente des Vektorpotentials $\vec{\Omega}$ von 0 unterschiedlich ist. Auf Grund des Zusammenhanges (3) ist leicht einzusehen, daß diese Komponente gleich der Stromfunktion $\Psi(x, y)$ ist. Für diese ebene, wir-

belbehafte Strömung der inkompressiblen Flüssigkeit, und zwar für deren Stromfunktion, wird letztlich die Poisson'sche Gleichung gewonnen:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 2\omega(x, y) \quad (4)$$

Wenn bei dieser Gleichung die Wirbelverteilung der reibungsbehafteten Flüssigkeitsströmung in der Ebene x, y durch die Funktion $2\omega(x, y)$ beschrieben wird und diese Funktion bekannt ist, dann ist die ebene Geschwindigkeitsverteilung der reibungsbehafteten Flüssigkeitsströmung durch die Lösung der Poisson'schen Gleichung (4) bestimmbar.

Zunächst ist die Geschwindigkeits- und die Wirbelverteilung, die sich um eine in die parallele Strömung gelegte dünne Platte ausbildet, zu überprüfen. Es ist leicht einzusehen, daß die Wirbelverteilung einerseits nur innerhalb der Grenzschicht von 0 unterschiedlich ist und andererseits an der gewölbten Platte eine Unstetigkeitsstelle hat.

In der Grenzschicht kann die Wirbelverteilung durch eine unstetige und hinter der Platte in der Geschwindigkeitsdelle durch eine stetige Funktion beschrieben werden. Im Bild 1 ist die Geschwindigkeits- und die Wirbelverteilung auf den beiden Seiten einer gewölbten Platte dargestellt.

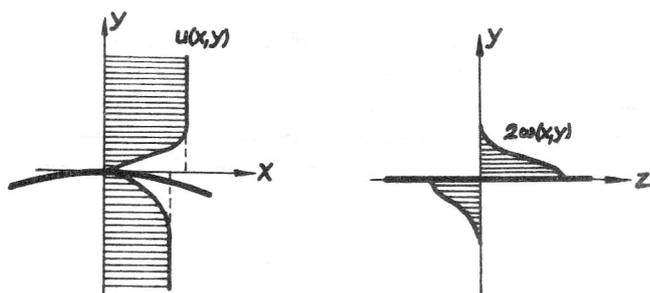


Bild 1

Auf der konvexen Seite ist die Grenzschicht dünner und sind die Geschwindigkeiten größer als auf der konkaven Seite. Man kann aus der Abbildung auch entnehmen, daß entsprechend der positiven Krümmung der Platte das „positive“ Gebiet der Wirbelverteilung größer ist als das „negative“. Wird die Bewegung der reibungslosen Flüssigkeit als Grenzfall der reibungsbehafteten Flüssigkeit ($\nu \rightarrow 0$) aufgefaßt, dann kann geschlußfolgert werden, daß durch das Verschwinden der Grenzschicht an der gekrümmten Platte – im Gegensatz zur ebenen Platte – das Geschwindigkeitsfeld seine Stetigkeit verliert. Der Geschwindigkeitssprung, der sich auf der so entstandenen Unstetigkeitsfläche ausbildet, repräsentiert eine Wirbelverteilung entlang einer Linie in der Ebene x, y . Wie bekannt ist, bildet diese Erkenntnis die Grundlage der bei Tragflügelprofilen angewandten Berechnungsverfahren, die sich auf die Theorie der hydrodynamischen Singularitäten stützen [1], [2]. Daraus kann die Schlußfolgerung gezogen werden, daß das sich um die dünne Platte, die in die

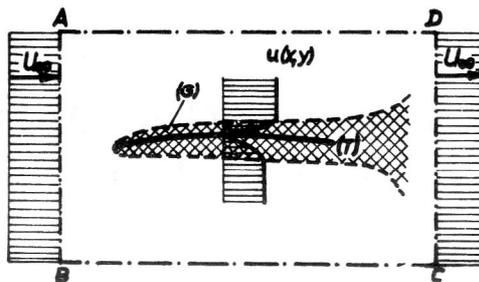


Bild 2

reibungsbehaftete Flüssigkeitsströmung gelegt wird, ausbildende Geschwindigkeitsfeld (Bild 2) eigentlich das Geschwindigkeitsfeld einer endlichen Wirbelschicht ist.

Der Definitionsbereich der Wirbelschicht ist die Grenzschicht und die dünne Nachlaufschicht hinter der Platte. Die ursprünglich wirbelfreie Parallelströmung wird infolge der Reibung in dieser Schicht zu einer wirbelbehafteten Strömung. Der Definitionsbereich der Wirbelschicht erstreckt sich in Strömungsrichtung bis zu der Entfernung, in der die Strömung wieder ungestört ist. Die Wirbeldichtefunktion der Wirbelschicht ist die Funktion $2\omega(x, y)$. Sie hat entlang der Platte eine Unstetigkeitsstelle (siehe Bild 1), ist aber im Gebiet T stetig.

3. Das Geschwindigkeitsfeld der Wirbelschicht

Im folgenden wird das Geschwindigkeitsfeld der Strömung, die im Bild 2 skizziert ist, bestimmt. Im Gebiet T liegt eine wirbelbehaftete Strömung vor und die Wirbeldichte wird durch die bekannte Funktion $2\omega(x, y)$ beschrieben. Außerhalb des Gebietes T ist die Strömung wirbelfrei, womit die Wirbeldichte gleich 0 sein muß. Die Stromfunktion dieser Strömung erfüllt entsprechend den früheren Überlegungen die folgende Gleichung:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \begin{cases} 2\omega(x, y); & \text{für } x, y \in (T), \\ 0; & \text{für } x, y \in (I). \end{cases} \quad (5)$$

Die Randbedingung kann in dem behandelten Fall sehr leicht angegeben werden. Das Gebiet ABCD wird so groß gewählt, daß an der gesamten Begrenzung die Geschwindigkeit U_∞ einer ungestörten Parallelströmung vorhanden ist.

Die Stromfunktion ergibt sich an einem beliebigen Punkt P (x, y) innerhalb des Gebietes ABCD durch Anwendung des Green'schen Satzes

$$\Psi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{(ABCD)} \Delta \Psi \ln(d) dA + \frac{1}{2\pi} \oint_{(L)} \frac{\partial \Psi}{\partial n} \ln(d) ds - \frac{1}{2\pi} \oint_{(L)} \Psi \frac{\partial(\ln d)}{\partial n} ds, \quad (6)$$

Hierbei ist L die Begrenzung des Gebietes $ABCD$, n die in das Gebietsinnere gerichtete Normale und

$$d = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} \quad (7)$$

der Abstand zwischen dem Aufpunkt

$P(x, y)$ und dem laufenden Punkt der Integration $Q(x', y')$. Aus dem Zusammenhang (6) wird durch Differentiation die konjugiert komplexe Geschwindigkeit \bar{c} gewonnen:

$$\bar{c} = u - i v = \frac{\partial \Psi}{\partial y} + i \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial(i\Psi)}{\partial x} - i \frac{\partial(i\Psi)}{\partial y} \quad (8)$$

Mit der komplexen Veränderlichen $z = x + iy$ gilt der Ausdruck:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\ln d) - i \frac{\partial}{\partial y} (\ln d) = \frac{1}{z-z'}$$

Aus der Gleichung (6) mit einer der Gleichung (8) entsprechenden Differentiation erhält man für die konjugiert komplexe Geschwindigkeit, die in einem beliebigen Punkt des Gebietes $ABCD$ entsteht, folgende Gleichung:

$$\bar{c} = \frac{i}{2\pi} \int_{(ABCD)} \frac{\Delta \Psi}{z-z'} dA + \frac{i}{2\pi} \oint_{(L)} \frac{\partial \Psi}{\partial n} \frac{ds}{z-z'} - \frac{i}{2\pi} \oint_{(L)} \Psi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{z-z'} \right) ds. \quad (9)$$

Weil $1/(z-z')$ entlang L überall stetig ist, gilt:

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{z-z'} \right) = i \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{z-z'} \right).$$

Damit läßt sich das dritte Integral der Gleichung (9) umformen zu:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \oint_{(L)} \Psi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{z-z'} \right) ds &= - \frac{1}{2\pi} \oint_{(L)} \Psi \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{z-z'} \right) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \oint_{(L)} \frac{\partial \Psi}{\partial s} \frac{ds}{z-z'}. \end{aligned}$$

Für die konjugiert komplexe Geschwindigkeit wird unter Beachtung der Gleichung (5) die Gleichung gewonnen:

$$\bar{c}(z) = \frac{i}{2\pi} \int_{(T)} \frac{2\omega}{z-z'} dA + \frac{i}{2\pi} \oint_{(L)} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial s} + i \frac{\partial \Psi}{\partial s} \right) \frac{ds}{z-z'} \quad (10)$$

Da die Geschwindigkeit entlang L voraussetzungsgemäß konstant ist, kann das Linienintegral ausgerechnet werden.

Der Ausdruck

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n} + i \frac{\partial \Psi}{\partial s} = c_t - i c_n = \bar{c} e^{i\chi}$$

ist bekannt, wobei c_t die tangentielle und c_n die normale Komponente der Geschwindigkeit entlang einer gegebenen Kurve, in diesem Fall entlang L , und die Neigung dieser Kurve zur x -Achse gleich χ ist. Damit folgt

$$\begin{aligned} \frac{i}{2\pi} \oint_{(L)} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial n} + i \frac{\partial \Psi}{\partial s} \right) \frac{ds}{z-z'} &= \frac{i}{2\pi} \oint_{(L)} U_\infty \frac{dz'}{z-z'} = \\ &= U_\infty. \end{aligned}$$

Aus der Gleichung (10) ergibt sich für das Geschwindigkeitsfeld der in die ebene Parallelströmung gelegten Wirbelschicht der Ausdruck

$$\bar{c}(z) = \frac{i}{2\pi} \int_{(T)} \frac{2\omega(x', y')}{z-z'} dA + U_\infty \quad (11)$$

Dabei ist $z = x + iy$ der Aufpunkt im Innern des Gebietes $ABCD$, $z' = x' + iy'$ der laufende Integrationspunkt im Gebiet T , $2\omega(x, y)$ die Wirbeldichtefunktion der Wirbelschicht, deren Definitionsbereich T ist, und U_∞ die Geschwindigkeit der ungestörten Parallelströmung. Auf Grund der Gleichung (11) werden die folgenden Integralausdrücke für die Geschwindigkeitskomponenten gewonnen:

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{(T)} 2\omega(x', y') \frac{y-y'}{(x-x')^2 + (y-y')^2} dA + U_\infty, \quad (12)$$

$$v(x, y) = - \frac{1}{2\pi} \int_{(T)} 2\omega(x', y') \frac{x-x'}{(x-x')^2 + (y-y')^2} dA. \quad (13)$$

Unter Beachtung der unterschiedlichen Eigenschaften des logarithmischen Potentials [3], [4] kann zusammenfassend festgestellt werden:

1. Die Stromfunktion der ebenen Strömung der realen Flüssigkeit kann durch das logarithmische Potential der Wirbelschicht, die für das gleiche Gebiet wie die Strömungsgrenzschicht definiert ist, ausgedrückt werden.
2. Wenn die Wirbeldichtefunktion der Wirbelschicht im Definitionsbereich abschnittsweise eine stetige und eindeutige Funktion des Ortes ist, ist auch in den Punkten der Ebene x, y , die außerhalb des Definitionsbereiches der Wirbelschicht liegen, das logarithmische Potential der Wirbelschicht einschließlich seiner Ableitungen endlich, eindeutig und stetig, und in den Punkten, die die Wirbelschicht von außen beliebig annähern, auf der Grenzkurve oder im Innern der Grenzkurve liegen, das logarithmische Potential der Wirbelschicht einschließlich seiner ersten Ableitung endlich, eindeutig und stetig.
3. Nach den Beziehungen (12) und (13) sind die Geschwindigkeitskomponenten die ersten Ableitungen des logarithmischen Potentials der Wirbelschicht,

folglich sind sie endliche, eindeutige und stetige Funktionen des Ortes in der ganzen Ebene.

4. Wenn die Wirbeldichtefunktion der Wirbelschicht in der Richtung der Normalen n entlang einer Kurve innerhalb ihres Definitionsbereiches eine Polstelle erster Ordnung hat, ergeben sich gegenüber den Aussagen entsprechend Punkt 2 und 3 Veränderungen in der Hinsicht, daß die Ableitung des logarithmischen Potentials der Wirbelschicht in der Richtung n entlang der Kurve gleich $-\infty$ wird. Folglich wird die tangentielle Geschwindigkeit auch gleich $-\infty$.

4. Die Wirbeldichtefunktion der Wirbelschicht

Die Wirbelschicht, die sich um eine dünne, in die ebene Parallelströmung gelegte Platte ausbildet, ist im Bild 3 dargestellt. Die Skelettlinie der dünnen Platte sei $y_G(x)$, die Grenzlinie der Wirbelschicht wird auf der Saugseite $y_G + \delta_S$ und auf der Druckseite $y_G - \delta_D$ bezeichnet. In einem Schnitt der Skelettlinie wird die Verteilung der Wirbeldichtefunktion der Wirbelschicht dargestellt. Zuerst wird eine mögliche Variante der Dichtefunktion $2\omega(x, y)$ gezeigt.

Das Oberflächenintegral der Wirbeldichtefunktion, bezogen auf das Gebiet T der Wirbelschicht, liefert die Zirkulation Γ , die die Auftriebskraft auf die dünne Platte bewirkt:

$$\Gamma = \int_{(T)} 2\omega(x, y) dA \quad (14)$$

Da das Integral der Wirbeldichtefunktion in der Geschwindigkeitsdelle verschwindet, kann das Integral (14) in der Form

$$\Gamma = \int_{x=0}^L \int_{y=y_G-\delta_D}^{y_G+\delta_S} 2\omega(x, y) dy dx \quad (14.1)$$

geschrieben werden.

Für das erste Integral wird die Bezeichnung eingeführt

$$\gamma(x) = \int_{y_G-\delta_D}^{y_G+\delta_S} 2\omega(x, y) dy \quad (15)$$

Diese Funktion entspricht der Wirbelbelegung $\gamma_{id}(x)$ entlang einer Kurve, durch die die Wirbeldichtefunktion der Wirbelfläche, die im reibungslosen Grenzfall die dünne Platte G hydrodynamisch ersetzt, angegeben wird. Im Fall einer ebenen Platte, deren Anstellwinkel zur ebenen Strömung mit der Geschwindigkeit U_∞ gleich Null ist, muß natürlich das Integral (15) verschwinden.

Aus der Theorie der hydrodynamischen Singularitäten ist bekannt [2], daß die Geschwindigkeitskomponenten, die entlang der schwach gewölbten Platte entstehen, im reibungslosen Fall wie folgt bestimmt werden können:

$$U(x) = U_\infty \pm \frac{1}{2} \gamma_{id}(x), \quad (16)$$

$$V(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^L \gamma_{id}(x) \frac{dx'}{x-x'}. \quad (17)$$

Der Zusammenhang zwischen der Kurve G und den Geschwindigkeitskomponenten wird aus der Bedingung gewonnen, daß entlang G keine Querströmung möglich ist.

$$\frac{dy_G}{dx} = \frac{V(x)}{U_\infty} \quad (18)$$

Somit ergibt sich, daß zwischen der Form der Kurve G und der Funktion $\gamma_{id}(x)$ ein eindeutiger Zusammenhang besteht. Für die Berechnung der Geschwindigkeitskomponenten, die durch die Gleichungen (16) und (17) gegeben sind, muß die Wirbeldichtefunktion $\gamma_{id}(x)$ gegeben sein. Wie üblich, ist zwischen zwei Fällen zu unterscheiden, die in der Tragflügeltheorie als erste bzw. zweite Hauptaufgabe bezeichnet werden. Die erste Hauptaufgabe besteht darin, das Profil – in diesem Falle $y_G(x)$ – aus der Geschwindigkeitsverteilung bzw. der Funktion $\gamma_{id}(x)$ zu bestimmen.

Die zweite Hauptaufgabe ist die Bestimmung des Geschwindigkeitsfeldes der reibungsfreien Strömung, die sich bei unterschiedlichem Anstellwinkel um das gegebene Profil $y_G(x)$ ausbildet.

Im letzten Fall ist $\gamma_{id}(x)$ die gesuchte Funktion. In Details der Rechnung wird auf die Fachliteratur hingewiesen [2], [5]. In den weiteren Untersuchungen wird die Funktion $\gamma_{id}(x)$ als gegeben angenommen.

Die Grenzlinie der Wirbelschicht, die sich um die gewölbte Platte mit der Skelettlinie G ausbildet, stimmt mit der Grenzlinie der sich hier ausbildenden Strömungsgrenzschicht überein. Außerhalb der Grenzschicht ist die Strömung wirbelfrei. Die Grenzschichtdicke δ kann durch eine Beziehung, die aus dem Verfahren von E. Truckenbrodt [6] bekannt ist, leicht bestimmt werden. Sie ist sowohl für die turbulente als auch für die laminare Grenzschicht geeignet. Im Fall einer gewölbten Platte muß Rücksicht darauf genommen werden, daß sich der Druck in der Richtung der Strömung verändert. Wenn sowohl die laminare als auch die turbulente Grenzschicht entlang der Platte als homogen angesehen wird, wobei vernachlässigt wird, daß die turbulente Grenzschicht am Anfang laminar ist, bekommt man für die Grenzschichtdicke die Gleichung (19), die sowohl für laminare als auch für turbulente Grenzschicht gilt:

$$\frac{\delta}{L} = \alpha \cdot \frac{c_w}{2} \left(\frac{U}{U_\infty} \right)^{-3} \left[\int_0^{x/L} \left(\frac{U}{U_\infty} \right)^{3+\frac{2}{n}} d\left(\frac{x}{L}\right) \right]^{\frac{n}{n+1}} \quad (19)$$

In diesem Ausdruck bedeutet α das Verhältnis von Grenzschichtdicke δ zu Impulsverlustdicke ϑ und c_w ist der Widerstandsbeiwert der ebenen Platte. Die Werte betragen im laminaren Fall:

$c_w = 1,328 \text{ Re}^{-0,5}$; $\alpha \cong 7,6$; $n = 1$; und im turbulenten Fall: $c_w = 0,074 \text{ Re}^{-0,2}$; $\alpha \cong 10$; $n = 4$.

Die mit dem Integral (15) definierte Funktion $\gamma(x)$ bzw. die entsprechende Funktion $\gamma_{id}(x)$ bei gewölbter Platte verschwinden nicht, so daß (auf der Saug- und Druckseite der Platte) der Wert von $U(x)$ und folglich die Dicke der Grenzschicht (und der Wirbelschicht) unterschiedlich ist. Deshalb ist die Grenzkurve der Wirbelschicht auf der Saugseite $y_G(x) + \delta_S(x)$ und auf der Druckseite $y_G(x) - \delta_D(x)$. Die Unstetigkeitsstelle der Wirbelschicht ist die Kurve $y_G(x)$. Die Wirbel dichtefunktion der Wirbelschicht wird wie folgt gewählt:

$$2\omega(x,y) = \begin{cases} \frac{U_\infty}{\delta_S(x)} f_S\left(\frac{x}{L}, \frac{y-y_G(x)}{\delta_S(x)}\right); & y_G < y \leq y_G + \delta_S \\ \frac{U_\infty}{\delta_D(x)} f_D\left(\frac{x}{L}, \frac{y-y_G(x)}{\delta_D(x)}\right); & y_G - \delta_D \leq y < y_G \end{cases} \quad (20)$$

Es wurde schon erwähnt, daß die Wirbel dichtefunktion $2\omega(x,y)$ entlang $y_G(x)$ eine Unstetigkeitsstelle hat (Bild 3) und ihr Integral über das Gebiet T der Wirbelschicht die der Zirkulation Γ entsprechende, auf die Platte wirkende Auftriebskraft ergibt. Wenn man also das Geschwindigkeitsfeld einer reibungsbehafteten Flüssigkeitsströmung entlang einer Platte, deren Skelettlinie durch die Kurve $y_G(x)$ gegeben ist, bestimmen will, müssen zuerst die in der Gleichung (20) enthaltenen Funktionen f_S und f_D passend gewählt werden. Diese Funktionen bestimmen in entscheidendem Maße das Geschwindigkeitsprofil der Grenzschichtströmung entlang der Platte, das als Rechenergebnis gewonnen wird. Weiterhin müssen diese Funktionen so gewählt werden, daß die mit ihrer Hilfe gewonnenen Rechenergebnisse mit den Ergebnissen der Versuche übereinstimmen. In Anbetracht dessen, daß meistens turbulente Strömungen in den technischen Anwendungen vorkommen, wird die Verwendbarkeit der Theorie am Beispiel der turbulenten Grenzschicht dargestellt.

Entsprechend den Berechnungsverfahren eignen sich im Fall der turbulenten Grenzschicht besonders die folgenden Funktionen:

$$f_S\left(\frac{x}{L}, \frac{y-y_G}{\delta_S}\right) = A\left(\frac{x}{L}\right) \left[1 - \frac{y-y_G}{\delta_S}\right] + C \frac{\delta_S}{y-y_G} \quad (21)$$

$$f_D\left(\frac{x}{L}, \frac{y-y_G}{\delta_D}\right) = A\left(\frac{x}{L}\right) \left[1 + \frac{y-y_G}{\delta_D}\right] + C \frac{\delta_D}{y-y_G}$$

wobei $A\left(\frac{x}{L}\right) = \gamma_{id}(x)/U_\infty$ und $C = 0,10 \dots 0,15$ ist.

Werden diese Funktionen in den Ausdruck (20) eingesetzt, so läßt sich der Ausdruck für die Wirbel dichtefunktion $2\omega(x,y)$ gewinnen und ist entsprechend der Gleichung (15) in der Richtung y zu integrieren. Für die Wirbelbelegung, die sich entlang der in die ebene Parallelströmung gelegten, gewölbten Platte ausbildet und gleichzeitig auf die Skelettlinie der Plat-

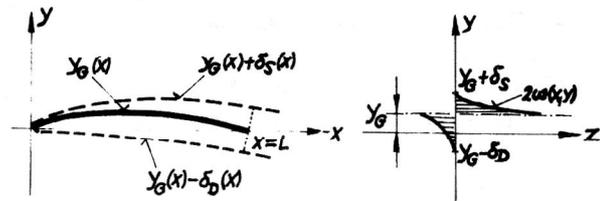


Bild 3

te lokalisiert ist, ergibt sich als Ergebnis der Integration:

$$\gamma(x) = U_\infty A\left(\frac{x}{L}\right) + U_\infty C \ln \frac{\delta_S}{\delta_D} \quad (22)$$

Das erste Glied auf der rechten Seite dieser Gleichung ist eigentlich die Wirbelverteilung $\gamma_{id}(x)$ entlang einer Linie, die die gewölbte Platte mit der Skelettlinie $y_G(x)$ im reibungsfreien Fall hydrodynamisch ersetzt.

Das zweite Glied bedeutet eine Korrektur, deren Integral immer negativ ist, weil auf dem größten Teil der Platte $\delta_S < \delta_D$ ist. Durch die Korrektur wird die Reibung berücksichtigt. Sie gibt die Verteilung $\Delta\gamma_S$ an, die durch die Reibung im turbulenten Fall gegenüber der reibungsfreien Wirbelverteilung $\gamma_{id}(x)$ entsteht. Da das Integral von $\Delta\gamma_S$ negativ ist, wird durch die Korrektur die Auftriebskraft, die auf die Platte wirkt, verringert.

Somit kann die in der Gleichung (22) definierte Funktion $\gamma(x)$ mit der Wirbelbelegung entlang einer Linie, die die gewölbte Platte mit der Skelettlinie $y_G(x)$ in der turbulenten Strömung hydrodynamisch ersetzt, identifiziert werden. Das Integral über x dieser Wirbelverteilung liefert die Zirkulation, die der realen Auftriebskraft entspricht.

Aus den vorangegangenen Überlegungen ist leicht einzusehen, daß im Fall einer ebenen Platte, deren Anstellwinkel gleich Null ist, auch $y_G(x) = 0$, $\delta_S(x) = \delta_D(x)$ und $A(x/L) = 0$ sind.

So ist auch $\gamma(x) = 0$. Das bedeutet, daß bei einer längsangeströmten ebenen Platte keine Auftriebskraft existiert, was mit der Erfahrung übereinstimmt.

5. Berechnung der Geschwindigkeitskomponenten

Die Integralausdrücke (12) und (13), die für die Geschwindigkeitskomponenten, die durch unstetige Wirbelschichten induziert sind, gewonnen wurden, müssen auf die Form, die den numerischen Rechnungen entspricht, gebracht werden. Wie gesagt, kann die Wirbel dichtefunktion $2\omega(x,y)$ in zwei Anteile getrennt werden. Der erste Anteil ist die Wirbelverteilung $2\omega_{id}(x,y)$, durch die die Auftriebskraft, die in der entsprechenden reibungsfreien Strömung auftritt, entsteht. Den zweiten Anteil bildet die unstetige Wirbelverteilung $2\omega_{II}(x,y)$, wodurch der Geschwindigkeitsabfall in der reibungsbehafteten Grenzschicht verursacht wird.

Dementsprechend werden die Ausdrücke der Geschwindigkeitskomponenten u_{id} , v_{id} und u_{II} , v_{II} , die durch die zwei Anteile der Wirbel dichtefunktion induziert wurden,

aufgeschrieben. Im folgenden werden zur Berechnung der einzelnen Geschwindigkeitskomponenten die Formeln für die aus den Beziehungen (21) bestimmten Wirbel dichtefunktionen aufgeschrieben.

Die Wirbelverteilung, die die Auftriebskraft induziert, lautet

$$2\omega_{id}(x,y) = \begin{cases} \frac{U_\infty}{\delta_s} A\left(\frac{x}{L}\right) \left[1 - \frac{y-y_G}{\delta_s}\right]; y_G < y \leq y_G + \delta_s, \\ \frac{U_\infty}{\delta_D} A\left(\frac{x}{L}\right) \left[1 + \frac{y-y_G}{\delta_D}\right]; y_G - \delta_D \leq y < y_G \end{cases} \quad (23)$$

und die Wirbelverteilung, die den Geschwindigkeitsabfall in der Grenzschicht verursacht,

$$2\omega_H(x,y) = \begin{cases} U_\infty \frac{C}{y-y_G}; y_G < y \leq y_G + \delta_s, \\ U_\infty \frac{C}{y-y_G}; y_G - \delta_D \leq y < y_G \end{cases} \quad (24)$$

Die numerische Berechnung der Geschwindigkeitskomponenten kann auf Integrale über x' zurückgeführt werden, wenn die Gleichungen (23) und (24) in die Integralausdrücke (12) und (13) eingesetzt werden und die innere Integration über y' durchgeführt wird. Für die inneren Integrale über y' werden die Ausdrücke eingeführt:

$$J_{uid}(x,y;x') = \frac{A(x')}{\delta'_D} \int_{y'_G - \delta'_D}^{y'_G} \left(1 + \frac{y' - y'_G}{\delta'_D}\right) \frac{y - y'}{(x-x')^2 + (y-y')^2} dy' + \frac{A(x')}{\delta'_s} \int_{y'_G}^{y'_G + \delta'_s} \left(1 - \frac{y' - y'_G}{\delta'_D}\right) \frac{y - y'}{(x-x')^2 + (y-y')^2} dy' \quad (25)$$

$$J_{vid}(x,y;x') = \frac{A(x')}{\delta'_D} \int_{y'_G - \delta'_D}^{y'_G} \left(1 + \frac{y' - y'_G}{\delta'_D}\right) \frac{x - x'}{(x-x')^2 + (y-y')^2} dy' + \frac{A(x')}{\delta'_s} \int_{y'_G}^{y'_G + \delta'_s} \left(1 - \frac{y' - y'_G}{\delta'_D}\right) \frac{x - x'}{(x-x')^2 + (y-y')^2} dy' \quad (26)$$

$$J_{uH}(x,y;x') = C \int_{y'_G - \delta'_D}^{y'_G + \delta'_s} \frac{1}{y' - y'_G} \cdot \frac{y - y'}{(x-x')^2 + (y-y')^2} dy' \quad (27)$$

$$J_{vH}(x,y;x') = C \int_{y'_G - \delta'_D}^{y'_G + \delta'_s} \frac{1}{y' - y'_G} \cdot \frac{x - x'}{(x-x')^2 + (y-y')^2} dy' \quad (28)$$

In den Gleichungen (25) bis (28) sind die folgenden Ausdrücke vereinfachend dargestellt:

$$y_G(x') = y'_G, \quad \delta_D(x') = \delta'_D \\ \delta_s(x') = \delta'_s, \quad A\left(\frac{x'}{L}\right) = A(x')$$

Die Integrale (27) bis (28) stellen den Cauchy'schen Hauptwert dar. Nach Durchführung der Integration entstehen die Gleichungen:

$$J_{uid} = \frac{A(x')}{\delta'_D} \left[\left(1 + \frac{y - y'_G}{\delta'_D}\right) \frac{1}{2} \ln \frac{(x-x')^2 + (y - y'_G + \delta'_D)^2}{(x-x')^2 + (y - y'_G)^2} + \frac{x-x'}{\delta'_D} \left(\arctan \frac{y - y'_G + \delta'_D}{x-x'} - \arctan \frac{y - y'_G}{x-x'} \right) - 1 \right] - \frac{A(x')}{\delta'_s} \left[\left(1 - \frac{y - y'_G}{\delta'_s}\right) \frac{1}{2} \ln \frac{(x-x')^2 + (y - y'_G - \delta'_s)^2}{(x-x')^2 + (y - y'_G)^2} - \frac{x-x'}{\delta'_s} \left(\arctan \frac{y - y'_G - \delta'_s}{x-x'} - \arctan \frac{y - y'_G}{x-x'} \right) - 1 \right], \quad (29)$$

$$J_{vid} = \frac{A(x')}{\delta'_D} \left[\left(1 + \frac{y - y'_G}{\delta'_D}\right) \left(\arctan \frac{y - y'_G + \delta'_D}{x-x'} - \arctan \frac{y - y'_G}{x-x'} \right) - \frac{x-x'}{2\delta'_D} \ln \frac{(x-x')^2 + (y - y'_G + \delta'_D)^2}{(x-x')^2 + (y - y'_G)^2} \right] - \frac{A(x')}{\delta'_s} \left[\left(1 - \frac{y - y'_G}{\delta'_s}\right) \left(\arctan \frac{y - y'_G - \delta'_s}{x-x'} - \arctan \frac{y - y'_G}{x-x'} \right) + \frac{x-x'}{2\delta'_s} \ln \frac{(x-x')^2 + (y - y'_G - \delta'_s)^2}{(x-x')^2 + (y - y'_G)^2} \right], \quad (30)$$

$$J_{uH} = C \frac{y - y'_G}{(x-x')^2 + (y - y'_G)^2} \left[\ln \frac{\delta'_s}{\delta'_D} + \frac{1}{2} \ln \frac{(x-x')^2 + (y - y'_G + \delta'_D)^2}{(x-x')^2 + (y - y'_G - \delta'_s)^2} \right] + C \frac{x - x'}{(x-x')^2 + (y - y'_G)^2} \left[\arctan \frac{y - y'_G - \delta'_s}{x-x'} - \arctan \frac{y - y'_G + \delta'_D}{x-x'} \right], \quad (31)$$

$$J_{vH} = C \frac{x - x'}{(x-x')^2 + (y - y'_G)^2} \left[\ln \frac{\delta'_s}{\delta'_D} + \frac{1}{2} \ln \frac{(x-x')^2 + (y - y'_G + \delta'_D)^2}{(x-x')^2 + (y - y'_G - \delta'_s)^2} \right] - C \frac{y - y'_G}{(x-x')^2 + (y - y'_G)^2} \left[\arctan \frac{y - y'_G - \delta'_s}{x-x'} - \arctan \frac{y - y'_G + \delta'_D}{x-x'} \right] \quad (32)$$

Mit diesen vier Funktionen können die entsprechenden vier Geschwindigkeitskomponenten berechnet werden:

$$\left. \begin{matrix} u_{id}(x,y) \\ u_H(x,y) \end{matrix} \right\} = \frac{U_\infty}{2\pi} \int_0^L \begin{matrix} J_{uid}(x,y;x') \\ J_{uH}(x,y;x') \end{matrix} dx' \quad (33)$$

$$\left. \begin{matrix} v_{id}(x,y) \\ v_H(x,y) \end{matrix} \right\} = -\frac{U_\infty}{2\pi} \int_0^L \begin{matrix} J_{vid}(x,y;x') \\ J_{vH}(x,y;x') \end{matrix} dx' \quad (34)$$

Bei der numerischen Integration muß darauf geachtet werden, daß die Integranden J_u und J_v in der Umgebung von $x' = x$ sehr starke Unterschiede aufweisen und an der Stelle $x' = x$ nicht differenzierbar sind. Wenn sich das Wertepaar x, y innerhalb der Grenzschicht befindet, ist J_v unstetig. Dieses Problem läßt sich aber durch entsprechende Verteilung und Anzahl der Integrationslaufpunkte gut überbrücken. Wenn die Geschwindigkeitskomponenten, die sich mit Hilfe der Integrale (33) und (34) bestimmen lassen, bekannt sind, können die Geschwindigkeitskomponenten der Strömung um die gewölbte Platte, die in die ebene Parallelströmung gelegt ist, sowohl innerhalb als auch außerhalb der Grenzschicht, also in der ganzen Ebene x, y berechnet werden. Die Untersuchungen gelten für die Fälle der schwach gewölbten Platte, weshalb dafür zu sorgen ist, daß die Gleichungen (33) und (34) mit den durch das Tropfenprofil induzierten Geschwindigkeiten ergänzt werden [2]:

$$u_q(x,y) = \frac{U_\infty}{2\pi} \int_0^L q^*(x') \frac{x-x'}{(x-x')^2 + (y-y'_G)^2} dx' \quad (35)$$

$$v_q(x,y) = -\frac{U_\infty}{2\pi} \int_0^L q^*(x') \frac{y-y'_G}{(x-x')^2 + (y-y'_G)^2} dx', \quad (36)$$

Dabei bedeutet q^* die dimensionslose dem Tropfenprofil entsprechende Quellen-Senken-Verteilung:

$$q^* = \frac{B_0}{\sqrt{\frac{x}{L}}} + b_0 + \sum_n b_n \left(\frac{x}{L}\right)^n.$$

Bei der Berechnung der Grenzschichtströmung muß in diesem Fall darauf geachtet werden, daß die Geschwindigkeit der Potentialströmung $U(x)$ entlang $y_G(x)$ um den Wert von $u_q(x, y_G)$ größer ist als im Fall der gewölbten Platte, die keine Dicke hat. So wird die in der Beziehung (19) stehende Geschwindigkeit U nicht durch die Formel (16) berechnet, sondern durch die Beziehung

$$U(x) = U_\infty + u_q(x, y_G) \pm \frac{1}{2} \gamma_{id}(x). \quad (37)$$

Die berechneten Geschwindigkeiten sind streng genommen nur entlang der Skelettlinie $y_G(x)$ gültig. Weil hier schwach gewölbte dünne Profile behandelt werden, können die Geschwindigkeitskomponenten, die entlang der Skelettlinie berechnet wurden, auf die Konturlinie des Profils transformiert und die Geschwindigkeitskomponenten u_{id}, v_{id}, u_H, v_H ohne Änderung verlegt werden. Das gesamte Verfahren ist schon aus der Tragflügeltheorie bekannt. Zur Berechnung der Geschwindigkeitskomponenten ist hinzuzufügen, daß die Wirbeldichten, die mit den Beziehungen (23) und (24) gegeben sind, nur als passend ausgewählte Beispiele aufgefaßt werden sollten, die nur dafür da sind, die Anwendbarkeit dieses Verfahrens zu demonstrieren. Die Wirbeldichte kann nicht nur in einer anderen Form, sondern auch z. B. punktweise gegeben werden. Die analytischen Ausdrücke (23) und (24) sind hauptsächlich im Interesse rechen technischer Vereinfachungen gewählt worden. Die Ergebnisse stimmen aber gut mit den Versuchen überein.

6. Einschätzung der Auftriebs- und Widerstandskraft

Bei der Beziehung (22) wurde schon darauf hingewiesen, daß die Auftriebskraft, die auf die in die Strömung gelegte gewölbte Platte wirkt, infolge realer Flüssigkeitsströmung kleiner wird als bei der Berechnung des reibungsfreien Falles. Zur Abschätzung der Auftriebskraft kann das Integral des zweiten Gliedes der rechten Seite der Gleichung (22) verwendet werden. Wenn die Zirkulationsabnahme, die durch die Reibung verursacht wird, $\Delta\Gamma_s$ ist, so gilt:

$$\Delta\Gamma_s = U_\infty C \int_0^L \ln \frac{\delta_D(x)}{\delta_s(x)} dx > 0. \quad (38)$$

Die entsprechende Auftriebsabnahme ist

$$\Delta F_A = \rho U_\infty \Delta\Gamma_s = \rho U_\infty^2 C \int_0^L \ln \frac{\delta_D(x)}{\delta_s(x)} dx. \quad (39)$$

Die Auftriebskraft ergibt sich durch die Integration der Gleichung (22) in der folgenden Form

$$F_A = \rho U_\infty^2 \left[\int_0^L \frac{\gamma_{id}(x)}{U_\infty} dx - C \int_0^L \ln \frac{\delta_D(x)}{\delta_s(x)} dx \right]. \quad (40)$$

Der Unterschied zwischen Grenzschichtdicke und Impulsverlustdicke besteht nur in einem konstanten Faktor, so daß in der Gleichung (40) statt δ_D/δ_s auch ϑ_D/ϑ_s genommen werden kann. Für die Widerstandskraft, die auf die gewölbte Platte oder auf das Tragflügelprofil wirkt, gilt [7]:

$$F_w = \rho U_\infty^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u}{U_\infty} \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy = \rho U_\infty^2 2\vartheta_\infty$$

Hierbei soll u/U_∞ hinter dem Profil in der Entfernung liegen, bei der im Nachlauf schon Umgebungsdruck vorhanden ist. Die hier auf der einen Seite sich ergebende Impulsverlustdicke wird durch ϑ_∞ gekennzeichnet. So ist die ganze Impulsverlustdicke im Nachlauf hinter dem Profil gleich $2\vartheta_\infty$.

Zur genauen Bestimmung gibt es kein zuverlässiges Verfahren. Deshalb ist eine Abschätzung erforderlich. Die einfachste Abschätzung ergibt sich, wenn der Wert $2\vartheta_\infty$ mit der Gesamtimpulsverlustdicke (für die Saug- und Druckseite zusammen) im Ausgangspunkt gleichgesetzt wird. Somit ergibt sich die Formel für die Widerstandskraft:

$$F_w = \rho U_\infty^2 (\vartheta_{sk} + \vartheta_{Dk}). \quad (41)$$

Die darin enthaltenen ϑ_{sk} - und ϑ_{Dk} -Werte können aus den Grenzschichtdicken, die sich aus der Gleichung (19) ergeben, bestimmt werden:

$$\vartheta_{sk} + \vartheta_{Dk} = \frac{1}{\alpha} (\delta_{sk} + \delta_{Dk}). \quad (42)$$

Unter Berücksichtigung von

$$F = c_{w,A} \frac{\rho}{2} U_\infty^2 L$$

und auf Grund der Gleichungen (40) und (41) ergibt sich der Auftriebswert c_A und der Widerstandsbeiwert c_w in der Form

$$c_A = 2 \left[\int_0^1 \frac{\gamma_{id}}{U_\infty} d\left(\frac{x}{L}\right) - C \int_0^1 \ln \frac{\delta_D}{\delta_s} d\left(\frac{x}{L}\right) \right] \quad (43)$$

bzw.

$$c_w = 2 \left(\frac{\vartheta_{sk}}{L} + \frac{\vartheta_{Dk}}{L} \right) \quad (44)$$

Die Beziehungen (43) und (44) können zur Einschätzung der Auftriebs- und Widerstandskraft bei der gewölbten Platte oder dem Tragflügelprofil benutzt werden.

Das hier vorgestellte Berechnungsverfahren wurde am Beispiel der Umströmung einer ebenen Platte und eines Tragflügelprofils erprobt. Über die Ergebnisse dieser Berechnungen wird in einem folgenden Artikel berichtet.

LITERATUR:

- [1] Birnbaum, W.: Die tragende Wirbelfläche als Hilfsmittel zur Behandlung des ebenen Problems der Tragflügeltheorie ZAMM 3 (1923), 290.
- [2] Scholz, N.: Aerodynamik der Schaufelgitter Bd. I, G. Braun Karlsruhe 1965, 157 – 177.
- [3] Frank, PH.-Mises, R.: Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik Bd. I, Dover Publ. New York – F. Vieweg Braunschweig 1961, 592 – 597.
- [4] Korn, A.: Lehrbuch der Potentialtheorie Bd. II, F. Dümmers Verl. Berlin 1901, 41 – 68.
- [5] Czibere, T.: A hidrodinamikai recselmelet ket föfeladatanak potencialelemeleti megoldasa, Akademiai doktori értekezés 1965.
- [6] Truckenbrodt, E.: Ein Quadraturverfahren zur Berechnung der laminaren und turbulenten Reibungsschicht bei ebener und rotationssymmetrischer Strömung, Ing. Arch. 20 1952, 211.
- [7] Schlichting, H.: Grenzschicht-Theorie, G. Braun Karlsruhe 1965, 699 – 709.
- [8] Tietjens, O.: Strömungslehre, Springer Berlin – Heidelberg – New York 1970, 223.
- [9] Szablewski, W.: Turbulente Scherströmung, Akademie-Verlag, Berlin 1976, 70.

Anschrift des Verfassers:

Prof. Dr. sc. techn. Tibor Czibere
Technische Universität Miskolc, UVR