

Näherungsformeln zur Erfassung von Parametereinflüssen am Beispiel von Biegeeigenfrequenzen

Hans Dresig und Gernot Schuster

Es wird gezeigt, daß man mit Hilfe der Abschätzungen von Dunkerley, Rayleigh, Grammel und Papkovic für komplizierte Schwingungssysteme einfache Formeln zur Berechnung von Parametereinflüssen erhalten kann. Die Methoden der Versuchsplanung erlauben es auch, in Verbindung mit Rechenprogrammen Näherungspolynome zu ermitteln, mit denen der Einfluß von Parametern auf Eigenfrequenzen berechnet werden kann. Am Beispiel einer Textilspindel und einer Schleifspindel sind diese Methoden erläutert worden. Es zeigt sich, daß die Anwendung dieser Näherungsformeln auch Vorteile bei der Optimierung der Parameterwerte bietet.

1. Einleitung

Zur Berechnung der Eigenfrequenzen von Biegeschwingern stehen dem Ingenieur gegenwärtig hinreichend viele Rechenprogramme zur Verfügung ([1] S. 398, [2]). Es wird aber oft nicht nur nach den Eigenfrequenzen für gegebene Parameterwerte gefragt, sondern auch nach einem Variantenvergleich, weil die Parameterkombination für das nach einem bestimmten Kriterium beste Schwingungssystem gesucht wird. Der Konstrukteur ist auch manchmal daran interessiert, eine einfache Formel zu erhalten, mit der er für ein kompliziertes Schwingungssystem mit Hilfe eines Klein- oder Taschenrechners Eigenfrequenzen berechnen kann.

In der folgenden Arbeit wird gezeigt, mit welchen Methoden es möglich ist, Formeln zu finden, mit denen der Einfluß von Parametern (Massen, Massenträgheitsmomente, Federkonstanten, Biegesteifigkeiten, Längen, ...) auch bei komplizierten Systemen einfach berechnet werden kann.

2. Näherungsformeln für Eigenfrequenzen von Biegeschwingungssystemen

Typisch für Biegeschwinger ist, daß sich die Eigenfrequenzen $f_k = \omega_k/2\pi$ und Eigenschwingformen \underline{v}_k für ungedämpfte diskrete Systeme ohne Kreiselwirkung aus der Eigenwertaufgabe

$$(\underline{D}\underline{M} - \frac{1}{\omega_k^2} \underline{E}) \underline{v}_k = \underline{0} \quad (1)$$

ergeben. Dabei ist

$\underline{D} = ((d_{ij}))$ die Matrix der Einflußzahlen (Nachgiebigkeitsmatrix) einer beliebig gelagerten Welle von beliebigem Querschnitt, die mit I Massen besetzt ist.

$\underline{M} = \text{diag}(m_i)$ die Massenmatrix, deren Elemente auf der Hauptdiagonale die Massen m_i sind.

$\underline{v}_k = (v_{1k}, v_{2k}, \dots, v_{nk})$ der Vektor der k -ten Eigenschwingform, der die Durchbiegungen an den Stellen $i = 1, 2, \dots, I$ enthält.

$\omega_k = 2\pi f_k$ die k -te Eigenkreisfrequenz

Die konstruktiv beeinflussbaren Parameter x_n sind in den Einflußzahlen d_{ij} und den Massen m_i enthalten. Sie werden im Parametervektor

$$\underline{X}^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

zusammengefaßt. Die Größen x_n ($n = 1, 2, \dots, N$) können Massen, Federkonstanten, Biegesteifigkeiten, Längen, Durchmesser u. a. mechanische Größen darstellen. Es ist meist von Vorteil, dafür dimensionslose (bezogene) Größen zu benutzen.

In der Praxis benötigt man oft nicht alle Eigenfrequenzen eines Biegeschwingers, sondern nur einige. Falls nur die erste Eigenfrequenz f_1 interessiert, so kann man zu ihrer Berechnung Abschätzungsformeln benutzen, von denen einige in Tabelle 1 angegeben sind (vgl. [1], [3]). Mit Hilfe dieser Formeln kann man für konkrete Anwendungsfälle die Grundfrequenz oft schon mit hinreichender Genauigkeit bestimmen. In allen Fällen benötigt man dabei die Einflußzahlen d_{ij} bzw. d_{ij} , die man aus entsprechenden Tabellen in Lehrbüchern (z. B. [1], S. 252/253) oder Taschenbüchern (z. B. [3]) entnehmen kann. Falls die Eigenfrequenz f_{k_0} für bestimmte Parameterwerte \underline{X}_0 eines Systems schon bekannt ist, und nur interessiert, wie groß die Eigenfrequenz f_k ist, wenn die Parameter die neuen Werte $\underline{X} = \underline{X}_0 + \Delta \underline{X}$ erhalten, wobei $\Delta \underline{X}$ die Änderungen der Parameter erfaßt, so gibt es eine weitere Berechnungsmöglichkeit ([4], [5]). Den Parameteränderungen entsprechen in den Matrizen \underline{D} und/oder \underline{M} Änderungen der d_{ij} und/oder m_i . Die Matrizenänderungen $\Delta \underline{D}$ und $\Delta \underline{M}$ ergeben sich aus der Differenz zwischen den Matrizen $\underline{D}_0 = \underline{D}(\underline{X}_0)$ und $\underline{M}_0 = \underline{M}(\underline{X}_0)$ des ursprünglichen Systems und den Matrizen $\underline{D} = \underline{D}(\underline{X})$ und $\underline{M} = \underline{M}(\underline{X})$ des veränderten Systems.

Es gilt dann

$$\Delta(\underline{D}\underline{M}) = \underline{D}_0 \cdot \Delta \underline{M} + \Delta \underline{D} \cdot \underline{M}_0 + \Delta \underline{D} \cdot \Delta \underline{M} \quad (8)$$

In [5] ist gezeigt, daß als Näherungsformel zur Berechnung der k -ten Eigenfrequenz unter Verwendung der k -ten Eigenschwingform \underline{v}_{k_0} folgende Näherungsformel gilt:

Tabelle 1
Verfahren zur Abschätzung der Grundfrequenz von Biegeschwingern

Verfahren von	untere Grenze	obere Grenze
Dunkerley	$f_1 > \frac{1}{2\pi \sqrt{\sum_{i=1}^n d_{ii} m_i}} \quad (2)$	_____
Rayleigh	_____	$f_1 < \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n v_{i1}^2}}{2\pi \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} v_{i1} v_{j1} m_j}} \quad (3)$
Grammel	_____	$f_1 < \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n v_{i1}^2 m_i}}{2\pi \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} v_{i1} v_{j1} m_j m_j}} \quad (4)$
Papkovič	_____	$f_1 < \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n d_{ii} m_i}}{2\pi \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij}^2 m_j m_j}} \quad (5)$
Bernstein	$f_1 > \frac{1}{2\pi \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij}^2 m_j m_j}} \quad (6)$	$f_1 < \frac{\sqrt{2}}{2\pi \sqrt{\sum_{i=1}^n (d_{ii} m_i) + \sqrt{2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (d_{ij}^2 m_j m_j) - (\sum_{i=1}^n d_{ii} m_i)^2}}} \quad (7)$

$$f_k \approx \frac{f_{k0}}{\sqrt{1 + \frac{\frac{T}{v_{k0}} \Delta(DM) \cdot v_{k0}}{\frac{T}{v_{k0}} D_0 M_0 v_{k0}}}} \quad (9)$$

$$\Delta \underline{X} = \underline{X} - \underline{X}_0 \quad (11)$$

Man kann die Abhängigkeit einer Eigenfrequenz f_k von den Parameteränderungen dann durch ein quadratisches Polynom approximieren:

$$f_k(y_n) \approx \bar{f}_k(y_n) = a_0^{(k)} + \sum_{n=1}^N a_n^{(k)} y_n + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N a_{nm}^{(k)} y_n y_m \quad (12)$$

Die Berechnung des Einflusses von **kleinen** Parameteränderungen kann damit folgendermaßen erfolgen:

1. Berechnung der Eigenfrequenz f_{k0} und der Eigenschwingform v_{k0} für die Parameter \underline{X}_0 des ursprünglichen (unveränderten) Systems (z. B. mit einem Rechenprogramm [2]).
2. Berechnung der Matrizenänderung $\Delta(DM)$ infolge der Parameteränderung $\Delta \underline{X}$ nach Gl. (8).
3. Berechnung der veränderten Eigenfrequenz nach Gl. (9).

Anstelle der wiederholten Benutzung eines Rechenprogramms ist somit nur eine Multiplikation von Matrizen nötig.

Diese Vorgehensweise ist dann ratsam, falls kleine Parameteränderungen vorliegen.

Falls **große** Parameteränderungen $\Delta \underline{X}$ auftreten, kann der Ingenieur stets obere Grenzen \underline{X}_{max} und untere Grenzen \underline{X}_{min} für die Parameter angeben, innerhalb derer es sinnvoll ist, die Parameter zu variieren. Es gilt dann $\underline{X}_{min} \leq \underline{X} \leq \underline{X}_{max}$ für den zu untersuchenden Parametervektor \underline{X} . Es ist dann zweckmäßig, einen Parametervektor

$$\underline{X}_0 = \frac{1}{2} (\underline{X}_{min} + \underline{X}_{max}) \quad (10)$$

einzuführen, und die Parameteränderungen auf diesen Mittelwert zu beziehen:

Für die Ermittlung der Koeffizienten a_0 , a_n und a_{nm} des Näherungspolynoms ist es erforderlich, eine bestimmte Anzahl exakter Eigenfrequenzberechnungen durchzuführen.

Die **minimale** Anzahl der notwendigen Eigenfrequenzberechnungen entspricht der Anzahl der zu berechnenden Koeffizienten.

Eine gute Approximation entsteht zum Beispiel, wenn im N-dimensionalen Quader in allen Eckpunkten und im Mittelpunkt \underline{X}_0 die Eigenfrequenzen berechnet werden. Es ist vorteilhaft, die entsprechenden Punkte, in denen die exakten Werte der Eigenfrequenzen bestimmt werden sollen, mit Hilfe eines Versuchsplanes festzulegen, wobei die Anzahl der Versuche von N abhängt ([6]). Dabei wird mit bezogenen Größen

$$y_n = \frac{2x_n - x_{nmax} - x_{nmin}}{x_{nmax} - x_{nmin}} \quad (13)$$

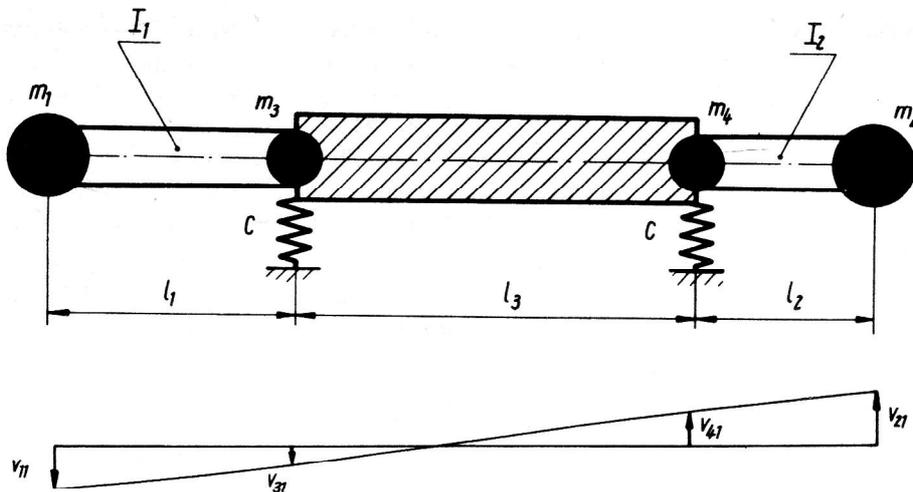


Bild 1a:
Berechnungsmodell der Schleifspindel

Bild 1b:
Erste Eigenschwingform v_1 der Schleifspindel

gerechnet, die stets zwischen -1 und $+1$ liegen, wenn sich x_n zwischen $x_{n\min}$ und $x_{n\max}$ ändert. Aus den y_n -Werten folgt umgekehrt

$$x_n = \frac{1}{2} \left[y_n(x_{n\max} - x_{n\min}) + x_{n\max} + x_{n\min} \right] \quad (14)$$

Die Koeffizienten werden dann mit den exakten Werten der Eigenfrequenzen und den zugehörigen Parametervektoren durch Anwendung der Fehlerquadratmethode von Gauß berechnet.

Beim Vergleich der Gl. (9) mit den Gln. (2), (3) und (6) sieht man, daß diese denselben Aufbau haben, d. h. im Nenner steht eine lineare bzw. quadratische Funktion unter der Wurzel. Die Gln. (4) und (5), die auch im Zähler noch lineare Funktionen enthalten, sind ebenso wie Gl. (7) genauer als die erstgenannten. Gl. (9) und (12) gelten nicht nur für die Grundfrequenz f_1 , sondern für beliebige f_k . Gl. (12) weicht im Aufbau von den Gln. (2) bis (7) und (9) gänzlich ab. Sie ist nicht physikalisch, sondern mathematisch begründet und verlangt die geringsten Kenntnisse zur Aufstellung und den geringsten Aufwand bei der Anwendung.

3. Beispiele: Schleifspindel und Textilspindel

Bild 1 zeigt das Berechnungsmodell einer riemengetriebenen Schleifspindel, das in [7] begründet und benutzt wurde und Bild 2 das der Textilspindel.

Zur Ableitung physikalisch begründeter Näherungsformeln wird für das Beispiel der Schleifspindel von den Elementen der Matrizen D und M und einer Näherung v_1 für die erste Eigenschwingform ausgegangen:

$$\begin{aligned}
 d_{11} &= \frac{l_1^3}{3EI_1} + \frac{l_1^2 + (l_1 + l_3)^2}{cl_3^2}; \\
 d_{12} &= d_{21} = -\frac{2l_1 l_2 + l_2 l_3 + l_1 l_3}{cl_3^2}; \\
 d_{13} &= d_{31} = \frac{l_1 + l_3}{cl_3}; \quad d_{14} = d_{41} = -\frac{l_1}{cl_3}; \\
 d_{22} &= \frac{l_2^3}{3EI_2} + \frac{l_2^2 + (l_2 + l_3)^2}{cl_3^2}; \\
 d_{23} &= d_{32} = -\frac{l_2}{cl_3}; \quad d_{24} = d_{42} = \frac{l_2 + l_3}{cl_3}; \\
 d_{33} &= d_{44} = \frac{1}{c}; \quad d_{34} = d_{43} = 0
 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\underline{v}_1^T = (v_{11}, v_{21}, v_{31}, v_{41}) = (2,41; -2,86; 1; -1,95) \quad (17)$$

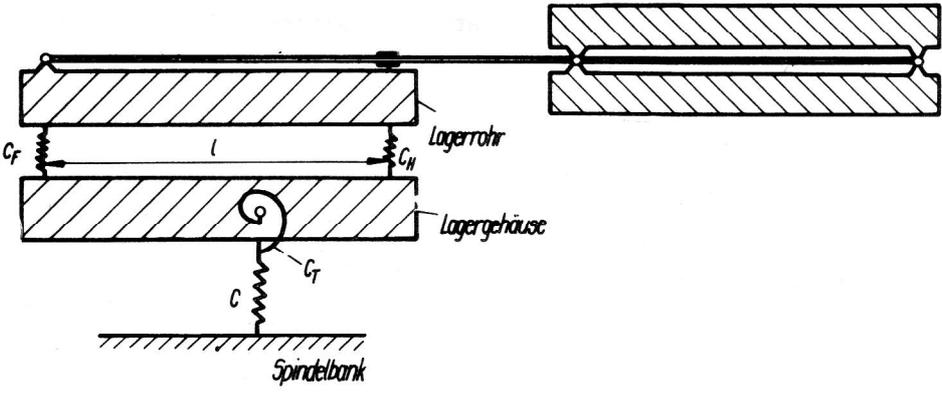


Bild 2:
Berechnungsmodell der Textilspindel

Mit Einführung der dimensionslosen Parameter

$$x_1 = \frac{m_1}{m^*}, x_2 = \frac{m_2}{m^*}, x_3 = \frac{I^*}{I_2}, x_4 = \frac{l_1}{l^*}, x_5 = \frac{l_2}{l^*} \quad (18)$$

und der Bezugsgrößen m^* , I^* und l^* ergeben sich Näherungsformeln aus den Gln. (2) bis (7).

Hier soll nur der einfachste Fall nach Gl. (2) angegeben werden.

$$f_1 > \frac{1}{2\pi \sqrt{d_{11} m_1 + d_{22} m_2 + d_{33} m_3 + d_{44} m_4}} \quad (19)$$

Tabelle 2
Versuchsplan mit Eigenfrequenzen der Textilspindel

Versuch Nr.	Eigenfrequenzen der Textilspindel					f_3 Hz	f_4 Hz
	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5		
1	1	1	1	1	1	183,1	363,8
2	-1	1	1	1	1	181,0	312,1
3	1	-1	1	1	1	164,6	286,1
4	1	1	-1	1	1	174,4	344,2
5	1	1	1	-1	1	181,2	352,7
6	1	1	1	1	-1	233,3	386,5
7	-1	1	-1	1	1	181,0	312,1
8	-1	1	1	1	-1	232,7	358,1
9	1	-1	1	-1	1	161,6	284,9
10	1	1	-1	-1	1	168,4	335,7
11	1	1	1	-1	-1	232,5	375,8
12	-1	-1	-1	1	1	115,0	156,0
13	-1	-1	1	1	-1	134,0	247,3
14	-1	1	-1	1	-1	208,2	340,5
15	1	-1	-1	-1	1	144,6	258,7
16	1	-1	1	-1	-1	193,6	269,4
17	-1	-1	-1	-1	1	115,0	155,6
18	-1	-1	-1	1	-1	114,5	208,6
19	-1	-1	1	-1	-1	133,9	246,9
20	-1	1	-1	-1	-1	207,9	308,9
21	1	-1	-1	-1	-1	189,3	237,4
22	-1	-1	-1	-1	-1	114,5	208,1
23	0	0	0	0	0	186,5	280,7
24	1	0	0	0	0	186,6	312,0
25	-1	0	0	0	0	186,3	253,1
26	0	1	0	0	0	191,6	356,8
27	0	-1	0	0	0	170,2	242,2
28	0	0	1	0	0	194,7	313,1
29	0	0	-1	0	0	176,1	288,3
30	0	0	0	1	0	186,3	300,3
31	0	0	0	-1	0	186,3	295,9
32	0	0	0	0	1	164,0	273,7
33	0	0	0	0	-1	217,7	288,1

Nach elementaren, aber umfangreichen Umformungen gilt:

$$f_1 > \frac{EI^*/m^*l^*3}{2\pi \left\{ \frac{1}{3} x_3 (x_1 x_4^2 + x_2 x_5^2) + \frac{EI^*}{cl^*3} \left[x_1 (1 + 2x_4 + 2x_4^2) + x_2 (1 + 2x_5 + 2x_5^2) + 1 - x_5 \right] \right\}} \quad (20)$$

Man sieht, daß das Polynom im Nenner bezüglich der Parameter x_n nicht nur quadratisch ist und man kann sich vorstellen, wie kompliziert der Ausdruck gemäß Gl. (7) aussieht. Zur Gewinnung derartiger Näherungsformeln ist neben gründlichen Kenntnissen der Maschinendynamik auch ein großer manueller Rechenaufwand nötig. Das trifft auch auf die Anwendung von Gl. (9) zu.

Anhand der Tabelle 3 kann man die mit den Näherungsformeln der Tabelle 1 für drei ausgewählte Schleifspindeln ermittelten Eigenfrequenzen mit dem exakten Wert vergleichen.

Tabelle 3
Werte der ersten Eigenfrequenzen der Schleifspindel mit Näherungsverfahren

Spindel Nr.	1. Eigenfrequenz in Hz nach Gl. Nr.				exakter Wert für die 1. EF
	(2)	(4)	(5)	(6)	
1	577,5	771,2	873,6	710,3	766,2
2	335,1	410,7	453,9	390,0	409,0
3	106,8	140,5	148,0	125,7	134,2

Bei Anwendung der Gl. (12) für das Beispiel der Textilspindeln werden nur die interessierenden Eigenfrequenzen mit einem Rechenprogramm, hier FEMROT ([8]), nach einem Versuchsplan berechnet, der dem in Tabelle 2 dargestellten entspricht. Mit dem Programm P 174 der Sektion Mathematik der TH Karl-Marx-Stadt werden dann die Koeffizienten (Tabelle 4) ermittelt. Für dieses Programm darf die Anzahl der variierbaren Parameter nicht größer als 5 werden. Als zu variierende Parameter wurden die im Bild 2 eingezeichneten Größen ausgewählt. Es ist

- $x_1 = c \dots$ die Schubfederkonstante der elast. Einspannung
- $x_2 = c_T \dots$ die Drehfederkonstante der elast. Einspannung
- $x_3 = c_F \dots$ die Federkonstante des Fußlagers
- $x_4 = c_H \dots$ die Federkonstante des Halslagers
- $x_5 = l \dots$ der Abstand zwischen Fuß- und Halslager.

Die Grenzen und die Mittelwerte der Parameter sind in der Tabelle 5 dargestellt.

Der Vergleich der exakten Werte für die Eigenfrequenzen der Spindel mit den Näherungswerten ergibt für die 3. Eigenfrequenzen einen durchschnittlichen Fehler von

Tabelle 4 Koeffizienten des Näherungspolynoms

Eigenfrequenz	Koeffizienten des Polynoms Gl. (12)							
	n	$a_o^{(3)}$	$a_n^{(3)}$	$a_{n1}^{(3)} = a_{1n}^{(3)}$	$a_{n2}^{(3)} = a_{2n}^{(3)}$	$a_{n3}^{(3)} = a_{3n}^{(3)}$	$a_{n4}^{(3)} = a_{4n}^{(3)}$	$a_{n5}^{(3)} = a_{5n}^{(3)}$
f_3	1	188,5	12,62	-1,15	-3,93	-1,66	-1,19	1,07
	2		25,57		-12,89	0,42	0,51	-2,76
	3		6,49			0,11	-0,07	-2,92
	4		0,89				-0,55	-0,73
	5		-16,4					0,09
	Koeffizienten des Polynoms Gl. (12)							
	n	$a_o^{(4)}$	$a_n^{(4)}$	$a_{n1}^{(4)} = a_{1n}^{(4)}$	$a_{n2}^{(4)} = a_{2n}^{(4)}$	$a_{n3}^{(4)} = a_{3n}^{(4)}$	$a_{n4}^{(4)} = a_{4n}^{(4)}$	$a_{n5}^{(4)} = a_{5n}^{(4)}$
f_4	1	292,6	25,17	-11,54	2,69	3,31	2,03	-6,58
	2		52,52		-5,59	0,67	-1,18	5,94
	3		14,75			-3,68	2,42	-0,86
	4		4,78				0,03	-1,42
	5		-11,5					-0,25

Tabelle 5
Grenzen der variablen Parameter der Textilspindel

n	x_{nmin}	x_{no}	x_{nmax}	Maßeinheit
1	$0,97 \cdot 10^5$	$4,3 \cdot 10^5$	$7,62 \cdot 10^5$	N/m
2	90,0	980,0	1870,0	Nm
3	$1 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10^4$	$3 \cdot 10^4$	N/m
4	10^6	$5,1 \cdot 10^7$	10^8	N/m
5	0,1	0,12	0,14	m

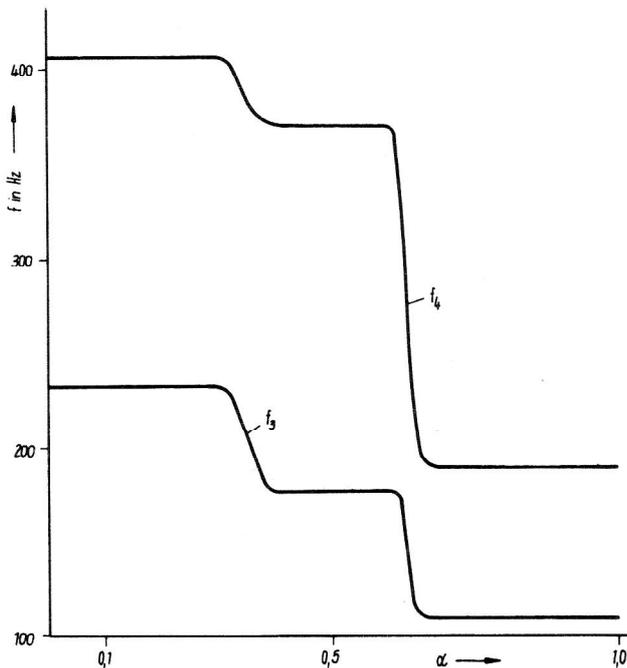


Bild 3:
Optimale Eigenfrequenzen in Abhängigkeit vom Gewichtsfaktor α

5,3 % und für die 4. Eigenfrequenzen von 7,9 %. Mit Hilfe von verbesserten Versuchsplänen und Programmen zur Koeffizientenermittlung kann die Genauigkeit der Näherungswerte erhöht werden.

Das Ziel einer Optimierung der variablen Parameter der Textilspindel besteht darin, die in der Nähe der geforderten Betriebsdrehzahl liegenden Eigenfrequenzen so zu verschieben, daß ein großer resonanzfreier Bereich geschaffen wird.

Für die vorliegende Spindel liegen für das ungedämpfte System die 3. und 4. Eigenfrequenz bei 185 Hz bzw. bei 280 Hz. Mit der Zielfunktion

$$F(y_n) = f_4 - \alpha(f_3 + f_4) = \text{Max.} \quad (21)$$

lassen sich folgende Forderungen, die einer Polyoptimierung entsprechen, in Abhängigkeit vom Gewichtsfaktor α ($0 \leq \alpha \leq 1$) erfüllen.

Für $\alpha = 0$ wird f_4 maximal groß, für $\alpha = 1$ wird f_3 maximal klein und für $\alpha = 0,5$ wird die Differenz $f_4 - f_3$ maximal groß (vgl. Bild 3).

Die Optimierungsrechnung wird mit dem Programm VEROPT und dem Unterprogramm POWREL durchgeführt. POWREL berechnet ein lokales Minimum einer beliebigen nichtlinearen Funktion von N Variablen unter Berücksichtigung spezieller Restriktionen.

Das Bild 4 zeigt die Werte y_n nach Gl. (13), die mit der Umrechnung nach Gl. (14) den optimalen Parametern der Schleifspindel in Abhängigkeit von α nach Gl. (21) entsprechen.

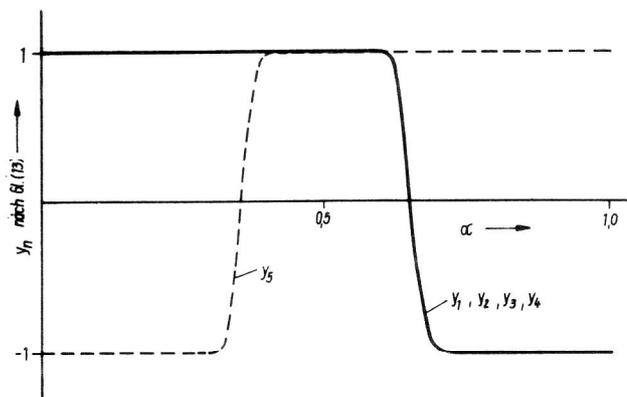


Bild 4:
Optimale Parameter in Abhängigkeit vom Gewichtsfaktor α

LITERATUR

- [1] Holzweißig, F. und H. Dresig: Lehrbuch der Maschinendynamik. Leipzig: VEB Fachbuchverlag, 1979.
- [2] Gumpert, W. und E. Pausch: Programmkatalog Maschinendynamik. TH Karl-Marx-Stadt, Sektion MB, 1979.
- [3] Birger, I.A. und Ja. G. Panovko: Procnost, ustojivost, kolebanija. Spravocnik (Festigkeit, Stabilität, Schwingungen. Handbuch). Band 3. Moskau: Verlag Masinostroenije, 1968.
- [4] Dresig, H.: Methode zur Berechnung des Einflusses von Parameteränderungen auf die Eigenfrequenzen von Schwingungssystemen. Maschinenbautechnik 26 (1977) 9, S. 427-430.
- [5] Dresig, H.: Zur Analyse von Parametereinflüssen bei Biegeschwingungen. Vorträge zum Problemseminar „Dynamik der Turbomaschinen“ in Weißig, TU Dresden, Weiterbildungszentrum Heft 6/78, S. 114-125.
- [6] Ahlers, H.; B. Schwartz und J. Waldmann: Optimierung technischer Prozesse. Berlin: VEB Verlag Technik, 1979.
- [7] Pham Due Hieu: Schwingungsuntersuchungen an riemcngetriebenen Schleifspindeln. Dissertation A, TH Karl-Marx-Stadt 1980.
- [8] Waldeck, D. und Pausch, E.: Zum Aufbau eines Finit-Element-Verfahrens für dynamische Untersuchungen von Rotoren im Be- und Verarbeitungsmaschinenbau. Berichte Tagung Festkörpermechanik Dresden 1979, Band A. VEB Fachbuchverlag Leipzig.

Anschrift der Verfasser:

Prof. Dr. sc. techn. Hans Dresig,
Dipl.-Ing. Gernot Schuster,
Technische Hochschule Karl-Marx-Stadt
Wissenschaftsbereich Mechanik
9010 Karl-Marx-Stadt
Straße der Nationen 62