

# Strömungen hochviskoser Newtonscher und nicht-Newtonscher Flüssigkeiten

Horst Rumpel

*Strömungen hochviskoser Medien gewinnen technisch an Bedeutung. Das betrifft vor allem die Herstellung und Verarbeitung sowie den Transport hochviskoser fließfähiger Stoffe. Damit hat sich auch eine gewisse Veränderung in den Erfordernissen der Strömungsmechanik vollzogen, mit bemerkenswerten Konsequenzen für notwendige strömungsmechanische Untersuchungen. Eine besondere Rolle spielen komplizierte Strömungsvorgänge solcher Fluide auch mit nicht-Newtonschen Eigenschaften sowie gezielte Strömungsbeeinflussungen. Es wird ein begründeter Problembereich dargestellt, der auch durch Beispiele dazu durchgeführter Forschungsarbeiten belegt wird. Das unterschiedliche rheologische Verhalten der Stoffe hat bemerkenswerte Auswirkungen auf entsprechende Strömungsfelder. Es sind wirksame Strömungsbeeinflussungen möglich. Erkenntnisfortschritte erfordern verstärkt theoretisch-physikalische Untersuchungen zum Stoffverhalten, mathematische Modellierungen sowie Einsatz und Weiterentwicklung mathematischer Lösungsverfahren.*

## 1. Strömungsmechanische Aufgabenstellungen unter besonderer Berücksichtigung der Plastverarbeitung und des Transports hochviskoser Medien

Die Herstellung und Verarbeitung sowie der Transport von hochviskosen fließfähigen Stoffen, auch mit nicht-Newtonschen Eigenschaften, haben in den letzten Jahren an Bedeutung ständig zugenommen. Man kann sagen, daß sich diesbezüglich direkt eine gewisse Wandlung auch in den Erfordernissen der Strömungsmechanik vollzogen hat. Noch in den fünfziger Jahren wurde in der internationalen Literatur zu den sogenannten „schleichenden Bewegungen“ festgestellt, daß solche Strömungen mit sehr kleinen Reynoldsschen Zahlen ( $Re < 1$ ), abgesehen von einigen Sonderfällen, in den praktischen Anwendungen nicht allzuhäufig vorkämen.

Das hat sich also wesentlich geändert, mit bemerkenswerten Konsequenzen sowohl für theoretische als auch experimentelle strömungsmechanische Untersuchungen.

So besteht z. B. die Notwendigkeit, die Plastverarbeitungsverfahren hinsichtlich der Produktivität, des Material- und Energieverbrauchs und vor allem der Qualität der zu produzierenden Erzeugnisse optimal zu gestalten. Das erfordert eine verstärkte theoretisch-physikalische Durchdringung der Verarbeitungsprozesse. Die in der Vergangenheit vorwiegend empirische Vorgehensweise, mit der auch in der Plastverarbeitung zweifellos sehr gute Erfolge erzielt wurden, hat doch gewisse Grenzen erreicht.

Die bestehende Problematik wird vor allem bestimmt durch das komplizierte rheologische Verhalten der Werkstoffe, die Verknüpfung verschiedener physikalischer und auch chemischer Vorgänge sowie durch die Fließvorgänge beeinflussende Formgebungen.

Eine umfassende Untersuchung der in der Verarbeitungsmaschine ablaufenden strömungsmechanischen Vorgänge kann nur in Teilschritten erfolgen.

Bei der Schaffung von Voraussetzungen für die Auslegung von plastverarbeitenden Maschinen, wie Extruder und Spritzgießmaschinen mit hoher Funktions-

tüchtigkeit und hoher Qualität der damit produzierten Erzeugnisse, geht es insbesondere um optimale Formgebungen von Maschinenbauteilen, einschließlich geeigneter Strömungsbeeinflussungen [1].

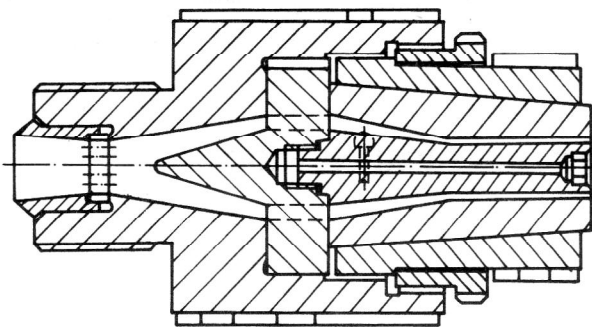
Im vorliegenden Beitrag soll dieser Problembereich der Strömungen hochviskoser Medien besondere Berücksichtigung finden. Dabei geht es also nicht nur um Strömungen Newtonscher Medien, sondern vor allem um solche von Fluiden mit nicht-Newtonschem Verhalten. Damit sei auch der Begriff „Rheologische Strömungen“ erklärt [8].

Es sind speziell mathematische Verfahren anzustreben, die es gestatten, für vorgegebene Konturen, Zustromverhältnisse, Stoffparameter und auch thermische Randbedingungen, Druck- und Geschwindigkeitsverteilungen (Fließprofile), Temperaturfelder, Spannungen (wie Normalspannungen und Wandschubspannungen) sowie Energiebedarf auch mit Hilfe der modernen Rechentechnik zu ermitteln.

Dabei ist es verständlicherweise erforderlich, den Weg vom Einfachen zum Komplizierten zu gehen. Das entspricht der Notwendigkeit bezüglich des Theoriegebäudes, dem Streben, in komplizierten Fällen wenigstens Näherungswerte zu erhalten sowie dem Erfordernis, die Einflüsse in ihren Anteilen zu erkennen, z. B. von Geometrie, Zustromung, Stoffeigenschaft und Temperatur.

Das soll nun, vor allem auch in Anlehnung an die komplizierten strömungsmechanisch-rheologischen Probleme des Plastverarbeitungsmaschinenbaues bzw. der Plastverarbeitung, d. h. speziell bezüglich der Extrusion, dargelegt werden. Die Durchströmung bzw. das Durchfließen in einem speziellen Extruderwerkzeug zur Rohrherstellung, wie es im Bild 1 schematisch dargestellt ist, läßt bereits eine ganze Reihe notwendiger strömungsmechanischer Aufgaben erkennen.

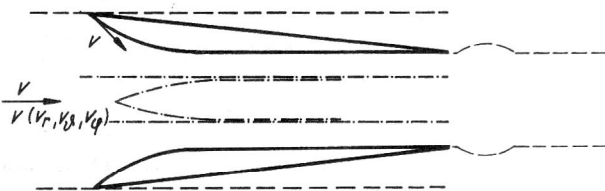
Berücksichtigt man, daß die Extrusion über die Rohrherstellung hinaus auch u. a. die Herstellung von Strängen verschiedenster Querschnittsformen umfaßt, und beachtet man auch solche Probleme, wie sie z. B. bei der



Querschnitt des Profiles



**Bild 1:**  
Extruderwerkzeug für Profilrohre



$T = const, T \neq const$

**Bild 2:**  
Schematische Darstellung zu strömungsmechanischen Problemen

Kabelummantelung auftreten, so zeigt sich noch eine erheblich größere Anzahl von strömungsmechanischen Aufgabenstellungen.

Diese Vielfalt wird auch noch dadurch erheblich größer, daß nicht allein die Formgebung, sondern auch die Eigenschaften der fließenden Medien, mit der Strömung verbundene thermische Einflüsse, aber auch gezielte thermische Fließbeeinflussungen, Einflüsse drallbehafteter Zuströmungen sowie auch besondere Fließbeeinflussungen, wie durch aufgeprägte Vibrationen, von bemerkenswerter Bedeutung sein können.

Hinsichtlich der Geometrie bzw. der Formgebung zeichnen sich insbesondere folgende Probleme ab (vgl. Bild 2), die auch von grundsätzlichem Interesse sind:

**Ebene Kanalströmung**

Rohrströmung (Strömung in kreiszylindrischen Rohren)

Kreisringrohrströmung ohne und mit axial bewegter innerer Berandung

Ebene Düsenströmung (Strömung in ebenen konvergenten Kanälen)

- a) mit gerader Berandung
- b) mit profilierter Berandung

Rotationssymmetrische Düsenströmung

- a) mit gerader Berandung

b) mit profilierter Berandung

Strömungen durch rotationssymmetrische Düsen mit Zentralkörper

- a) mit gerader Berandung

- b) mit profilierter Berandung

Strömungen durch Bauteile mit unsymmetrischen Querschnittsformen (3-dimensionale Durchströmprobleme)

Strömungen durch Bauteile mit vorhandenen Umströmbauteilen, wie z. B. die Dornhalterungen (Halteungen des Zentralkörpers) in dem in Bild 1 gezeigten Extruderwerkzeug

Den genannten Durchströmproblemen entsprechende Ausströmprobleme

Den technisch-physikalischen Sachverhalt berücksichtigend ist es bei derartigen Strömungen nicht-Newton'scher Medien von besonderer Bedeutung, thermische Einflüsse und auch die Einflüsse des viskoelastischen Verhaltens entsprechender Fluide zu erfassen. Dabci ist es angebracht, auch der einleitend begründeten notwendigen Vorgehensweise entsprechend, diese beiden Einflüsse getrennt zu untersuchen. Das ist auch insofern notwendig, als für derartige Berechnungen von Feldgrößen nichtisothermer Fließvorgänge viskoelastischer Medien kaum praktikable rheologische Zustandsgleichungen (Stoffgesetze) vorliegen.

Diesem Tatbestand Rechnung tragend erscheint es als zweckmäßig einerseits isotherme und nichtisotherme Fließvorgänge reinviskoser nicht-Newton'scher Medien

und andererseits isotherme Fließvorgänge viskoelastischer Medien zu untersuchen.

Dementsprechend sind dann auch geeignete rheologische Zustandsgleichungen zu verwenden.

**2. Zur mathematischen Modellierung rheologischer Strömungen**

Die mathematische Beschreibung der dargelegten strömungsmechanischen Probleme führt insbesondere auf Randwert- und Anfangswertaufgaben von Systemen partieller Differentialgleichungen. Diese sind im allgemeinen gegeben durch die drei Grundgleichungen (Erhaltungsgleichungen des Impulses, der Masse und der Energie) der Kontinuumsmechanik:

Bewegungsgleichung

$$\rho \left( \frac{\partial v_j}{\partial t} + v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = F_{vj} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} \quad (1)$$

Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (2)$$

Energiebilanzgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho \left( \frac{v_i v_i}{2} + u + \phi \right) \right\} = - \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \rho v_j \left( \frac{v_i v_i}{2} + u + \frac{p}{\rho} + \phi \right) \right\} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_j} (v_i S_{ij}) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \quad (3)$$

mit der inneren Energie  $u$ , dem Potential  $\varphi$  der äußeren Kräfte, der Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  und der Volumenkraft  $F_v$  sowie dem Spannungstensor  $\sigma_{ij}$  bzw. dem Spannungsdeviator  $S_{ij}$ .

Für kompressible Strömungen kommt noch eine zusätzliche Druck-Dichte-Beziehung in Betracht.

Die Lösung dieses Gleichungssystems, zusammen mit den Abhängigkeiten aller Stoffgrößen vom physikalischen Zustand, einer entsprechenden rheologischen Zustandsgleichung (mit den Beziehungen zwischen den Komponenten des Deformationsgeschwindigkeits- und Spannungstensors) für das Medium sowie den den technisch-physikalischen Problemen entsprechenden Rand- und Anfangsbedingungen liefert die gesuchten Feldgrößen.

Es versteht sich, daß derartige Differentialgleichungssysteme, auch mit stark nicht-linearem Charakter, in dieser Allgemeinheit kaum rationell zu lösen sind. Es besteht also die Notwendigkeit, bei der mathematischen Modellierung entsprechende technisch-physikalisch begründete Vereinfachungen vorzunehmen, so daß jedoch die wesentlichen Einflüsse erfaßt werden. Bemerkenswert wird die mathematische Problematik bestimmt durch die verwendete rheologische Zustandsgleichung, d. h. durch den Zusammenhang von Spannungen und Deformationsgeschwindigkeiten sowie entsprechender örtlicher und zeitlicher Ableitungen. Unter Beachtung, daß der Spannungstensor  $\sigma_{ij}$  in einen isotropen Druckanteil  $-p\delta_{ij}$  ( $\delta_{ij} = 1$  für  $i = j$ ,  $\delta_{ij} = 0$  für  $i \neq j$ ) und den Spannungsdeviator  $S_{ij}$  aufgespalten werden kann, ist also der wesentliche Bestandteil der rheologischen Zustandsgleichung für ein strömendes Medium der Zusammenhang zwischen dem Spannungsdeviator  $S_{ij}$  und dem Deformationsgeschwindigkeitstensor  $D_{ij}$ .

Für mehrdimensionale Strömungen reinviskoser Medien kann allgemein geschrieben werden:

$$S_{ij} = 2\eta D_{ij} \quad (4)$$

mit

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right), \quad (5)$$

wobei für Newtonsche Medien die dynamische Viskosität  $\eta$  nur eine Funktion der Temperatur und des Druckes ist. Für nicht-Newtonsche Medien ist  $\eta$  ausserdem noch von den drei Invarianten  $I_D$ ,  $II_D$ ,  $III_D$  des Deformationsgeschwindigkeitstensors  $D_{ij}$  abhängig.

Für inkompressible ebene und rotationssymmetrische Strömungsprobleme kann mit guter Näherung auch nur die Abhängigkeit von der zweiten Invarianten  $II_D$  berücksichtigt werden.

Für Untersuchungen nichtisothermer Fließvorgänge reinviskoser nicht-Newtonscher Medien bieten sich besonders zwei, auch bereits vielseitig erprobte [2], [3], [4] Stoffgesetze an, das Potenzgesetz nach Ostwald - de Waele und das sin h - Gesetz nach Prandtl - Eyring:

$$\text{Potenzgesetz: } \eta = \frac{S_{ij}}{2D_{ij}} = K (4II_D)^{\frac{n-1}{2}} \quad (6)$$

mit  $K = K(T, p)$  Konsistenzgröße,

$$\text{sin h-Gesetz: } \eta = \frac{S_{ij}}{2D_{ij}} = \frac{\eta_A \operatorname{ar} \sinh [B(4II_D)^{\frac{1}{2}}]}{B(4II_D)^{\frac{1}{2}}} \quad (7)$$

mit  $B = B(T, p)$  Stoffparameter,  $\eta_A = \eta_A(T, p)$  Anfangsviskosität.

Im Potenzgesetz (6) kann der Fließexponent  $n$  in kleinen Temperaturbereichen als Konstante betrachtet werden. Für die Konsistenzgröße  $K$  gilt eine exponentielle Temperatur- und Druckabhängigkeit.

Für theoretische Untersuchungen von isothermen Strömungen viskoelastischer Medien zur Ermittlung von Feldgrößen bietet sich die Zustandsgleichung eines „simple fluids“ mit schwindendem Gedächtnis 2. Ordnung von Coleman/Noll [12] an:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \alpha_1 D_{ij} + \alpha_2 D_{ik} D_{kj} + \alpha_3 D_{ij} \quad (8)$$

In diesem 3-Parametermodell beinhalten die Stoffkoeffizienten  $\alpha_1$  die scheinbare Viskosität,  $\alpha_2$  die Querviskosität und  $\alpha_3$  den Faktor der Viskoelastizität. Sie sind für inkompressible Medien Funktionen der 2. und 3. Invariante des Deformationsgeschwindigkeitstensors  $D_{ij}$ .

In Ermangelung entsprechender Stoffuntersuchungen und auch hinsichtlich der mathematischen Problematik, werden mitunter die Koeffizienten  $\alpha_i$  als Konstanten verwendet.

$D_{ij}^{(1)}$  stellt die sogenannte Jaumannsche Ableitung, angewendet auf den Deformationsgeschwindigkeitstensor  $D_{ij}$  dar:

$$D_{ij}^{(1)} = \frac{\mathcal{D} D_{ij}}{\mathcal{D} t} = \frac{\partial D_{ij}}{\partial t} + v_k \frac{\partial D_{ij}}{\partial x_k} + w_{ik} D_{kj} - D_{ik} w_{kj} \quad (9)$$

$$\text{mit } w_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \text{ (Rotationsgeschwindigkeitstensor)}$$

Ein Vorteil der Zustandsgleichung (8) ist, daß damit die Spannungskomponenten explizit gegeben sind und einfach in die Bewegungsgleichungen eingesetzt werden können.

Es sei jedoch bemerkt, daß es eine Vielzahl von empirischen, halbempirischen und mathematischen Ansätzen für rheologische Zustandsgleichungen gibt. Solche, die sich grundsätzlich auch für Untersuchungen einiger genannter Probleme eignen, sind die Gleichungen von Maxwell, White und Metzner.

Zur Stoffcharakterisierung gewinnen auch Integralmodelle zunehmend an Bedeutung.

### 3. Zu einigen Untersuchungen und Ergebnissen

Zum dargestellten Problemkreis wurden an der TH Karl-Marx-Stadt eine Reihe von Untersuchungen durch-

geführt (vgl. [2] bis [8]). Zur Lösung kommen außer analytischen Verfahren insbesondere auch numerische Verfahren (Differenzenverfahren, Methode der finiten Elemente) zur Anwendung.

Von besonderem Interesse sind spezielle, über die durch Formgebung hinausgehende Strömungs- bzw. Fließbeeinflussungen. Zu thermischen Einflüssen sei auf die Arbeiten [2], [3], [4] verwiesen.

Als Beispiele, auch mit interessanten Erkenntnissen, soll kurz etwas zu drallbefehteten Strömungen und zu sogenannten Vibrationsströmungen angeführt werden.

### 3.1. Strömungen in rotationssymmetrischen Düsen bei drallbefehteter Zuströmung

Die Drallströmung ist bei vielen technischen Problemen bedeutungsvoll. Die bisher durchgeführten theoretischen Untersuchungen beschränken sich jedoch geradezu ausschließlich auf Newtonsche Medien. Mit der zunehmenden Verarbeitung und dem Transport nicht-Newtonscher Medien gewinnen auch Aussagen über derartige Drallströmungen immer mehr an Bedeutung. So ist z. B. bei der Extrusion der Einfluß eines durch die Schnecke hervorgerufenen Dralles auf das Strömungsverhalten in einer rotationssymmetrischen Düse (Adapterbereich) und damit auch auf die Qualität des Extrudates eine wichtige Frage. Es wurden deshalb auch theoretische Untersuchungen über derartige Strömungen nicht-Newtonscher Medien aufgenommen. Bereits erste Untersuchungen der isothermen inkompressiblen stationären drallbefehteten Strömung einer Reiner-Rivlin-Flüssigkeit in einer geradwandigen rotationssymmetrischen Düse liefern interessante Ergebnisse [5]. Es wurde ein mathematisches Modell, entsprechend Bild 3 in Kugelkoordinaten, bestehend aus den Bewegungsgleichungen einschließlich der Kontinuitätsgleichung unter Verwendung der Zustandsgleichung nach Reiner und Rivlin

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + S_{ij} = -p \delta_{ij} + \alpha_1 D_{ij} + \alpha_2 D_{ik} D_{kj} \quad (10)$$

für den behandelten stationären rotationssymmetrischen Fall

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} = 0, \frac{\partial}{\partial \varphi} = 0 \right) \text{ zugrunde gelegt:}$$

$$\rho \left( v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\vartheta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \vartheta} - \frac{v_\vartheta^2 + v_\varphi^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 S_{rr}) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (S_{r\vartheta} \sin \vartheta) - \frac{S_{\vartheta\vartheta} + S_{\varphi\varphi}}{r} \quad (11a)$$

$$\rho \left( v_r \frac{\partial v_\vartheta}{\partial r} + \frac{v_\vartheta}{r} \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{v_r v_\vartheta}{r} - \frac{v_\varphi^2 \cot \vartheta}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 S_{r\vartheta}) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (S_{\vartheta\vartheta} \sin \vartheta) + \frac{S_{r\vartheta}}{r} - \frac{\cot \vartheta}{r} S_{\varphi\varphi} \quad (11b)$$

$$\rho \left( v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\vartheta}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \vartheta} + \frac{v_r v_\varphi}{r} - \frac{v_\vartheta v_\varphi}{r} \cot \vartheta \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 S_{r\varphi}) + \frac{1}{r} \frac{\partial S_{\vartheta\varphi}}{\partial \vartheta} + \frac{S_{r\varphi}}{r} + \frac{2 \cot \vartheta}{r} S_{\vartheta\varphi} \quad (11c)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{2}{r} v_r + \frac{\cot \vartheta}{r} v_\vartheta + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \vartheta} = 0. \quad (12)$$

Die Komponenten  $S_{ij}$  sind dabei die nach Gleichung (10).

Für die betrachtete Drallströmung, bei der auch Zentrifugalkräfte wirksam werden, werden die Trägheitsglieder in den Bewegungsgleichungen (11) berücksichtigt.

Das damit vorliegende Randwertproblem ist neben der Haftbedingung

$$v_r(r, \vartheta = \vartheta_0) = v_\vartheta(r, \vartheta = \vartheta_0) = v_\varphi(r, \vartheta = \vartheta_0) = 0 \quad (13)$$

und des notwendigen Verschwindens der Geschwindigkeitskomponenten  $v_\vartheta$  und  $v_\varphi$  auf der Düsenachse ( $\vartheta = 0$ ) durch die Einflußgrößen Drallstärke

$$\epsilon = \frac{v_{\varphi a \max}}{v_{ra \max}} = \frac{\text{maximale Drallgeschwindigkeit im Anfangsquerschnitt}}{\text{max. Durchsatzgeschwindigkeit im Anfangsquerschnitt}} \quad (14)$$

und Durchsatz

$$Q = 2 \pi r^2 \int_{\vartheta=0}^{\vartheta_0} v_r \sin \vartheta \, d\vartheta \quad (15)$$

gekennzeichnet.

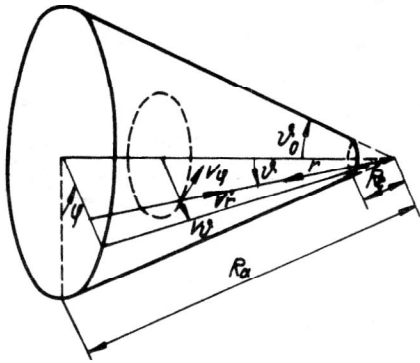
Unter der Voraussetzung eines schwachen Dralles ( $\epsilon \ll 1$ ) wurde das Randwertproblem, bei dem in den Bewegungsgleichungen Nichtlinearitäten sowohl infolge der berücksichtigten Trägheitsglieder als auch des nicht-Newtonschen Verhaltens auftreten, mit Hilfe eines störungstheoretischen Verfahrens gelöst.

Das Rechenverfahren (Rechenprogramm) ermöglicht die Ermittlung von Geschwindigkeits- und Druckverteilungen, Normal- und Tangentialspannungen sowie von Reibungs- und Druckwiderstand für Strömungen Newtonscher und nicht-Newtonscher Medien in Düsen verschiedener Öffnungswinkel und Längen bei unterschiedlicher Wahl des Durchsatzes, der Drallstärke und der rheologischen Parameter.

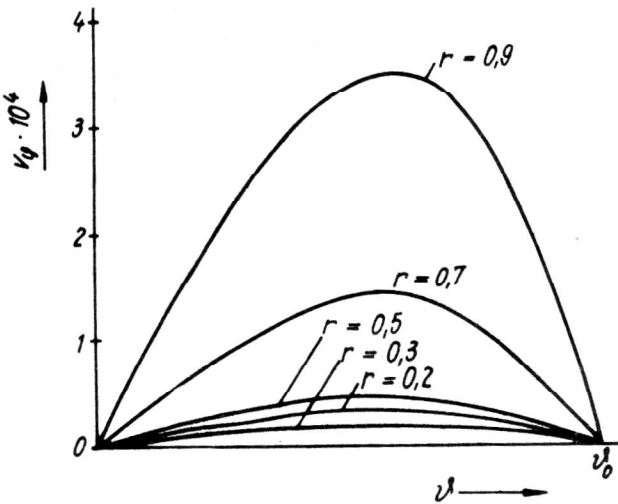
Durchgeführte Rechnungen zeigen interessante strömungsmechanische Erscheinungen. Während bei Newtonschen Medien der aufgeprägte Drall relativ schnell mit der Lauflänge abklingt, kann sich bei nicht-Newtonschen Medien die abgeschwächte Drallströmung, wie in Bild 4 dargestellt, wieder aufbauen.

Es wurde u. a. weiterhin festgestellt, daß sich auch mit steigendem Durchsatz die Umfangskomponente der Geschwindigkeit  $v_\varphi$  beachtlich erhöhen kann und daß eine starke Zunahme der durch das nicht-New-





**Bild 3:** Drallbehaftete Strömung in einer rotationssymmetrischen Düse



**Bild 4:** Drallgeschwindigkeiten  $v_\phi$  für verschiedene Lauflängen  $r$

tonische Verhalten bedingten Sekundärströmungen mit wachsendem Durchsatz und zunehmendem Düsenöffnungswinkel erfolgt. Von weitergehendem Interesse sind auch in diesem Zusammenhang die Auswirkungen viskoelastischer Einflüsse. Gleiches gilt auch bezüglich der Drallströmungen mit thermischen Einflüssen, insbesondere bei gleichzeitigen thermischen Fließbeeinflussungen.

### 3.2. Vibrationsströmungen

Eine bemerkenswert wirkungsvolle Strömungsbeeinflussung ist die durch Wandvibration (oszillierende Wand). Bei einer derartigen „Vibrationsströmung“ handelt es sich um eine stationäre Grundströmung, die einer Vibration (Oszillation) der Berandung ausgesetzt ist. Sie unterscheidet sich also von der reinen Oszillationsströmung und auch von der Pulsationsströmung, die durch Überlagerung eines statischen und dynamischen Druckgradienten hervorgerufen wird. Die Anwendung von Schwingungen zur Beeinflussung stationärer Schichtenströmungen ist vor allem ein

Wirkprinzip zur Senkung der effektiven Viskosität. Die Nutzung der Vibration kann, wie auch von [9] dargestellt, insbesondere zur Qualitätssteigerung des Endproduktes und zur Erhöhung der Durchsatzleistung bei der Extrusion dienen.

Prinzipiell ist eine parallele longitudinale Überlagerung von Hauptströmung und Wandvibration bzw. Störung („in-line“-Überlagerung) oder eine transversale Überlagerung der Hauptströmung und Störung („cross-line“-Überlagerung) möglich. Dabei ist die Vibration der Wand in Strömungsrichtung von besonderem Interesse. Es werden sinus-förmige Schwingungen empfohlen. Die Wirkung hängt natürlich auch noch von den Frequenzen und den Amplituden der Schwingungen ab.

Für das Erkennen der grundsätzlichen Wirkung von Wandvibrationen auf Strömungen ist die sich einstellende Strömung in der Nähe einer oszillierenden ebenen Wand (eine reine Oszillationsströmung) nützlich (s. Bild 5). Für Newtonsche Medien ist diese einfache Strömung als exakte Lösung der Navier-Stokesschen Gleichung bekannt [13]. Als Lösung der begründet stark vereinfachten Differentialgleichung

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (16)$$

unter Berücksichtigung der Haftbedingung an der Wand ( $y = 0$ )

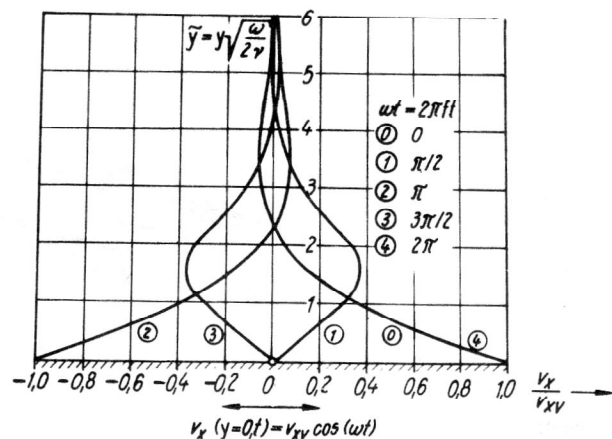
$$v_x(y=0, t) = v_{xv} \cos(\omega t) = v_{xv} \cos(2\pi f t) \quad (17)$$

erhält man

$$v_x(y, t) = v_{xv} \exp(-\tilde{y}) \cdot \cos(\omega t - \tilde{y}) \quad (18)$$

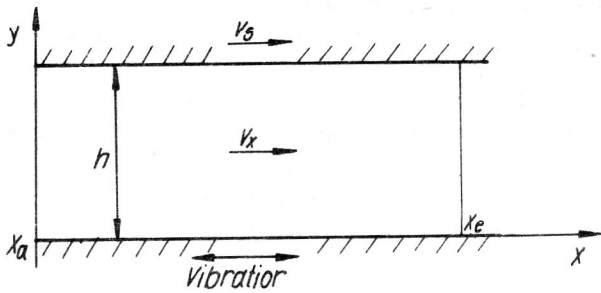
mit

$$\tilde{y} = y \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} = y \sqrt{\pi \frac{f}{\nu}}$$

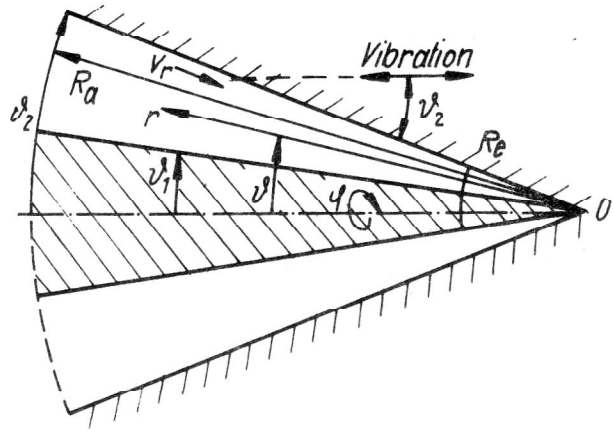


**Bild 5:** Geschwindigkeitsverteilungen in der Nähe einer oszillierenden Wand

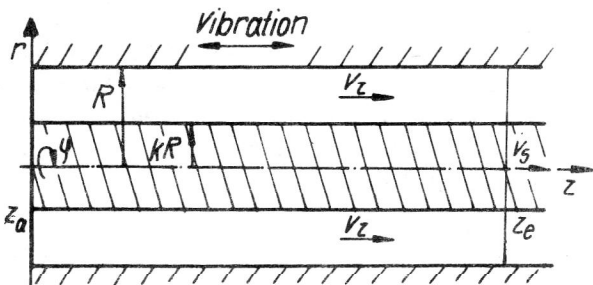
Die Geschwindigkeitsverteilung  $v_x(y, t)$  ist also eine Schwingung mit einer mit zunehmendem Wandabstand abnehmenden Amplitude



**Bild 6:**  
Ebene Kanalströmung bei einer vibrierenden Wand, mit und ohne Schlepplströmung ( $V_S \neq 0, V_S = 0$ )



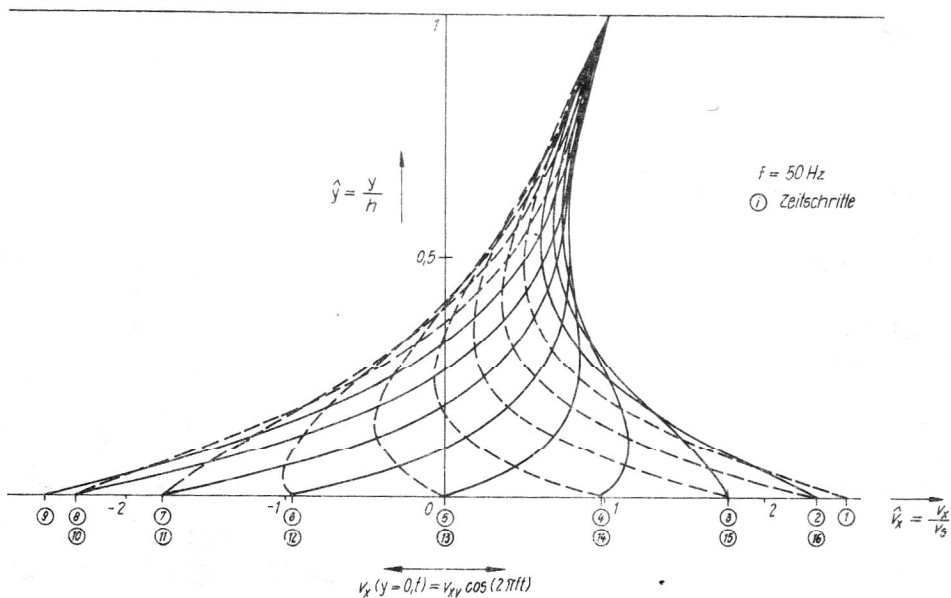
**Bild 8:**  
Strömung durch vibrierende rotationssymmetrische Düse mit Zentralkörper



**Bild 7:**  
Kreisringrohrströmung bei vibrierender Außenwand, mit und ohne Schlepplströmung ( $V_S \neq 0, V_S = 0$ )

Bild 5 zeigt die Bewegung für verschiedene Zeiten. Der Abstand zweier Schichten, die in gleicher Phase schwingen, d. h. die Wellenlänge beträgt  $\Lambda = 2\pi\sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$ .

Von besonderem Interesse ist, daß die mitschwingende Schicht eine Dicke von der Größenordnung  $\delta \sim \sqrt{\frac{\nu}{\omega}} = \sqrt{\frac{\nu}{2\pi f}}$  besitzt, d. h., sie ist um so dünner,



**Bild 9:**  
Geschwindigkeitsverteilungen im ebenen Kanal bei überlagerter Schleppl- und Oszillationsströmung

$$v_{xv} \exp\left(-y\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\right).$$

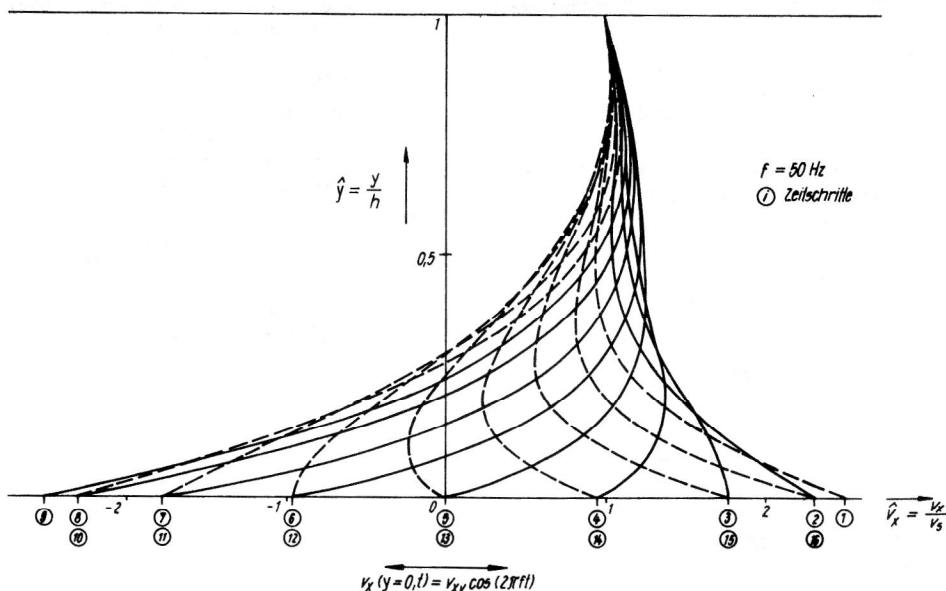
Die Schicht im Wandabstand  $y$  hat eine Phasennach-eilung  $y\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}$  gegen die Bewegung der Wand.

je kleiner die kinematische Viskosität  $\nu$  und je größer die Frequenz  $f$  ist.

Von naheliegender Interesse sind die in den Bildern 6, 7, 8 skizzierten Strömungsprobleme.

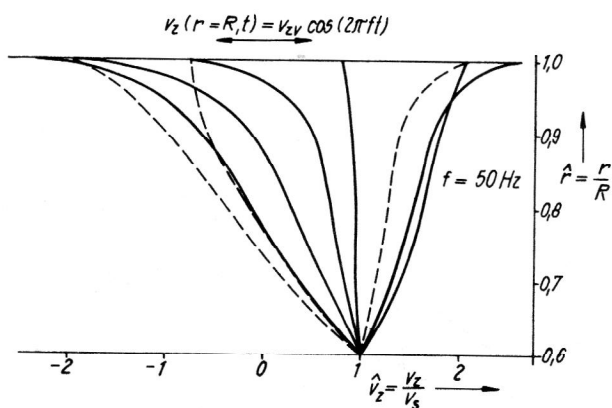
Als Beispiele erster Ergebnisse theoretischer Untersuchungen sind in den Bildern 9...11 berechnete Geschwindigkeitsverteilungen wiedergegeben [14], [15].

Bild 9 zeigt eine zeitliche Folge von Geschwindigkeitsverteilungen in einem ebenen Kanal bei überla-



**Bild 10:**  
Geschwindigkeitsverteilungen im ebenen Kanal bei überlagerter Druck-, Schlepp- und Oszillationsströmung

gerter Schlepp- und Oszillationsströmung eines viskoelastischen Mediums für gleiche Zeitschritte. In Bild 10 sind entsprechende Geschwindigkeitsverteilungen bei einer noch zusätzlich überlagerten Druckströmung dargestellt. Ein Ergebnis der Berechnung einer Kreisringrohrströmung bei vibrierender Außenwand mit überlagerter Schleppströmung für ein reinviskoses nicht-Newtonsches Medium stellt Bild 11 dar.



**Bild 11:**  
Geschwindigkeitsverteilungen einer Kreisringrohrströmung bei vibrierender Außenwand mit überlagerter Schleppströmung

Abschließend sei noch bemerkt, daß im Rahmen umfangreicher mathematischer Modellierungen zum vorliegenden Problemkreis, sich auch gewisse „Wissenschaftsorientierungen“, langfristige Aufgabenstellungen, für die mathematische Forschung ergeben. [10], [11].

#### LITERATUR

- [ 1 ] Rumpel, H.:  
Strömungsmechanisch-rheologische Forschung unter besonderer Berücksichtigung der Erfordernisse des Plastverarbeitungsmaschinenbaues und der plastverarbeitenden Industrie.  
Vortrag zu den Tagen der Wissenschaft und Technik an der TH Karl-Marx-Stadt 1977.
- [ 2 ] Hölzig, M.; Lobeck, W.; Plichta, Chr.:  
Ein Berechnungsverfahren für gekoppelte Temperatur- und Geschwindigkeitsfelder hochviskoser, nicht-Newtonscher Flüssigkeiten in Durchströmbauteilen. Diss. TH Karl-Marx-Stadt 1974.
- [ 3 ] Schneider, J.:  
Ein Beitrag zur theoretischen Untersuchung der nichtisothermen, laminaren Strömung reinviskoser Medien mit temperatur- und druckabhängigen Stoffeigenschaften in ebenen Kanälen und kreiszylindrischen Rohren.  
Diss. TH Karl-Marx-Stadt 1975.
- [ 4 ] Plichta, Chr.:  
Nichtisotherme Strömung hochviskoser Medien im ebenen, geradwandig-konvergenten Kanal.  
Forschungsbericht TH Karl-Marx-Stadt (unveröffentlicht)

- [ 5 ] Möller, G.:  
Ein Beitrag zum Fließverhalten hochviskoser Medien in rotationssymmetrischen Düsen. Diss. TH Karl-Marx-Stadt 1975.
- [ 6 ] Aberspach, H.:  
Beitrag zum Fließen hochviskoser Medien in Durchströmteilen mit Zentralkörper. Diss. TH Karl-Marx-Stadt 1977.
- [ 7 ] Irmscher, Chr.:  
Ein Beitrag zum Fließverhalten hochviskoser Medien in Kanälen mit schwach gekrümmter Berandung. Diss. TH Karl-Marx-Stadt 1972.
- [ 8 ] Rumpel, H.:  
Mathematische Probleme bei rheologischen Strömungen. Planarvortrag auf der 3. Tagung „Mathematische und rechentechnische Probleme des Verfahreningenieurwesens“; IHS Köthen, Okt. 1978 (Veröffentl. in entspr. Report).
- [ 9 ] Schnabel, R.:  
Beitrag zur Vibrorheologie viskoelastischer Medien am Beispiel der isothermen Ringspaltströmung. Diss. TH „Carl-Schorlemmer“, Leuna-Merseburg 1976.
- [10] Rumpel, H.:  
Mathematische Modellierungen und Probleme rheologischer Strömungen. Hauptvortrag auf der 7. Tagung über Probleme und Methoden der Mathematischen Physik an der TH Karl-Marx-Stadt, Juni 1979.
- [11] Rumpel, H.:  
Probleme und Untersuchungsmethoden der Strömungsmechanik nicht-Newtonscher Fluide. Hauptvortrag auf der 2. Tagung Strömungsmechanik der Mathematischen Gesellschaft der DDR, Magdeburg, Sept. 1979.
- [12] Coleman, B. O.; Noll, W.:  
An approximation theorem for functionals, with applications in continuum mechanics. Arch. Rational Mech. Anal., 6 (1960).
- [13] Schlichting, H.:  
Grenzschicht-Theorie. Verl. G. Braun, Karlsruhe (1965).
- [14] Tschersich, H.:  
Diplomarbeit, TH Karl-Marx-Stadt 1980.
- [15] Damnik, St.:  
Diplomarbeit, TH Karl-Marx-Stadt 1980.