

Berechnung von Schaufeleigenfrequenzen und Untersuchung spezieller Einflüsse

H. Sollmann

Es wird ein Übertragungsmatrizenverfahren zur Berechnung der Eigenfrequenzen und Schwingformen von Schaufeln axialer Turbomaschinen vorgestellt, bei dem die Einflüsse der Einspannelastizität, der Temperatur, der Schubverformung und der Drehträgeit der Querschnitte sowie der Blattverwindung eingearbeitet sind. Da die Aufstellung einer aus Massen- und Elastizitätsmatrix bestehenden Kombinationsmatrix im Hauptachsensystem des beliebigen Feldes geschieht, ist bei der Durchführung der Rechnung jeweils nur noch eine Transformation der Zustandsgrößen in das Hauptachsensystem des nachfolgenden Feldes vorzunehmen. Dadurch wird das vorgestellte Verfahren gegenüber bekannten Verfahren erheblich einfacher und es liefert kürzere Rechenzeiten.

1. Einleitung

Das Problem, das hier vorgestellt wird, gehört in das Aufgabengebiet der Maschinendynamik, speziell in das Gebiet der Biegeschwingungen. Das kürzlich erschienene Lehrbuch der Maschinendynamik von Holzweißig/Dresig [1] gibt einen Überblick über die Entwicklung der Methoden der Modellfindung und der Modellberechnung in der Maschinendynamik und läßt den Platz erkennen, den diese Problematik einnimmt. In diesem Aufsatz wird bereits von einem angemessenen Modell zur Berechnung der Biegeschwingungen, speziell der Eigenfrequenzen, ausgegangen. Bei der Berechnung der Eigenfrequenzen von Laufschaufeln axialer Turbomaschinen berücksichtigt man oft die Einflüsse der Einspannelastizität, der Temperatur, der Schubverformung und der Drehträgeit der Querschnitte sowie der Blattverwindung gesondert [2]. Das hat den Vorteil, daß man weiß, wie groß dieser oder jener Einfluß ist, bzw. mit welchen Änderungen zu rechnen ist, falls bei der Auslegung bestimmte Parameter geändert werden. Indessen lassen sich diese Einflüsse in bequemer Weise durch das Verfahren der Übertragungsmatrizen berücksichtigen. Untersuchungen hierzu, die den einen oder anderen Einfluß berücksichtigen, insbesondere den der Verwindung, werden beispielsweise in [3], [4] vorgenommen.

In der vorliegenden Arbeit wird die Gültigkeit der Balkentheorie vorausgesetzt, d. h. es werden formsteife Profile angenommen. Ferner wird vorausgesetzt, daß Profilschwerpunkt und Schubmittelpunkt so dicht beieinander liegen, daß sie als identisch betrachtet werden können, wie das bei zahlreichen Schaufelprofilen der Fall ist. Damit ist es möglich, den Kopplungseffekt zwischen den vor allem interessierenden Flachkantbiegeschwingungen und den Torsionsschwingungen zu vernachlässigen, der, wie Untersuchungen zeigten [5], [6], die Rechnung erheblich aufwendiger gestaltet, wobei im allgemeinen zu vernachlässigende Frequenzänderungen zu erwarten sind. Alle anderen genannten Einflüsse werden berücksichtigt, und es wird auch bei der Aufstellung der Matrizen und Durchführung der Rechnung ein anderer, einfacherer Weg gegenüber den in der Literatur angegebenen eingeschlagen, der im Hinblick auf ein

aufzustellendes Rechenprogramm zu bedeutend kürzeren Rechenzeiten führt.

2. Lösungsweg

Ausgangspunkt ist ein verwundener Balken, Bild 1, der in diskrete Punktmassen und masselose, elastische Felder unterteilt wird. Die Drehträgeit der Querschnitte wird durch entsprechende Massenträgheitsmomente berück-

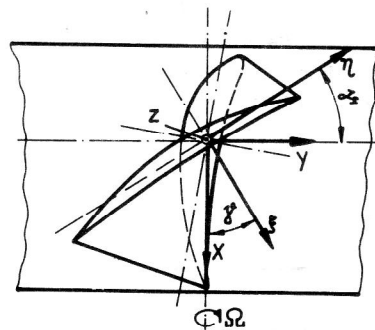


Bild 1
Aufsicht einer verwundenen Turbinenschaufel

sichtigt, die den Punktmassen zugeordnet werden. Den masselosen, elastischen Feldern wird außer der Biegesteifigkeit auch eine Schubsteifigkeit zugeschrieben, so daß damit die Schubdeformation Berücksichtigung findet. Indem man den in der Biegesteifigkeit enthaltenen Elastizitätsmodul und den in der Schubsteifigkeit enthaltenen Gleitmodul eines jeden Feldes als Funktion der Temperatur betrachtet, wird dem Einfluß der Temperatur Rechnung getragen. Die Verwindung γ des gesamten Balkens denkt man sich aus sprunghaften Änderungen $\Delta\gamma_k$ an den Schnittstellen zusammengesetzt.

Das so vorbereitete Modell wird nun unter der Wirkung der Fliehkraft betrachtet. Hierbei wird nicht der von Jäger [4] eingeschlagene, aufwendige Weg beschritten, der eine dauernde Hin- und Rücktransformation zwischen dem scheibenfesten Koordinatensystem xyz und dem Hauptachsensystem $\xi\eta\zeta$ des betrachteten Feldes erforderlich macht, sondern es werden die

Zustandsgrößen im Hauptachsensystem beschrieben. Werden die Elastizitätsmatrix des masselosen, elastischen Feldes und die Massenmatrix noch zu einer Kombinationsmatrix zusammengefaßt, so ist dann an der Schnittstelle zum nächsten Feld lediglich eine Transformation der Zustandsgrößen in das neue Hauptachsensystem vorzunehmen. Dem Einfluß der Einspannelastizität wird schließlich durch entsprechende Berücksichtigung der Randbedingungen an der Einspannstelle Rechnung getragen.

Die Längskraft S_k wurde dabei im Feld k als konstant betrachtet. Ferner wurde unter der Voraussetzung einer kleinen Feldlänge l_k die Näherung

$$\varphi(\bar{z}) \approx \varphi_{k-1}$$

verwendet, und es wurden die in die Matrix (1) zunächst eingehenden Größen

$$\frac{\delta_k \lambda_k^2}{6\epsilon_k}, \quad \frac{\delta_k \lambda_k^2}{2\epsilon_k} \quad \text{und} \quad \frac{\delta_k}{\sigma_k} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{v}_k/\bar{l} \\ \bar{\varphi}_k \\ M_{\bar{k}}\bar{l}/\bar{EI} \\ Q_{\bar{k}}\bar{l}^2/\bar{EI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_k & \frac{\lambda_k^2}{2\epsilon_k} & \left(\frac{\lambda_k^3}{6\epsilon_k} - \frac{\lambda_k}{\sigma_k}\right) \\ 0 & 1 & \frac{\lambda_k}{\epsilon_k} & \frac{\lambda_k^2}{2\epsilon_k} \\ 0 & \lambda_k \delta_k & 1 & \lambda_k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{k-1}/\bar{l} \\ \varphi_{k-1} \\ M_{k-1}\bar{l}/\bar{EI} \\ Q_{k-1}\bar{l}^2/\bar{EI} \end{bmatrix} \quad (1)$$

3. Beschreibung der Matrizen

3.1. Elastizitätsmatrix

Bezeichnet man nach Bild 2 mit v_z eine der Ebenen ξz bzw. ηz des Hauptachsensystems (Bild 3), so erhält man mit den Gleichgewichts- und Verformungsbedingungen nach Integration und Beachtung der Randbedingungen zwischen den Schnittstellen \bar{k} und $k-1$ den Zusammenhang der Zustandsgrößen in dimensionsloser Form

gestrichen, da sie im allgemeinen sehr viel kleiner als 1 und damit gegen 1 vernachlässigbar sind.

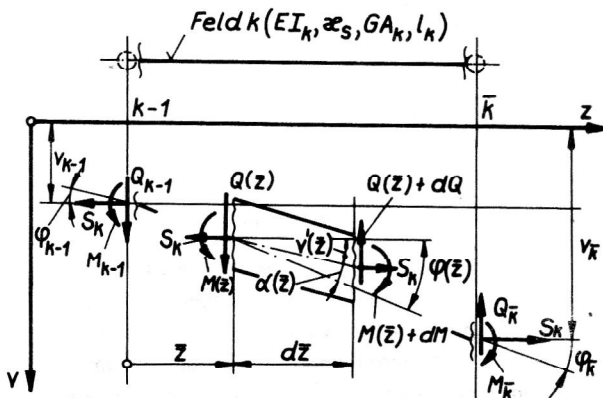


Bild 2
Balkenelement

mit den Bezugsgrößen

\bar{l} – Bezugslänge

\bar{EI} – Bezugssteifigkeit

und den Abkürzungen

$$\lambda_k = \frac{l_k}{\bar{l}}; \quad \epsilon_k = \frac{EI_k}{\bar{EI}}; \quad \delta_k = \frac{S_k \bar{l}^2}{EI}; \quad \sigma_k = \frac{GA_k \bar{l}^2}{\kappa_S EI} \quad (2)$$

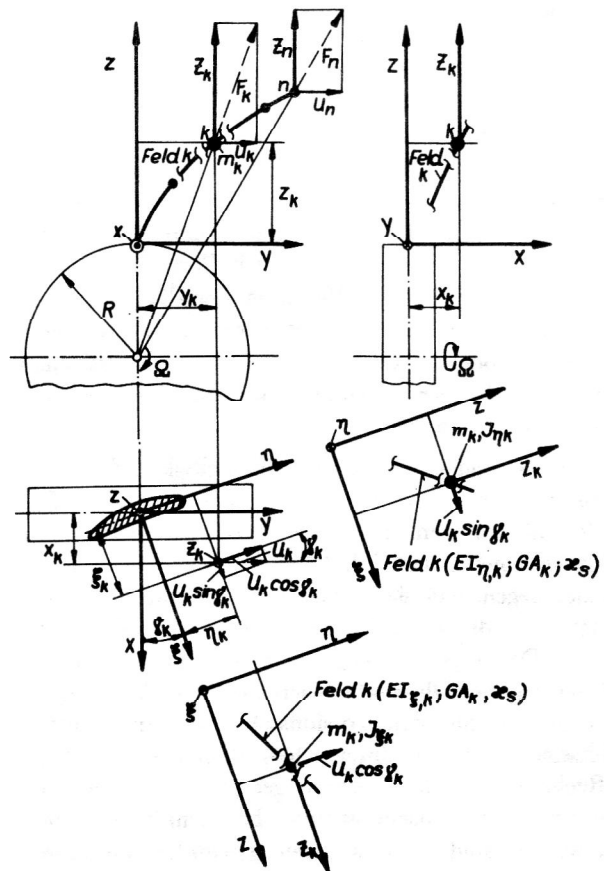


Bild 3
Kräfte und Verschiebungen der Masse m_k

Im $\xi\eta z$ -Koordinatensystem besteht damit der Zusammenhang

$$\begin{bmatrix} \xi/\bar{l} \\ \varphi_\eta \\ M_{\eta\bar{l}}/EI \\ Q_{\xi\bar{l}^2}/EI \\ \hline \eta/\bar{l} \\ \varphi_\xi \\ M_{\xi\bar{l}}/EI \\ Q_{\eta\bar{l}^2}/EI \end{bmatrix} \bar{k} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_k & \frac{\lambda_k^2}{2\epsilon_{\eta k}} \left(\frac{\lambda_k^3}{6\epsilon_{\eta k}} - \frac{\lambda_k}{\sigma_k} \right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{\lambda_k}{\epsilon_{\eta k}} & \frac{\lambda_k^2}{2\epsilon_{\eta k}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_k \delta_k & 1 & \lambda_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda_k & \frac{\lambda_k^2}{2\epsilon_{\xi k}} \left(\frac{\lambda_k^3}{6\epsilon_{\xi k}} - \frac{\lambda_k}{\sigma_k} \right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{\lambda_k}{\epsilon_{\xi k}} & \frac{\lambda_k^2}{2\epsilon_{\xi k}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_k \delta_k & 1 & \lambda_k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi/\bar{l} \\ \varphi_\eta \\ M_{\eta\bar{l}}/EI \\ Q_{\xi\bar{l}^2}/EI \\ \hline \eta/\bar{l} \\ \varphi_\xi \\ M_{\xi\bar{l}}/EI \\ Q_{\eta\bar{l}^2}/EI \end{bmatrix} \quad (4)$$

oder

$$\bar{z}_k = \bar{E}_k \bar{z}_{k-1}, \quad (5)$$

wobei die unterschiedlichen Biegesteifigkeiten in dimensionsloser Form durch

$$\epsilon_{\eta k} = \frac{EI_{\eta,k}}{EI}; \quad \epsilon_{\xi k} = \frac{EI_{\xi,k}}{EI} \quad (6)$$

bezeichnet sind.

3.2. Massenmatrix

Bild 3 zeigt die Verhältnisse. Die an der Masse m_k angreifende Fliehkraft F_k wird ausgedrückt durch ihre Komponenten im $\xi\eta z$ -Hauptachsensystem, das zur Beschreibung der Deformation des masselosen Balkenabschnittes benutzt wurde und in dem auch die Bewegung der Masse m_k beschrieben werden soll. Der Masse m_k werden zur Berücksichtigung der Drehträgeit noch die Massenträgheitsmomente $J_{\xi k}$ bei Drehung um die ξ -Achse in der ηz -Ebene und $J_{\eta k}$ bei Drehung um die η -Achse in der ξz -Ebene zugeordnet.

In das Bild 4 sind in den beiden Ebenen ξz bzw. ηz außer den Komponenten der Fliehkraft noch die weiteren Trägheitswirkungen, die Schnittreaktionen und die im Feld k bzw. im Feld $k+1$ konstante Längskraft S_k bzw. S_{k+1} eingetragen.

Man sieht aus dem Gleichgewicht der Kräfte in z -Richtung, daß sich die Stabkraft im nachfolgenden Balkenabschnitt $k+1$ um die Komponente Z_k der Fliehkraft F_k vermindert.

Die übrigen Gleichgewichts- und Verformungsbedingungen bilden die Grundlage für die Massenmatrix. Berücksichtigt man dabei die Zusammenhänge

$$\frac{U_k}{Z_k} = \frac{y_k}{R + z_k}, \quad (7)$$

$$y_k = \xi_k \sin \gamma_k + \eta_k \cos \gamma_k; \quad x_k = \xi_k \cos \gamma_k - \eta_k \sin \gamma_k, \quad (8)$$

so wird wegen

$$Z_k \approx F_k = m_k (R + z_k) \Omega^2 \quad (9)$$

$$U_k \approx m_k \Omega^2 y_k = m_k \Omega^2 (\xi_k \sin \gamma_k + \eta_k \cos \gamma_k), \quad (10)$$

so daß die in den Gleichgewichtsbedingungen auftretende Größe U_k eliminiert werden kann.

Mit den schon verwendeten und den weiteren Abkürzungen

$$\mu_k = \frac{m_k}{\bar{m}}; \quad \bar{\omega}^2 = \frac{EI}{\bar{m} \bar{l}^3}; \quad \zeta^2 = \frac{\omega^2}{\bar{\omega}^2} \quad (11)$$

und

$$\vartheta_{\eta k} = \frac{J_{\eta k}}{\bar{m} \bar{l}^2}; \quad \vartheta_{\xi k} = \frac{J_{\xi k}}{\bar{m} \bar{l}^2}; \quad \tau^2 = \frac{\Omega^2}{\bar{\omega}^2}, \quad (12)$$

wobei \bar{m} – Bezugsmasse,

erhält man in dimensionsloser Form

$$\bar{z}_k = \bar{M}_k \bar{z}_k \quad (13)$$

mit der Massenmatrix

$$\bar{M}_k = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\vartheta_{\eta k} \zeta^2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_k (\tau^2 \sin^2 \gamma_k + \zeta^2) & 0 & 0 & 1 & \mu_k \tau^2 \sin \gamma_k \cos \gamma_k & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\vartheta_{\xi k} \zeta^2 & 1 & 0 \\ \mu_k \tau^2 \sin \gamma_k \cos \gamma_k & 0 & 0 & 0 & \mu_k (\tau^2 \cos^2 \gamma_k + \zeta^2) & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (14)$$

3.3. Kombinationsmatrix

Aus den Gln. (13) und (5) folgt

$$\bar{z}_k = \bar{M}_k \bar{E}_k \bar{z}_{k-1} = \bar{F}_k \bar{z}_{k-1}, \quad (15)$$

dabei stellt \bar{F}_k die dimensionslose Kombinationsmatrix dar, die mit den Bezeichnungen nach Bild 5 lautet

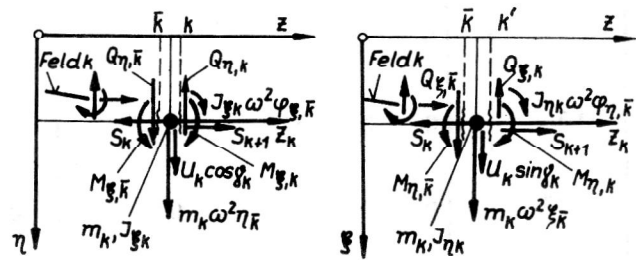


Bild 4
Schnittreaktionen, Trägheitswirkungen und Stablängskräfte im Hauptachsensystem

$$\bar{F}_k = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \lambda_k & a_{1\eta} & a_{2\eta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_{3\eta} & a_{1\xi} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{4\eta} & a_{5\eta} & a_{6\eta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_s & \lambda_k b_s & a_{1\eta} b_s & (1+b_s) a_{2\eta} & a_7 & \lambda_k a_7 & a_7 a_{1\xi} & a_7 a_{2\xi} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda_k & a_{1\xi} & a_{2\xi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_{3\xi} & a_{1\xi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{4\xi} & a_{5\xi} & a_{6\xi} \\ a_7 & \lambda_k a_7 & a_7 a_{1\eta} & a_7 a_{2\eta} & b_c & \lambda_k b_c & a_{1\xi} b_c & (1+b_c) a_{2\xi} \end{array} \right] \quad (16)$$

wobei in der Matrix (16) abgekürzt wurde

$$\begin{aligned} a_{1\eta} &= \frac{\lambda_k^2}{2\epsilon_{\eta k}} & a_{1\xi} &= \frac{\lambda_k^2}{2\epsilon_{\xi k}} & a_{5\eta} &= 1 - \frac{\lambda_k \vartheta_{\eta k}}{\epsilon_{\eta k}} \zeta^2 & a_{5\xi} &= 1 - \frac{\lambda_k \vartheta_{\xi k}}{\epsilon_{\xi k}} \zeta^2 \\ a_{2\eta} &= \frac{\lambda_k^3}{6\epsilon_{\eta k}} - \frac{\lambda_k}{\sigma_k} & a_{2\xi} &= \frac{\lambda_k^3}{6\epsilon_{\xi k}} - \frac{\lambda_k}{\sigma_k} & a_{6\eta} &= \lambda_k - \frac{\lambda_k^2 \vartheta_{\eta k}}{2\epsilon_{\eta k}} \zeta^2 & a_{6\xi} &= \lambda_k - \frac{\lambda_k^2 \vartheta_{\xi k}}{\epsilon_{\xi k}} \zeta^2 \\ a_{3\eta} &= \frac{\lambda_k}{\epsilon_{\eta k}} & a_{3\xi} &= \frac{\lambda_k}{\epsilon_{\xi k}} & a_7 &= \mu_k \tau^2 \sin \gamma_k \cdot \cos \gamma_k \\ a_{4\eta} &= \lambda_k \delta_k - \vartheta_{\eta k} \zeta^2 & a_{4\xi} &= \lambda_k \delta_k - \vartheta_{\xi k} \zeta^2 & b_s &= \mu_k (\tau^2 \sin^2 \gamma_k + \zeta^2) & b_c &= \mu_k (\tau^2 \cos^2 \gamma_k + \zeta^2). \end{aligned} \quad (16a)$$

Die in die Abkürzung (2) eingehende Stablängskraft S_k des Abschnittes k berechnet sich aus

$$S_k = \sum_{\nu=k}^n S_\nu \approx \Omega^2 \sum_{\nu=k}^n m_\nu (R + z_\nu). \quad (17)$$

3.4. Transformationsmatrix

Da die Hauptachsen des nachfolgenden Querschnittes um den Winkel $\Delta\gamma_k = \gamma_{k+1} - \gamma_k$ gedreht sind, ist der Ausgangsvektor aus dem Feld k nicht gleich dem Eingangsvektor in das Feld $k+1$, und es muß erst eine Transformation der Zustandsgrößen in das neue Hauptachsensystem $\bar{\xi}\bar{\eta}$ vorgenommen werden. Nach Bild 6 erhält man

$$\bar{T}_k = \left[\begin{array}{cccc|cccc} \cos \Delta\gamma_k & 0 & 0 & 0 & \sin \Delta\gamma_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Delta\gamma_k & 0 & 0 & 0 & \sin \Delta\gamma_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \Delta\gamma_k & 0 & 0 & 0 & \sin \Delta\gamma_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \Delta\gamma_k & 0 & 0 & 0 & \sin \Delta\gamma_k \\ \hline -\sin \Delta\gamma_k & 0 & 0 & 0 & \cos \Delta\gamma_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \Delta\gamma_k & 0 & 0 & 0 & \cos \Delta\gamma_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin \Delta\gamma_k & 0 & 0 & 0 & \cos \Delta\gamma_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \Delta\gamma_k & 0 & 0 & 0 & \cos \Delta\gamma_k \end{array} \right] \quad (20)$$

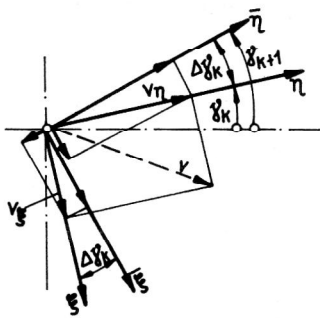


Bild 6
Zur Transformation der Zustandsgrößen

für eine beliebige Zustandsgröße, zum Beispiel für die Verschiebung v , die durch die Komponenten v_ξ und v_η ausgedrückt ist, nach der Drehung

$$v_{\bar{\xi}} = v_\xi \cos \Delta\gamma_k + v_\eta \sin \Delta\gamma_k, \quad (18)$$

$$v_{\bar{\eta}} = -v_\xi \sin \Delta\gamma_k + v_\eta \cos \Delta\gamma_k$$

usw.

Somit ist der Zusammenhang der Zustandsgrößen nach und vor der Drehung hergestellt, er lautet

$$\bar{z}_k = \bar{T}_k \cdot z_k \quad (19)$$

mit der Transformationsmatrix

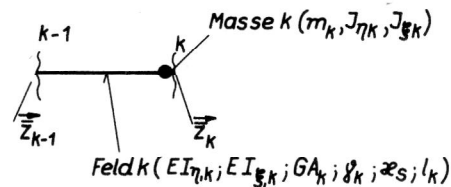


Bild 5
Zur Kombinationsmatrix

4. Rechengang

Beginnt man die Rechnung am Innenrand, so ist $\Delta\gamma_k$ negativ (vgl. Bild 1), und es ist bei elastischer Einspannung durch die Randbedingungen

$$v_{\xi,0} = 0; \quad v_{\eta,0} = 0$$

$$\varphi_{\eta,0} = \beta_\eta \cdot M_{\eta,0} = \bar{\beta}_\eta \left(\frac{M_{\eta I}}{EI} \right)_0; \quad \bar{\beta}_\eta = \beta_\eta \frac{EI}{I} \quad (21)$$

$$\varphi_{\xi,0} = \beta_\xi \cdot M_{\xi,0} = \bar{\beta}_\xi \left(\frac{M_{\xi I}}{EI} \right)_0; \quad \bar{\beta}_\xi = \beta_\xi \frac{EI}{I}$$

der Eingangsvektor festgelegt, nämlich

$$\bar{z}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\beta}_\eta \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left(\frac{M_\eta \bar{I}}{EI} \right)_0 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left(\frac{Q_\xi \bar{I}^2}{EI} \right)_0 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{\beta}_\xi \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \left(\frac{M_\xi \bar{I}}{EI} \right)_0 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \left(\frac{Q_\eta \bar{I}^2}{EI} \right)_0 \quad (22)$$

Bei dieser Vorgehensweise sind für die numerische Auswertung auf einem Digitalrechner die bezogenen Einspannelastizitäten $\bar{\beta}_\eta$ und $\bar{\beta}_\xi$ als Zahlenwerte vorzugeben und es ist die Kreisfrequenz ω so lange zu variieren, bis der Restwert $R(\omega)$ zu Null wird, der durch die Randbedingungen des Ausgangsvektors gegeben ist.

Führt man indessen die Rechnung vom freien Außenrand zum Innenrand durch, so ist $\Delta\gamma_k$ positiv und es ist eine Kombinationsmatrix \bar{F}_k^* zu verwenden, die sich aus der Matrix (16) durch Spiegelung an der Nebendiagonalen ergibt. Die Stablängskraft lautet dann

$$S_k^* - \Omega^2 \sum_{\nu=1}^k m_\nu (R + z_\nu). \quad (23)$$

Dieser Weg hat den Vorteil, daß die Einspannelastizitäten erst nach den Matrizenmultiplikationen über die

Randbedingungen am Innenrand in die Rechnung eingehen. Es läßt sich dann das Problem umkehren, indem nämlich das zugehörige Wertepaar (β_ξ, β_η) berechnet wird, welches das gewählte ω zur Eigenkreisfrequenz macht. Gibt man das Verhältnis der Einspannelastizitäten

$$V = \frac{\beta_\xi}{\beta_\eta} \quad (24)$$

über flache und hohe Kante vor, so läßt sich schließlich die Funktion $\beta_\xi = f(\omega, V)$ aufstellen, aus der die Frequenzen für bestimmte Werte β_ξ bei gegebenem Einspannverhältnis abgelesen werden können.

Liegt der Eigenwert ω fest, so liefert eine nochmalige Durchrechnung den Zustandsvektor an der Schnittstelle k , Gl. (15). Die damit festliegenden Verschiebungen ξ_k und η_k lassen sich anschließend mit dem Winkel γ_k nach den Gln. (8) in das xyz-Koordinaten-

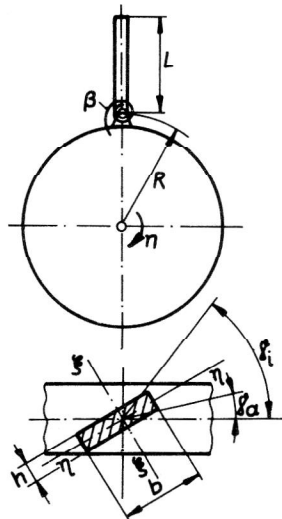
Tabelle 1

Berücksichtigung von	1. Eigenwert (Flachkantschwingung)			2. Eigenwert (Hochkantschwingung)		
	ohne Verwindung		mit Verwindung	ohne Verwindung		mit Verwindung
	Handr. f[Hz]	Auto- matr. f[Hz]	Auto- matr. f[Hz]	Handr. f[Hz]	Auto- matr. f[Hz]	Auto- matr. f[Hz]
Biegung	310,3	309,9	313,5	1241,3	1239,8	1009,8
Biegung, Schub und Drehträchtigkeit	308,9	308,4	311,1	1161,9	1160,4	972,2
Biegung, Einspannelastizität	259,5	259,9	263,1	1241,3	1240,5	945,4
Biegung, Schub u. Dreh- trächtigkeit, Einspannel., Fliehkraft	276,4	276,3	278,7	1167,4	1165	923,7

system umrechnen, so daß die Schwingform vorliegt. Das beschriebene Verfahren wurde in der Sprache FORTRAN für die Rechananlage BESM 6 programmiert¹⁾ und steht als Programm zur Nutzung bereit.

5. Berechnungsbeispiel

Aus Gründen der Vergleichbarkeit der Rechenergebnisse bei getrennter Berücksichtigung verschiedener Einflüsse wird ein in der Radscheibe elastisch eingespannter Stab mit konstantem Rechteckquerschnitt untersucht, der zwischen γ_i und γ_a gleichmäßig verwunden ist. Alle für die Rechnung erforderlichen Daten sind in das Bild 7 eingetragen.



$$\begin{aligned}
 n &= 3000 \text{ min}^{-1} \\
 R &= 500 \text{ mm} \\
 L &= 200 \text{ mm} \\
 b &= 60 \text{ mm} \\
 h &= 15 \text{ mm} \\
 \gamma_i &= \frac{4\pi}{9} \text{ rad } (80^\circ) \\
 \gamma_a &= \frac{\pi}{9} \text{ rad } (20^\circ) \\
 \beta &= 0 \\
 \beta_\eta &= 0,6 \cdot 10^{-8} \text{ 1/Nmm} \\
 E &= 2,06 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2 \\
 G &= \frac{E}{2,6} \\
 \alpha_S &= 1,2
 \end{aligned}$$

Bild 7
Daten für das Berechnungsbeispiel

1) Die Programmierung wurde freundlicherweise von Herrn Doz. Dr.-Ing. D. Orlamünder, Rechenzentrum der TU Dresden, übernommen.

Tabelle 1 zeigt die Ergebnisse. Dabei sind die mit dem Rechenautomaten erhaltenen Ergebnisse denen gegenübergestellt, die man von Hand bei gesonderter Berücksichtigung der Einflüsse erhält (vgl. auch [2]). Für die Automatenrechnung wurde der Stab in 20 Abschnitte unterteilt. Diese Unterteilung ist für die Untersuchung der ersten beiden Eigenfrequenzen offensichtlich fein genug, um genügend genaue Werte zu erhalten, denn die Ergebnisse der Automatenrechnung unterscheiden sich von denen der Handrechnung für den unverwundenen Stab nur äußerst wenig voneinander.

Man sieht, daß durch die Verwindung der erste Eigenwert geringfügig erhöht ($\approx 1\%$), der zweite Eigenwert indessen beachtlich herabgesetzt wird ($\approx 20\%$).

LITERATUR

- [1] Holzweißig/Dresig: Lehrbuch der Maschinendynamik. VEB Fachbuchverlag Leipzig 1979.
- [2] Sollmann, H.: Schaufelschwingungen axialer Turbomaschinen. Dissertation B an der TU Dresden 1977.
- [3] Dietrich, G., Anke, H.: Die Berechnung der Biegeeigenfrequenzen verwundener Schaufeln mit Hilfe von Übertragungsmatrizen. Maschinenbautechnik 11 (1962), S. 627 – 630.
- [4] Jäger, B.: Die Eigenfrequenzen verwundener Schaufeln. Ingenieur-Archiv, XXIX. Band 1960, S. 280 – 290.
- [5] Montoya, I.: Gekoppelte Biege-Torsionsschwingungen einer stark verwundenen rotierenden Schaufel. Brown Boveri Mitteilungen. Bd. 53, Nr. 3, S. 216 – 230.
- [6] Stüwing, D.: Berücksichtigung der Kopplung zwischen Biegung und Torsion bei diskreten Balkenmodellen. Maschinenbautechnik 24 (1975), S. 567 – 570.

Anschrift des Verfassers:
Doz. Dr. sc. techn. H. Sollmann
Technische Universität
Sektion Grundlagen des
Maschinenwesens,
8027 Dresden, Mommsenstraße