

Schwingungen von Kugelschalen mit schwingungsdämpfender Oberflächenhülle

Dieter Witt

Zur Schwingungsdämpfung von Schalen wird auf ihrer Oberfläche eine mehrschichtige, dünnwandige Hülle aus armierten Materialien aufgebracht. Die durchgeführten Untersuchungen an der Kugelschale mit einer solchen Oberflächenhülle basieren auf der Theorie vielschichtiger Schalen und führen auf finite Differenzen-Differentialgleichungen. Die schwingungsdämpfende Wirkung der Hülle beruht auf der Energiedissipation in den armierten polymeren Zwischenschichten, deren viskoelastische Eigenschaften bei stationären Schwingungen nach der Theorie des komplexen Moduls erfaßt werden. Am Beispiel der geschlossenen Kugelschale werden numerische Ergebnisse für die Bewertung der schwingungsdämpfenden Wirkung der Oberflächenhülle vorgestellt und günstige Einflußparameter aufgezeigt.

Schwingungen von Kugelschalen mit schwingungsdämpfender Oberflächenhülle

Bei Flächentragwerken ist das Eigenfrequenzspektrum derartig dicht, daß es wegen der vielen möglichen äußeren Erregungen in der Regel nicht gelingt, eine resonanzfreie Konstruktion zu projektieren. Daraus ergibt sich die Aufgabe, schwingungsabwehrende Maßnahmen zu treffen und dafür Berechnungsmethoden zu entwickeln. Eine mögliche konstruktive Realisierung stellt das Aufbringen einer mehrschichtigen, dünnwandigen Oberflächenhülle aus armierten polymeren Materialien dar, die bei unbedeutender Veränderung des Gewichtes und der Abmessungen der tragenden Konstruktion eine effektive Schwingungsdämpfung gewährleistet.

Die tragende Schale stellt gemeinsam mit der mehrschichtigen Hülle einen vielschichtigen Körper dar, für den in [1] die theoretischen Grundlagen zusammengestellt wurden. Die schwingungsdämpfende Wirkung der Hülle beruht auf der Energiedissipation in ihren armierten polymeren Zwischenschichten, deren viskoelastische Eigenschaften bei stationären Schwingungen nach der Theorie des komplexen Moduls [2], [3] erfaßt werden. Am Beispiel der Kugelschale werden numerische Ergebnisse für den Einfluß der schwingungsdämpfenden Oberflächenhülle vorgestellt und günstige Einflußparameter aufgezeigt.

1. Wir betrachten eine tragende Schale (Index „0“) der Dicke H_0 mit einer vielschichtigen Oberflächenhülle der Dicke H , die aus sich abwechselnden n Schichten geringer Steifigkeit der Dicke s_k (verbindende, weiche Schichten) und n Schichten erhöhter Steifigkeit der Dicke h_k (armierende, harte Schichten) (Bild 1) besteht ($k = 1, 2, \dots, n$). Diesen Verbund beziehen wir auf ein orthogonales Koordinatensystem x^j ($j = 1, 2, 3$) dergestalt, daß die Mittelflächen der harten Schichten durch $x^3 = \text{const}$ beschrieben werden, während die Flächen $x^\alpha = \text{const}$ ($\alpha = 1, 2$) orthogonal dazu liegen. Schlupf zwischen allen Schichten der vielschichtigen Schale wird ausgeschlossen. Die Materialien der Hüllschichten und des tragenden Flächentragwerkes seien

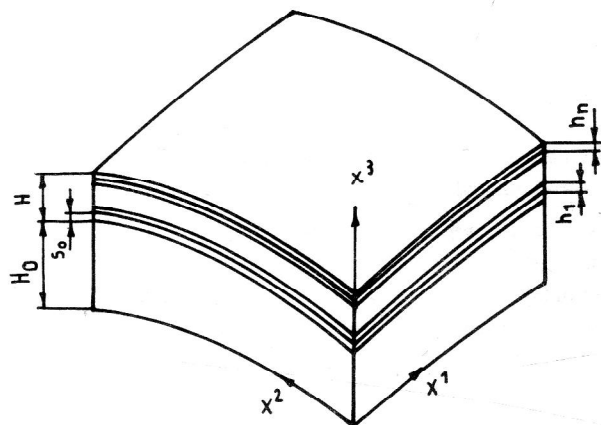


Bild 1

linear viskoelastisch, isotrop und homogen. Für die harten Schichten einschließlich der tragenden Schale gelte die Hypothese von Kirchhoff-Love, während in den weichen Schichten nur die Schubverzerrungen in der Schicht und die Dehnung normal zur Schicht Bedeutung haben, die über die Annahme linearer Verschiebungsverteilungen über die Wanddicke der weichen Schicht gewonnen werden. Diesen Voraussetzungen entsprechen in den harten Schichten die elementaren Schnittgrößen

$$N^{(k)\alpha\beta} = h_k \lambda^{(k)\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon_{\gamma\delta}^{(k)} \quad (1.1)$$

$$M^{(k)\alpha\beta} = \frac{h_k^3}{12} \lambda^{(k)\alpha\beta\gamma\delta} \kappa_{\gamma\delta}^{(k)}$$

und in den weichen Schichten die Scher- und Längskräfte

$$Q^{[k]\alpha} = -s_k 2G^{[k]} \epsilon_{\beta 3}^{[k]} \quad (1.2)$$

$$N^{[k]} = s_k E_3^{[k]} \epsilon_{33}^{[k]}$$

Hierin sind $\lambda^{(k)\alpha\beta\gamma\delta}$ die kontravarianten Komponenten des Viskoelastizitätstensors beim ebenen

Spannungszustand in der k-ten harten Schicht mit dem Modul $E^{(k)}$, $G^{[k]}$ und $E_3^{[k]}$ Schubmodul bzw. Modul in Normalenrichtung der k-ten weichen Schicht, $a^{[k]\alpha\beta}$ kontravariante Komponenten des Maßtensors der Mittelfläche der k-ten weichen Schicht, $e_{\gamma\delta}^{(k)}$ und $\kappa_{\gamma\delta}^{(k)}$ die Komponenten des Verzerrungstensors bzw. des Tensors der Krümmungsänderung der Mittelfläche der k-ten harten Schicht, $\epsilon_{j3}^{[k]}$

die wesentlichen Komponenten des Verzerrungstensors der weichen Schichten. Die hochgestellten Indizes (k) und [k] überall weisen den Bezug auf die k-te harte Schicht bzw. k-te weiche Schicht aus. Griechische Indizes haben wie gewöhnlich die Werte 1, 2 und lateinische 1, 2, 3.

Alle Moduln haben bei stationären Schwingungen die komplexe Form [2], [3]

$$G^{[k]} = G_r^{[k]} + i G_i^{[k]} = G_r^{[k]} (1 + i\eta^{[k]}) \quad (1.3)$$

$$\eta^{[k]} = G_i^{[k]} / G_r^{[k]}$$

usw. Die Indizes r und i kennzeichnen den Real- und Imaginärteil des Moduln. η ist der sog. Verlustfaktor (Verlusttangens).

Aus dem Prinzip von Hamilton folgen unter Verwendung der Eulerschen Gleichungen die Bewegungsdifferentialgleichungen für die geschichtete Schale bei Berücksichtigung der Trägheitskräfte in den harten (Dichte $\rho^{(k)}$) und weichen (Dichte $\rho^{[k]}$) Schichten [1]:

$$N^{(k)\alpha\beta} |_{\beta}^{(k)} + b^{(k)\alpha} Q^{(k)\beta} + q^{*(k)\alpha} = 0 \quad (1.4)$$

$$b_{\alpha\beta}^{(k)} N^{(k)\alpha\beta} - Q^{(k)\alpha} |_{\alpha}^{(k)} + q^{*(k)3} = 0 \quad (1.5)$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

$$\text{mit } Q^{(k)\alpha} = M^{(k)\alpha\beta} |_{\beta}^{(k)} \quad (1.6)$$

$$\text{und } q^{*(k)l} = q^{(k)l} + \tilde{q}^{(k)l} + \tilde{\tilde{q}}^{(k)l} \quad (1.7)$$

Hierin sind $|_{\gamma}^{(k)}$ das Symbol für die kovariante Differentiation in der Mittelfläche der k-ten harten Schicht, $b_{\alpha\beta}^{(k)}$ Komponenten des Krümmungstensors der k-ten harten Schicht, $q^{(k)l}$ die an den harten Schichten angreifenden äußeren Belastungen, $\tilde{q}^{(k)l}$ die Trägheitskräfte

$$\tilde{q}^{(k)l} = -\rho^{(k)} h_k \ddot{v}^{(k)l} - \frac{1}{4} [\rho^{[k]} s_k t_k^* (\ddot{v}^{(k+1)l} + \ddot{v}^{(k)l} + \rho^{[k-1]} s_{k-1} t_k^{**} (\ddot{v}^{(k)l} + \ddot{v}^{(k-1)l})] \quad (1.8)$$

mit $v^{(k)l}$ als den Komponenten des Verschiebungstensors eines Punktes der Mittelfläche der k-ten harten Schicht sowie $\tilde{\tilde{q}}^{(k)l}$ die von Seiten der [k-1]-

ten und k-ten weichen Schicht auf die k-te harte Schicht einwirkenden Kräfte

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{q}}^{(k)\alpha} &= -\frac{t_k^*}{s_k} Q^{[k]*\alpha} + \frac{t_k^{**}}{s_{k-1}} Q^{[k-1]**\alpha} + \\ &+ 2b^{(k)\alpha} |_{\beta}^{(k)} \left(\frac{c_k^* t_k^*}{s_k} Q^{[k]*\beta} + \frac{c_k^{**} t_k^{**}}{s_{k-1}} Q^{[k-1]**\beta} \right) \\ \tilde{\tilde{q}}^{(k)3} &= -\left(\frac{t_k^*}{s_k} Q^{[k]*\alpha} + \frac{t_k^{**}}{s_{k-1}} Q^{[k-1]**\alpha} \right) |_{\alpha}^{(k)} + \\ &+ \frac{t_k^*}{s_k} N^{[k]} - \frac{t_k^{**}}{s_{k-1}} N^{[k-1]} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Durch Transformation der Scherkräfte der weichen Schichten in die harten Schichten ergeben sich die Formeln

$$Q^{[k]*\alpha} = (\delta_{\beta}^{\alpha} + c_k^* b^{[k]\alpha}_{\beta}) Q^{[k]\beta}$$

$$Q^{[k-1]**\alpha} = (\delta_{\beta}^{\alpha} - c_k^{**} b^{[k-1]\alpha}_{\beta}) Q^{[k-1]\beta} \quad (1.10)$$

mit

$$c_k^* = \frac{1}{2} (s_k + h_k), \quad c_k^{**} = \frac{1}{2} (s_{k-1} + h_k) \quad (1.11)$$

Die Abkürzungen

$$t_k^* = \left(\frac{a^{[k]}}{a^{(k)}} \right)^{\frac{1}{2}} \vartheta_{kn}, \quad t_k^{**} = \left(\frac{a^{[k-1]}}{a^{(k)}} \right)^{\frac{1}{2}} \vartheta_{k0}$$

$$\vartheta_{ij} = \begin{matrix} 0 & i=j \\ 1 & i \neq j \end{matrix} \quad (1.12)$$

folgen aus Umrechnungen der Mittelflächen.

2. Wir wenden nun die vorgestellten Grundlagen auf eine vielschichtige Kugelschale an, die wir auf ein Kugelkoordinatensystem $x^1 = \alpha$ (α – Breitenwinkel) und $x^2 = \beta$ (β – Längswinkel) beziehen. Aus den Tensorbeziehungen (1.4 – 1.6) folgen für dieses Problem die Bewegungsgleichungen in physikalischen Komponenten zu

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_k} [N_{11,\alpha}^{(k)} + N_{12,\beta}^{(k)} / \sin\alpha + (N_{11}^{(k)} - N_{22}^{(k)}) \cot\alpha - Q_1^{(k)}] + \\ + q_1^{*(k)} = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_k} [N_{21,\alpha}^{(k)} + N_{22,\beta}^{(k)} / \sin\alpha + (N_{12}^{(k)} + N_{21}^{(k)}) \cot\alpha - Q_2^{(k)}] + \\ + q_2^{*(k)} = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{R_k} [N_{11}^{(k)} + N_{22}^{(k)} + \langle (Q_1^{(k)} \sin\alpha)_{,\alpha} + \\ + Q_{2,\beta}^{(k)} \rangle / \sin\alpha] + q_3^{*(k)} = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

mit

$$Q_1^{(k)} = \frac{1}{R_k} [M_{11,\alpha}^{(k)} + M_{12,\beta}^{(k)} / \sin\alpha + (M_{11}^{(k)} - M_{22}^{(k)}) \cot\alpha] \quad (2.4)$$

$$Q_2^{(k)} = \frac{1}{R_k} [M_{21,\alpha}^{(k)} + M_{22,\beta}^{(k)} / \sin\alpha + (M_{12}^{(k)} + M_{21}^{(k)}) \cot\alpha]$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots, n), \quad \frac{\partial(\quad)}{\partial\alpha} = (\quad), \quad \alpha \text{ usw.}$$

R_k ist der Radius der Mittelfläche der k -ten harten Schicht.

Im weiteren bezeichnen wir die Verschiebungen der Mittelfläche der k -ten harten Schicht in Richtung der Koordinaten x^1, x^2, x^3 mit $u^{(k)}, v^{(k)}, w^{(k)}$.

Die Schnittgrößen in (2.1 – 2.3) werden durch die Verschiebungen ausgedrückt. Es ist jedoch zweckmäßig, folgende invariante Größen [4]

$$\Theta^{(k)} = [(u^{(k)} \sin\alpha)_{,\alpha} + v^{(k)}_{,\beta}] / \sin\alpha + 2 w^{(k)} \quad (2.5)$$

$$\chi^{(k)} = [(v^{(k)} \sin\alpha)_{,\alpha} - u^{(k)}_{,\beta}] / (2 \sin\alpha)$$

einzuführen. Damit nehmen die Bewegungsgleichungen der vielschichtigen Kugelschale folgende Form an

$$\frac{A_k}{R_k^2} \left\{ \Theta_{,\alpha}^{(k)} - d_k^2 [(\nabla^2 + 2) w^{(k)}]_{,\alpha} - (1 - \nu_k) \chi_{,\beta}^{(k)} / \sin\alpha + (1 - \nu_k) (u^{(k)} - w_{,\alpha}^{(k)}) \right\} + q_1^{*(k)} = 0 \quad (2.6)$$

$$\frac{A_k}{R_k^2} \left\{ \langle \Theta_{,\beta}^{(k)} - d_k^2 [(\nabla^2 + 2) w^{(k)}]_{,\beta} \rangle / \sin\alpha + (1 - \nu_k) \chi_{,\alpha}^{(k)} + (1 - \nu_k) (v^{(k)} - w_{,\beta}^{(k)} / \sin\alpha) \right\} + q_2^{*(k)} = 0 \quad (2.7)$$

$$\frac{A_k}{R_k^2} \left\{ [d_k^2 \nabla^2 - (1 + \nu_k)] \Theta^{(k)} - d_k^2 [(\nabla^2 + 1 - \nu_k)(\nabla^2 + 2)] w^{(k)} \right\} + q_3^{*(k)} = 0 \quad (2.8)$$

mit dem dimensionslosen Laplace-Operator

$$\nabla^2(\quad) = \left\{ [(\quad)_{,\alpha} \sin\alpha]_{,\alpha} + (\quad)_{,\beta\beta} / \sin\alpha \right\} / \sin\alpha \quad (2.9)$$

und den Abkürzungen

$$A_k = \frac{E^{(k)} h_k}{1 - \nu_k^2}, \quad d_k^2 = \frac{1}{12} \left(\frac{h_k}{R_k} \right)^2 \quad (2.10)$$

Durch Elimination der tangentialen Verschiebungen $u^{(k)}, v^{(k)}$ in den Gln. (2.6 – 2.7) erhalten wir

$$\frac{A_k}{R_k^2} [(\nabla^2 + 1 - \nu_k) \Theta^{(k)} - (d_k^2 \nabla^2 + 1 - \nu_k)(\nabla^2 + 2) w^{(k)}] + [(q_1^{*(k)} \sin\alpha)_{,\alpha} + q_2^{*(k)}] / \sin\alpha = 0 \quad (2.11)$$

$$\frac{A_k}{R_k^2} (1 - \nu_k)(\nabla^2 + 2) \chi^{(k)} + [(q_2^{*(k)} \sin\alpha)_{,\alpha} - q_1^{*(k)}] / \sin\alpha = 0 \quad (2.12)$$

Die Beziehungen (2.11), (2.8) enthalten nur die Größen $\Theta^{(k)}$ und $w^{(k)}$, während in (2.12) nur die Größen $\chi^{(k)}$ auftreten.

Für die weiteren Untersuchungen nehmen wir einige Vereinfachungen¹⁾ vor:

Die Schale sei dünnwandig. Das bedeutet, daß die Maßänderungen über die Dicke der Schale vernachlässigt werden:

$$a_{[k]\alpha\beta} = a_{(k)\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}, \quad \begin{vmatrix} [k] \\ \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (k) \\ \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha \end{vmatrix},$$

$$b_{\alpha\beta}^{[k]} = b_{\alpha\beta}^{(k)} = b_{\alpha\beta}, \quad t_k^* = \vartheta_{kn}, \quad t_k^{**} = \vartheta_{k0},$$

$$Q[k]^* \alpha = Q[k]^{**} \alpha = Q[k] \alpha$$

Die weichen Schichten arbeiten nur auf Schub, d. h. ihre Dickenänderung in Richtung der Normalen zur Mittelfläche wird vernachlässigt:

$$\epsilon_{33}^{[k]} = 0 \quad \text{oder} \quad w^{(k)} = w, \quad N^{[k]} = 0$$

Unter Berücksichtigung dieser Vereinfachungen, der Beziehungen (1.8), (1.9), (1.2) und (2.5) lauten die Bewegungsgleichungen

$$\frac{A_k}{R_k^2} [(\nabla^2 + 1 - \nu_k) \Theta^{(k)} - (d_k^2 \nabla^2 + 1 - \nu_k)(\nabla^2 + 2) w] + \frac{G^{[k]} \vartheta_{kn}}{s_k} (\Theta^{(k+1)} - \Theta^{(k)} + \frac{c_k}{R_k} \nabla^2 w) - \quad (2.11a)$$

$$- \frac{G^{[k-1]} \vartheta_{k0}}{s_{k-1}} (\Theta^{(k)} - \Theta^{(k-1)} + \frac{c_{k-1}}{R_{k-1}} \nabla^2 w) + \left\{ [(q_1^{(k)} + \tilde{q}_1^{(k)}) \sin\alpha]_{,\alpha} + (q_2^{(k)} + \tilde{q}_2^{(k)})_{,\beta} \right\} / \sin\alpha = 0$$

$$\frac{A_k}{R_k^2} (1 - \nu_k)(\nabla^2 + 2) \chi^{(k)} + 2 \left[\frac{G^{[k]} \vartheta_{kn}}{s_k} (\chi^{(k+1)} - \chi^{(k)}) - \frac{G^{[k-1]} \vartheta_{k0}}{s_{k-1}} (\chi^{(k)} - \chi^{(k-1)}) \right] +$$

1) In [5] hat der Verfasser die vorgestellte Problematik für die flache Kugelschale behandelt.

$$+ \left\{ \left[(q_2^{(k)} + \tilde{q}_2^{(k)}) \sin \alpha \right], \alpha - (q_1^{(k)} + \tilde{q}_1^{(k)}), \beta \right\} / \sin \alpha = 0 \quad (2.12a)$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

$$\sum_{k=0}^n \frac{A_k}{R_k^2} \left\{ [d_k^2 \nabla^2 - (1 + \nu_k)] \Theta^{(k)} - d_k^2 [(\nabla^2 + 1 - \nu_k)(\nabla^2 + 2)] w \right\} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{G[k]}{s_k} \left(\frac{c_k^*}{R_k} + \frac{c_{k+1}^{**}}{R_{k+1}} \right) (\Theta^{(k+1)} - \Theta^{(k)} + \frac{c_k}{R_k} \nabla^2 w) -$$

$$- \sum_{k=0}^n (\rho^{(k)} h_k + \rho^{[k]} s_k \vartheta_{kn}) \ddot{w} + \sum_{k=0}^n q_3^{(k)} = 0 \quad (2.13)$$

mit

$$c_k = c_k^* + c_{k+1}^{**} \quad (2.14)$$

Die Relation (2.13) entstand durch Addition der Gln. (2.8). Somit hat sich die Anzahl der Bewegungsgleichungen von $3(n+1)$ auf $2(n+1) + 1$ verringert.

3. Im weiteren betrachten wir vorzugsweise die Schwingungen in normaler Richtung, die durch die Relationen (2.11 a), (2.13) beschrieben werden, wobei wir die tangentialen äußeren Belastungen und die tangentialen Trägheitskräfte vernachlässigen wollen

$$(q_1^{(k)} = q_2^{(k)} = \tilde{q}_1^{(k)} = \tilde{q}_2^{(k)} = 0).$$

In diesem Fall ist das Gleichungssystem (2.12 a) homogen mit den trivialen Lösungen

$$\chi^{(k)} = 0 \quad (3.1)$$

Auf die Schale wirke eine harmonische normale äußere Belastung

$$\sum_{k=0}^n q_3^{(k)} = q(\alpha, \beta) e^{i\Omega t} \quad (3.2)$$

Die Lösung des Systems (2.11 a), (2.13) suchen wir in Form von

$$w(\alpha, \beta, t) = \bar{w}(\alpha, \beta) e^{i\Omega t} \\ \Theta^{(k)}(\alpha, \beta, t) = \bar{\Theta}^{(k)}(\alpha, \beta) e^{i\Omega t} \quad (3.3)$$

wobei $\bar{w}(\alpha, \beta)$, $\bar{\Theta}^{(k)}(\alpha, \beta)$ komplexe Amplituden bei der gegebenen reellen Erregerkreisfrequenz Ω sind. Damit lauten die Gleichungen für die normalen Schwingungen der Kugelschale mit Hülle

$$\delta_k [(\nabla^2 + 1 - \nu_k) \bar{\Theta}^{(k)} - (d_k^2 \nabla^2 + 1 - \nu_k)(\nabla^2 + 2) \bar{w}] + \lambda_k \vartheta_{kn} (\bar{\Theta}^{(k+1)} - \bar{\Theta}^{(k)} + \frac{c_k}{R_k} \nabla^2 \bar{w}) -$$

$$- \lambda_{k-1} \vartheta_{k0} (\bar{\Theta}^{(k)} - \bar{\Theta}^{(k-1)} + \frac{c_{k-1}}{R_{k-1}} \nabla^2 \bar{w}) = 0 \quad (3.4)$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

$$\sum_{k=0}^n \delta_k \left\{ [d_k^2 \nabla^2 - (1 + \nu_k)] \bar{\Theta}^{(k)} - d_k^2 [(\nabla^2 + 1 - \nu_k)(\nabla^2 + 2)] \bar{w} \right\} + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \left(\frac{c_k^*}{R_k} + \frac{c_{k+1}^{**}}{R_{k+1}} \right) (\bar{\Theta}^{(k+1)} - \bar{\Theta}^{(k)} + \frac{c_k}{R_k} \nabla^2 \bar{w}) + M \Omega^{*2} \bar{w} + \bar{q} = 0 \quad (3.5)$$

Darin sind

$$\delta_k = \frac{A_k}{A_0} \left(\frac{R_0}{R_k} \right)^2, \quad \lambda_k = \frac{G[k] R_0^2}{A_0 \cdot s_k}, \quad \Omega^{*2} = \Omega^2 \frac{\rho^{(0)} H_0 R_0^2}{A_0} \quad (3.6)$$

$$M = \sum_{k=0}^n \left(\frac{\rho^{(k)} h_k}{\rho^{(0)} H_0} + \frac{\rho^{[k]} s_k}{\rho^{(0)} H_0} \vartheta_{kn} \right), \quad \bar{q} = q \frac{R_0^2}{A_0}$$

wobei die Parameter H_0 , R_0 , A_0 ($E^{(0)}$, ν_0), $\rho^{(0)}$ die tragende Schale charakterisieren.

Zur weiteren Vereinfachung des Problems möge die schwingungsdämpfende Hülle einen regelmäßigen Aufbau haben und aus sich abwechselnden n weichen und n harten Schichten mit den Werten $s_k = s$, $G^{[k]} = G$, $\rho^{[k]} = \rho^{[1]}$, $h_k = h$, $A_k = A$ ($E^{(k)} = E$, $\nu_k = \nu$), $\rho^{(k)} = \rho^{(1)}$ bestehen. Für alle Schichten der dünnen Hülle gelte ein mittlerer Radius

$$R_k = R = R_0 + \frac{1}{2} (H_0 + H) \quad (3.7)$$

$$\text{mit der Hüllendicke } H = n(s + h) \quad (3.8)$$

Die äußere Belastung kann in eine Reihe von Kugelfunktionen zerlegt werden:

$$\bar{q}(\alpha, \beta) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \hat{q}_{lm} Y_l^{(m)}(\alpha, \beta) \quad (3.9)$$

mit

$$Y_l^{(m)}(\alpha, \beta) = P_l^m(\cos \alpha) \begin{cases} \sin m\beta & (m > 0) \\ \cos m\beta & (m < 0) \end{cases} \\ Y_l^{(0)}(\alpha, \beta) = P_l(\cos \alpha)$$

$P_l^m(\cos \alpha)$ sind die zugeordneten Legendreschen Funktionen und $P_l(\cos \alpha)$ die Legendreschen Polynome. Die Lösung des Systems (3.4), (3.5) suchen wir auch in Form von Kugelfunktionen

$$\bar{w}(\alpha, \beta) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \hat{w}_{lm} Y_l^{(m)}(\alpha, \beta) \\ \bar{\Theta}^{(k)}(\alpha, \beta) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \hat{\Theta}_{lm}^{(k)} Y_l^{(m)}(\alpha, \beta) \quad (3.10)$$

Indem wir berücksichtigen, daß

$$\nabla^2 Y_1^{(m)} = -\kappa Y_1^{(m)}, \quad \kappa = 1(1+1) \quad (3.11)$$

gilt, können wir das Gleichungssystem (3.4) ausführlich aufschreiben:

$$k=0: \quad -a_0 \hat{\Theta}^{(0)} + b_0 \hat{w} + \lambda [\hat{\Theta}^{(1)} - \hat{\Theta}^{(0)} - f_0 \hat{w}] = 0 \quad (3.12)$$

$$k=1: \quad \delta [-a \hat{\Theta}^{(1)} + b \hat{w}] + \lambda [\hat{\Theta}^{(2)} - 2 \hat{\Theta}^{(1)} + \hat{\Theta}^{(0)} - (f - f_0) \hat{w}] = 0 \quad (3.13)$$

$$k=2, 3, \dots, (n-1): \quad \delta [-a \hat{\Theta}^{(k)} + b \hat{w}] + \lambda [\hat{\Theta}^{(k+1)} - 2 \hat{\Theta}^{(k)} + \hat{\Theta}^{(k-1)}] = 0 \quad (3.14)$$

$$k=n: \quad \delta [-a \hat{\Theta}^{(n)} + b \hat{w}] - \lambda [\hat{\Theta}^{(n)} - \hat{\Theta}^{(n-1)} - f \hat{w}] = 0 \quad (3.15)$$

mit

$$a_k = \kappa - (1 - \nu_k) = \begin{cases} a_0 & (k=0) \\ a & (k \neq 0) \end{cases}$$

$$b_k = (-d_k^2 \kappa + 1 - \nu_k)(\kappa - 2) = \begin{cases} b_0 & k=0 \\ b & k \neq 0 \end{cases} \quad (3.16)$$

$$f_k = \frac{c_k}{R_k} \kappa = \begin{cases} f_0 & (k=0) & \lambda_k = \lambda \\ f & (k \neq 0) & \delta_k = \delta \quad (k \neq 0) \end{cases}$$

Die Indizes l, m sind hier und werden auch im weiteren zur Verkürzung der Schreibweise weggelassen.

Die Lösung des Systems finiter Differenzgleichungen (3.13 - 3.15) erhalten wir zweckmäßigerweise, indem wir es als Differenzenrandwertaufgabe betrachten. Die Beziehungen für $k=1$ und $k=n$ übernehmen dabei die Rolle von Randbedingungen. Die allgemeine Lösung dieses Systems lautet

$$\hat{\Theta}^{(k)} = C_1 \sinh \mu k + C_2 \cosh \mu k + \hat{w} b/a \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

$$C_1 = \left\{ f \hat{w} - C_2 [\cosh \mu(n+1) - \cosh \mu n] \right\} / N$$

$$C_2 = \frac{\hat{\Theta}^{(0)} - F \hat{w}}{C_2}$$

$$\cosh \mu = 1 + \delta a / (2\lambda), \quad F = b/a + f - f_0$$

$$N = \sinh \mu(n+1) - \sinh \mu n \quad (3.17)$$

Die Größen $\hat{\Theta}^{(0)}$ ergeben sich aus (3.12) zu

$$\hat{\Theta}^{(0)} = \hat{w} \left(\frac{b_0}{\lambda} + \frac{f}{N} \sinh \mu - f_0 - FS + \frac{b}{a} \right) /$$

$$\left(1 + \frac{a_0}{\lambda} - S \right)$$

$$S = [\sinh \mu n - \sinh \mu(n-1)] / N \quad (3.18)$$

Die Werte \hat{w}_{lm} finden wir aus (3.5)

$$\hat{w} = \frac{\hat{q}}{T - M\Omega^2} \quad (3.19)$$

$$T = p_0 \Theta^{*(0)} + r_0 + \delta \left[p \sum_{k=1}^n \Theta^{*(k)} + nr \right] - \lambda \left\{ \left(\frac{c_0^*}{R_0} + \frac{c_1^{**}}{R} \right) (\Theta^{*(1)} - \Theta^{*(0)} - f_0) + \frac{c}{R} [\Theta^{*(n)} - \Theta^{*(1)} - (n-1)f] \right\};$$

$$\Theta^{*(k)} = \hat{\Theta}^{(k)} / \hat{w}$$

$$p_k = d_k^2 \kappa + 1 + \nu_k = \begin{cases} p_0 & (k=0) \\ p & (k \neq 0) \end{cases}$$

$$r_k = d_k^2 [\kappa - (1 - \nu_k)] (\kappa - 2) = \begin{cases} r_0 & (k=0) \\ r & (k \neq 0) \end{cases}$$

Damit sind die erzwungenen Schwingungen normal zur Schale

$$w = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-1}^1 \hat{w}_{lm} Y_1^{(m)} e^{i\Omega t} \quad (3.20)$$

bekannt.

Für weitergehende Betrachtungen der vielschichtigen Kugelschale können auch die tangentialen Verschiebungen $u^{(k)}$ und $v^{(k)}$ von Bedeutung sein. Aus den Formeln (2.5) erhalten wir nach einigen Umformungen

$$\nabla^2 (v^{(k)} \sin \alpha) = (\Theta^{(k)} - 2w)_{,\beta} + 2(\chi^{(k)} \sin^2 \alpha)_{,\alpha} / \sin \alpha$$

$$\nabla^2 (u^{(k)} \sin \alpha) = [(\Theta^{(k)} - 2w) \sin^2 \alpha]_{,\alpha} / \sin \alpha - 2\chi_{,\beta}^{(k)}$$

Setzen wir $\chi^{(k)} = 0$ (3.1) voraus, so finden wir

$$\bar{v}^{(k)} = \frac{1}{\sin \alpha} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-1}^1 \frac{m}{\kappa} C_{lm}^{(k)} Y_1^{(-m)} \quad (3.21)$$

$$\bar{u}^{(k)} = \sin \alpha \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-1}^1 \frac{1}{\kappa} C_{lm}^{(k)} Y_1^{(m)}$$

Darin sind

$$C_{lm}^{(k)} = \hat{\Theta}_{lm}^{(k)} - 2\hat{w}_{lm}, \quad x = \cos \alpha$$

Die hergeleiteten Beziehungen gestatten auch, die freien Schwingungen in normaler Richtung zu berechnen. Dafür ist erforderlich, $q = 0$ zu setzen und die reelle Erregerfrequenz Ω durch die komplexe Frequenz ω der freien Schwingungen [2], [3] zu ersetzen. Aus (3.5), (3.19) folgt

$$\omega^* = \sqrt{T/M} \quad (3.22)$$

Die dimensionslose (3.6) Frequenz der freien Schwingung

$$\omega^* = \omega_r^* + i\omega_i^* \quad (3.23)$$

setzt sich aus einem Real- und einem Imaginärteil zusammen.

Zu Vergleichszwecken interessiert mitunter die Frequenz der freien Schwingungen der tragenden Kugelschale ohne Schicht

$$\omega_o^* = \sqrt{p_o b_o / a_o + r_o} \quad (3.24)$$

4. Als Beispiel betrachten wir eine geschlossene Kugelschale mit regelmäßig geschichteter Hülle, auf die 2 diametral gegenüberliegende Kräfte $F_o e^{i\Omega t}$ in den Polen einwirken. Dieser Belastung entsprechen in Anlehnung an [6] die verallgemeinerten Kräfte

$$m = 0 \quad \text{rotationssymmetrischer Fall}$$

$$\hat{q}_{lm} = \hat{q}_l = \begin{cases} B(2l+1) & l = 2j \\ 0 & l = 2j+1 \end{cases} \quad \text{für} \quad B = \frac{F_o}{2\pi R^2} \frac{R_o^2}{A_o} \quad (4.1)$$

Aus (3.19) folgen die komplexen Größen

$$\hat{w}_{lm} = \hat{w}_l = B \frac{2l+1}{T - M\Omega^2} \quad \text{für} \quad l = 2j \quad (4.2)$$

Die Amplitude der Normalverschiebung lautet somit

$$|\bar{w}| = B \left| \sum_{l=0,2,4}^{\infty} \frac{2l+1}{T - M\Omega^2} P_l(\cos\alpha) \right| \quad (4.3)$$

Wie aus (3.2) ersichtlich, hängen die \hat{w}_l von der Erregerfrequenz Ω ab. Im Resonanzzustand treten für jede Eigenfrequenz der Ordnung l extreme Verschiebungswerte

$$|\hat{w}_l|_{\text{extr.}} = B \frac{2l+1}{\text{Im}(T)} \quad (4.4)$$

bei den Erregerfrequenzen

$$\Omega^* = [\text{Re}(T)/M]^{1/2} \quad (4.5)$$

auf.

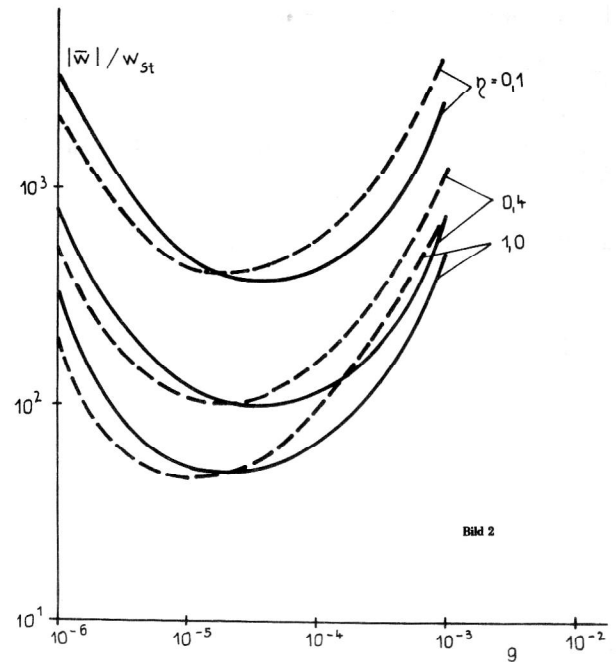
Zur Ermittlung numerischer Ergebnisse wählen wir die Materialien der harten Schichten einschließlich der tragenden Schale als elastisch mit den Querkontraktionszahlen $\nu = 0,3$ und $\nu_o = 0,3$ sowie

$$H_o/R_o = 0,01, \quad H/H_o = 0,2, \quad h/(s+h) = 0,5,$$

$$\rho^{(s)}/\rho^{(o)} = 1,0, \quad \rho^{(l)}/\rho^{(o)} = 0,3,$$

$$e = E_r(1-\nu_o^2)/[E_r^{(o)}(1-\nu^2)] = 1,0$$

In Bild 2 ist dargestellt die auf die statische Verschiebung $w_{st} = |\bar{w}(\Omega^* = 0)|$ bezogene Resonanzamplitude $|\bar{w}|$ im Pol ((4.3), $\alpha = 0$) bei einer Erregerfrequenz in unmittelbarer Nähe der sechsten Eigenfrequenz ($l = 6$) in Abhängigkeit von einem dimensionslosen Parameter $g = G_r(1-\nu^2)/E_r$, dem Verlusttangens η (1.3) der weichen schwingungsdämpfenden Schichten und der Anzahl der Schichten in der Ober-



flächenhülle (ausgezogene Linien $n = 1$, gestrichelte $n = 2$). Es ist ersichtlich, daß für die Dämpfung optimale Werte g existieren, der Verlusttangens eine wesentliche Rolle spielt, während die Anzahl der Schichten (bei gleichbleibender Dicke (3.8) der Hülle) wenig Einfluß hat.

Die durchgeführten Betrachtungen hatten das Ziel,

für die Kugelschale die Wirksamkeit der Schwingungsdämpfung durch eine Oberflächenhülle nachzuweisen,

dafür optimale Parameter aufzuzeigen, numerische Vergleichswerte auf analytischem Wege bereitzustellen, die eine Einschätzung von Näherungsverfahren für die Dämpfungsbewertung bei komplizierteren Konstruktionen gestatten.

LITERATUR:

- [1] Болотин, Б.Б., Новичков, Ю.Н.: Механика многослойных конструкций. Москва: Машиностроение, 1980, 375.
- [2] Кристенсен, Р.: Введение в теорию вязкоупругости. Изд. Мир, 1974.
- [3] Работнов, Ю.Н.: Элементы наследственной механики твердых тел. Москва: 1977, 384 с.
- [4] Власов, В.З.: Избранные труды, том 1. Москва: 1962.
- [5] Витт, Д.В.: Колебания сферической оболочки с вибродемпфирующим слоистым покрытием. Известия АН СССР, Механика твердого тела, 1980, № 3.
- [6] Манасян, А.А.: Колебания сферической оболочки под действием сосредоточенной силы. Тр. 4 Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. Ереван, Изд. АН Арм. ССР, 1964, с. 674 – 679.

Anschrift des Verfassers:

Prof. Dr. sc. techn. Dieter Witt

Technische Universität

8027 Dresden, Mommsenstraße 13