TECHNISCHE MECHANIK 2 (1981) Heft 1
Manuskripteingang: 10. 4. 1980

Zur Konvergenz von Relaxationsverfahren bei der Berechnung rotationssymmetrischer Strömungen

Walter Zwick

Zur Untersuchung der Konvergenz von Relaxationsverfahren am Beispiel der stationären und instationären Stokesgleichung mit konstanten und veränderlichen Zähigkeitskoeffizienten werden im Falle rotationssymmetrischer Strömungen Relaxationsoperatoren betrachtet, die sich in Produktform darstellen lassen und dadurch unter Anwendung des Aufspaltungsverfahrens zu einfachen Lösungsalgorithmen führen. Mit Hilfe mathematischer Umformungen können für die Relaxationsparameter Konvergenzbedingungen aufgestellt werden, die bei praktischen Rechnungen die Auswahl geeigneter Relaxationsparameter und -operatoren erleichtern.

0. Einleitung

Bei der Anwendung von Iterationsverfahren zur Lösung von Gleichungen der Strömungsmechanik ist es wichtig zu wissen, unter welchen Bedingungen die Verfahren konvergieren. Zur Sicherung bzw. zur Verbesserung der Konvergenz von Iterationsverfahren wurden konvergenzverbessernde Operatoren eingeführt und die Relaxationsverfahren verallgemeinert (vgl. auch [6], [3]). Die Relaxationsverfahren zur Lösung der Gleichung

$$-Bu = f, \tag{1}$$

wobei B ein Differentialoperator, u die gesuchte und f eine bekannte Funktion sind, bestehen darin, daß man von einer Näherungslösung u^n ausgeht, den Defekt δ^n

$$\delta^n = Bu^n + f \tag{2}$$

mit einem Relaxationsfaktor ρ wichtet und mit Hilfe eines Relaxationsoperators A eine Gleichung

$$A\tilde{u}^n = \rho\,\delta^n \tag{3}$$

zur Berechnung von $\tilde{u}^n$ aufgestellt. Diese Lösung $\tilde{u}^n$ wird zur „Verbesserung" der Näherung u^n in der Form

$$u^{n+1} = u^n + \tilde{u}^n \tag{4}$$

verwendet. Aus den Gln. (2) bis (4) folgt

$$A\,(u^{n+1} - u^n) = \rho\,(Bu^n + f) \tag{5}$$

Geht man von einer Startnäherung u^o aus und wendet dieses Relaxationsverfahren für $n = 0, 1, \ldots,$ an, dann erhält man eine Lösung der Ausgangsgleichung (1), wenn man zeigen kann, daß dieses Verfahren konvergiert.

Der Relaxationsoperator A und der Relaxationsparameter ρ sind so zu wählen, daß das Verfahren konvergiert, und $A\,u = 0$ genau dann gilt, wenn $u = 0$ ist. Dabei wird vorausgesetzt, daß A linear ist. Im Fall, daß A gleich dem identischen Operator I ist und ρ geeignet gewählt wird, ergibt sich das übliche Iterationsverfahren

$$u^{n+1} = \rho\,(Bu^n + f) + u^n, \qquad n = 0, 1, \ldots . \tag{6}$$

Sind $A = -B$ und $\rho = 1$, so ergibt sich die Ausgangsgleichung (1) für $u = u^{n+1}$. Dividiert man die Gl. (5) durch ρ, so erhält man auf Grund der Linearität von A

$$A\,\frac{u^{n+1} - u^n}{\rho} = Bu^n + f \tag{7}$$

Dabei kann $(u^{n+1} - u^n)/\rho$ als Differenzenquotient einer fiktiven Zeitableitung gedeutet werden.

Bei der Stokesgleichung haben sich als Relaxationsoperatoren die Laplace-Operatoren erfolgreich bewährt (Arrow-Hurwicz-Algorithmus [7]). Der Grund besteht darin, daß für sie schnelle Lösungsalgorithmen existieren, die in der Regel die Randbedingungen voll berücksichtigen. Außerdem können für diese Operatoren die Konvergenz des Verfahrens mathematisch begründet und Kriterien für den Relaxationsparameter abgeleitet werden. Besonders vorteilhaft sind jedoch solche Relaxationsoperatoren, die sich als Produkt von Operatoren $A = A_1 A_2 \ldots A_M$ darstellen lassen, bei denen die Faktoren A_ν ($\nu = 1, \ldots, M$) leicht invertierbar sind. In diesem Fall führt ein einfacher Lösungsalgorithmus für die Gleichung

$$Au = g \tag{8}$$

mit gesuchtem u und bekanntem g zu dem Aufspaltungsverfahren [3]

$$A_1 u_1 = g, \quad A_\nu u_\nu = u_{\nu-1}, \quad \nu = 2, \ldots, M, \quad u_M = u \tag{9}$$

In speziellen Fällen gelingt es, die Operatoren A_ν durch Dreipunkteschemen zu approximieren; dann können die bekannten Lösungsverfahren für dreidiagonale Matrizen [5] angewendet werden.

Ohne auf spezielle funktionalanalytische Fragestellungen eingehen zu wollen, sollen im folgenden Ergebnisse erörtert werden, die sich bei hinreichenden Glattheitseigenschaften der Eingangsfunktionen durch die Anwendung der Methoden und Ungleichungen der Funktionalanalysis ergeben [7], [1], [2]. Durch die Aussagen über das Konvergenzverhalten von Relaxationsverfahren bei speziellen Bewegungsgleichungen soll die Auswahl der Relaxationsoperatoren und -parameter für praktische Rechnungen erleichtert werden. Obwohl die folgenden

Untersuchungen im Rahmen analytischer Methoden durchgeführt werden, können sie auch bei geeigneter Diskretisation auf die approximierenden Gleichungen übertragen werden.
Wegen der großen praktischen Bedeutung sollen hier rotationssymmetrische Strömungen in Zylinder- oder Zylinderringgebieten betrachtet werden. Diese Aussagen lassen sich auch auf andere Strömungsgebiete übertragen. Als Randbedingungen werden Bedingungen 1. Art gewählt. Die Randbedingungen 2. Art bereiten keine Schwierigkeiten, wenn sie interativ erfaßt werden können.

Da oft komplizierte rotationssymmetrische Strömungsprobleme durch ihre entsprechenden Stokesgleichungen iterativ angenähert werden können, soll im folgenden die Konvergenz von Relaxationsverfahren zur Lösung der stationären und instationären Stokesgleichung mit konstanten und veränderlichen Zähigkeitskoeffizienten betrachtet werden.

1. Stationäre Stokesgleichung

Betrachtet man ein Zylinder- oder Zylinderringgebiet

$$\Omega = \left\{(r,\varphi,z) \mid 0 \leqslant R_o < r < R_1\ ,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi\ ,\ Z_o < z < Z_1\right\}$$

und seine Berandung $\partial\Omega$, dann nehmen die Stokes- und die Kontinuitätsgleichung bei rotationssymmetrischen Strömungen inkompressibler Medien im Zylinderkoordinatensystem $(r, \varphi, z) \in \Omega$ die folgende Form an:

$$-L_r u_r = -\frac{\partial p}{\partial r} + g_r \tag{1.1}$$

$$-L_z u_z = -\frac{\partial p}{\partial z} + g_z \tag{1.2}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \tag{1.3}$$

Dabei sind

$$L_r \cdot := \eta\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r\cdot}{r\partial r} + \frac{\partial^2\cdot}{\partial z^2}\right)\ ;\quad L_z \cdot := \eta\left(\frac{\partial}{r\partial r}\, r\, \frac{\partial\cdot}{\partial r} + \frac{\partial^2\cdot}{\partial z^2}\right);$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial r u_r}{r\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\ ;$$

$\mathbf{u} = \mathbf{u}(r,z) = (u_r, u_z)$ bzw. $\mathbf{g} = \mathbf{g}(r,z) = (g_r, g_z)$
der Vektor der Geschwindigkeit bzw. der äußeren Kraft mit seinen r- und z-Komponenten und $p = p(r,z)$ der Druck.

Die Randbedingung soll die Form

$$\mathbf{u}\big|_{\partial\Omega} = \mathbf{b} \tag{1.4}$$

haben. Dabei soll das Integral der Normalkomponente von $\mathbf{b} = \mathbf{b}(r,z)$ über den Rand $\partial\Omega$ verschwinden. Damit der Druck eindeutig bestimmt ist, soll

$$\int_\Omega pr\, d\varphi\, dr\, dz = 0 \tag{1.5}$$

gelten. Das Problem besteht darin, daß bei vorgegebenem konstantem Zähigkeitskoeffizienten $\eta > 0$ und bei vorgegebenem Strömungsgebiet Ω sowie bekannten Eingangsfunktionen $\mathbf{g}$ und $\mathbf{b}$ die Geschwindigkeit $\mathbf{u}$ und der Druck p zu bestimmen sind.
Diese Aufgabe soll mit dem folgenden Relaxationsverfahren gelöst werden:

$$A_r\left(u_r^{n+1} - u_r^n\right) = \rho\left(L_r u_r^n - \frac{\partial p^n}{\partial r} + g_r\right) \tag{1.6}$$

$$A_z\left(u_z^{n+1} - u_z^n\right) = \rho\left(L_z u_z^n - \frac{\partial p^n}{\partial z} + g_z\right) \tag{1.7}$$

$$p^{n+1} - p^n = -\sigma \operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1} \tag{1.8}$$

$$\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n\big|_{\partial\Omega} = 0; \qquad n = 0, 1, \ldots . \tag{1.9}$$

Dabei sind ρ, σ Relaxationsparameter und A_r, A_z Relaxationsoperatoren. Die Startwerte $\mathbf{u}^o$ und p^o sollen so vorgegeben werden, daß sie die Gln. (1.4) und (1.5) erfüllen. Dann sind die Gl. (1.9) gerechtfertigt und die Gl. (1.5) für alle p^n erfüllt [7]. Man könnte daran denken, auch bei der Gl. (1.8) an Stelle des expliziten Ansatzes für p^{n+1} einen Relaxationsoperator einzuführen. Zu diesem Zweck benötigt man i. a. Randbedingungen für p, die mit Gl. (1.5) verträglich sein müssen.

In Anlehnung an die Darstellung der Operatoren L_r und L_z kann man für A_r und A_z die Ansätze $A_r = -L_r$ und $A_z = -L_z$ wählen. Dieses Verfahren entspricht dem Arrow-Hurwicz-Algorithmus [7], für den Konvergenzbedingungen angegeben werden können. Wählt man zusätzlich $\rho = 1$, dann ergibt sich der Uzawa-Algorithmus [7]. Einfachere Lösungsalgorithmen ergeben sich, wenn man für A_r und A_z Produktansätze in der Form
$A_r = A_1 A_2$ und $A_z = A_1^* A_2$ mit

$$A_1 \cdot := \alpha_1 \cdot - \beta_1 \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r\cdot}{r\partial r}\ ;$$

$$A_1^* \cdot := \alpha_1 \cdot - \beta_1 \frac{\partial}{r\partial r}\, r\, \frac{\partial\cdot}{\partial r} \quad \text{und}$$

$$A_2 \cdot := \alpha_2 \cdot - \beta_2 \frac{\partial^2\cdot}{\partial z^2}$$

einführt. Dann kann man das Aufspaltungsverfahren anwenden und erhält bei der üblichen Differenzenapproximation algebraische Gleichungen mit dreidiagonalen Matrizen. Auch bei dieser Wahl der Operatoren läßt sich ähnlich wie beim Arrow-Hurwicz-Algorithmus die Konvergenz des Verfahrens beweisen (siehe Anhang 1). Als Konvergenzbedingungen ergeben sich die folgenden

Ungleichungen: $\alpha_1\alpha_2 > 0$, $\alpha_1\beta_2 - \rho\eta > 0$;

$\alpha_2\beta_1 - \rho\eta > 0$, $\beta_1\beta_2 > 0$,

$\eta - \dfrac{1}{\epsilon} > 0$; $1 - \sigma\epsilon > 0$, $\rho > 0$, $\sigma > 0$ und $\epsilon > 0$.

Dabei ist ϵ ein willkürlicher Parameter, der sich durch die Anwendung der ϵ-Ungleichung ergibt.

Da bei den Konvergenzbedingungen kein wesentlicher Unterschied zwischen α_1 und α_2 sowie β_1 und β_2 zum Ausdruck kommt, können $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ und $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ gesetzt werden. Die Zahl der Parameter kann weiter reduziert werden, wenn die Gleichungen durch einen dieser Parameter dividiert und die sich ergebenden Quotienten neu bezeichnet werden.

Der erste Anteil des Operators L_r läßt sich auch in der Form $\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r \cdot}{r \partial r} = \frac{\partial}{r \partial r} r \frac{\partial \cdot}{\partial r} - \frac{\cdot}{r^2}$

darstellen. Bei der Anwendung des Relaxationsverfahrens zur Lösung der Gl. (1.1) könnte an Stelle von A_r auch der Operator $A_z = A_1^* A_2$ benutzt werden. Das hat aber Auswirkungen auf die Konvergenzbedingungen, weil sich dann an Stelle von $\alpha_1 \alpha_2 > 0$ die Ungleichung

$$\alpha_1 \alpha_2 - \frac{\rho \eta}{r^2} > 0$$

ergibt, die nicht durch konstante Werte für α_1 und α_2 erfüllt werden kann, wenn $r \longrightarrow o$ strebt, d. h. wenn nicht ein Zylinderring $R_o > 0$, sondern ein Zylindergebiet mit $R_o = 0$ betrachtet wird.

2. Instationäre Stokesgleichung

Auf gleichem Wege wie die stationäre Stokesgleichung kann auch die instationäre gelöst werden. Zusätzlich zum räumlichen Strömungsgebiet Ω werden noch eine Zeitkoordinate t aus dem Zeitintervall [0,T] und Anfangsbedingungen eingeführt. Die instationäre Stokes- und Kontinuitätsgleichung für rotationssymmetrische Strömungen in Zylinderkoordinaten hat die Form

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} - L_r u_r = -\frac{\partial p}{\partial r} + g_r \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} - L_z u_z = -\frac{\partial p}{\partial z} + g_z \tag{2.2}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \tag{2.3}$$

Dabei wurden die Bezeichnungen aus dem Abschnitt 1 übernommen. Die auftretenden Funktionen hängen jetzt von $(r,z,t) \in \bar{\Omega} \times [0,T]$ ab. Die Randbedingung, die Anfangsbedingung und die Bedingung für die Eindeutigkeit des Druckes haben die Form

$$\mathbf{u}\Big|_{\partial\Omega} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{u}\Big|_{t=0} = \mathbf{a}, \quad \int_\Omega p r \, d\varphi \, dr \, dz = 0 \tag{2.4}$$

Dabei sind $\mathbf{a} = \mathbf{a}(r,z)$, $(r,z) \in \bar{\Omega}$ und $\mathbf{b} = \mathbf{b}(r,z,t)$, $(r,z,t) \in \partial\Omega \times (0,T]$ bekannte Funktionen, wobei für die Normalkomponente b_n von $\mathbf{b}$

$\int_{\partial\Omega} b_n r \, d\varphi \, dr \, dz = 0$ gelten muß, und $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ ist.

Zur Lösung der Gln. (2.1) bis (2.4) werden sie bezüglich der Zeit diskretisiert. Das heißt, das Zeitintervall [0,T] wird in J Intervalle $[t_{\iota-1}, t_\iota]$; $\iota = 1, \ldots, J$ mit der Länge $\tau = T/J$ eingeteilt, und die Ableitung $\partial \mathbf{u}/\partial t$ zum Zeitpunkt t_ι wird z. B. durch den Differenzenquotienten

$$\frac{1}{\tau}\left[\mathbf{u}(r,z,t_\iota) - \mathbf{u}(r,z,t_{\iota-1})\right]$$

ersetzt. Diese zeitliche Diskretisation kann auf verschiedene Weise erfolgen (vgl. z. B. [4]). Man erhält an Stelle des Anfangs-Randwertproblems (2.1) bis (2.4) für die Zeitpunkte

$t = t_\iota$; $\iota = 1, \ldots, J$ Randwertprobleme der Form

$$\frac{1}{\tau} u_r - L_r u_r = -\frac{\partial p}{\partial r} + g_r + H_r \mathbf{u} \tag{2.5}$$

$$\frac{1}{\tau} u_z - L_z u_z = -\frac{\partial p}{\partial z} + g_z + H_z \mathbf{u} \tag{2.6}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u}\Big|_{\partial\Omega} = \mathbf{b}, \quad \int_\Omega p r \, d\varphi \, dr \, dz = 0 \tag{2.7}$$

Dabei sollen $H_r \mathbf{u}$ und $H_z \mathbf{u}$ bekannte Ausdrücke darstellen, die von $\mathbf{u}(r,z,t_\kappa)$ mit $t_\kappa < t_\iota$ abhängen. Zur Lösung dieser Gln. (2.5) bis (2.7) kann das Relaxationsverfahren mit den Relaxationsoperatoren A_r und A_z aus dem Abschnitt 1 angewendet werden.

$$A_r\left(u_r^{n+1} - u_r^n\right) = \rho\, L_r u_r^n - \frac{\partial p^n}{\partial r} - \frac{1}{\tau} u_r^n + g_r + H_r \mathbf{u}\Big) \tag{2.8}$$

$$A_z\left(u_z^{n+1} - u_z^n\right) = \rho\left(L_z u_z^n - \frac{\partial p^n}{\partial z} - \frac{1}{\tau} u_z^n + g_z + H_z \mathbf{u}\right) \tag{2.9}$$

$$p^{n+1} - p^n = -\sigma \operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1} \tag{2.10}$$

$$\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n \Big|_{\partial\Omega} = 0; \qquad n = 0, 1, \ldots \tag{2.11}$$

Bezüglich der Startwerte $\mathbf{u}^o$ und p^o gilt das gleiche wie im Abschnitt 1. Bei den Konvergenzbedingungen ändert sich nur die 1. Bedingung, die an Stelle von $\alpha_1 \alpha_2 > o$ jetzt die Form

$\alpha_1 \alpha_2 - \frac{\rho}{\tau} > 0$ annimmt (vgl. Anhang 2).

3. Stokesgleichung mit veränderlicher Zähigkeit

Bei zahlreichen praktischen rheologischen und turbulenten Strömungsproblemen ergeben sich Ansätze für den Spannungstensor in Abhängigkeit vom Tensor der Deformationsgeschwindigkeiten, in denen Zähigkeitskoeffizienten auftreten, die entweder von den Komponenten des Tensors der Deformationsgeschwindigkeiten oder von seinen Invarianten abhängen. In diesen Fällen werden die entsprechenden Stokesgleichungen iterativ gelöst. In jedem Iterationsschritt treten dann bekannte Zähigkeitskoeffizienten $\eta > 0$ auf, die vom Ort und von der Zeit abhängen $\eta = \eta(r,z,t)$. Im Falle einer instationären rotationssymmetrischen Strömung ergeben sich dann die Gleichungen

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} - L_r^* \mathbf{u} = -\frac{\partial p}{\partial r} + g_r \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} - L_z^* \mathbf{u} = -\frac{\partial p}{\partial z} + g_z \tag{3.2}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \tag{3.3}$$

und die entsprechende Rand-, Anfangs- und Druckbedingung (2.4) aus dem Abschnitt 2. Die Operatoren L_r^* und L_z^* haben jetzt die Form

$$L_r^* \mathbf{u} = \frac{\partial}{\partial r} \eta \frac{\partial r u_r}{r \partial r} - \frac{u_r}{r} \frac{\partial \eta}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} d_{rz}$$

$$L_z^* \mathbf{u} = \frac{\partial}{r \partial r} \eta r d_{rz} + \frac{\partial}{\partial z} \eta \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$d_{rz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right).$$

Die stationäre Aufgabe ergibt sich als Spezialfall, indem die Zeitabhängigkeit, die Ableitungen nach der Zeit und die Anfangsbedingung unberücksichtigt bleiben. Im instationären Fall wird wie im Abschnitt 2 vor Anwendung des Relaxationsverfahrens das Anfangs-Randwertproblem bezüglich der Zeit diskretisiert, so daß dann für jeden diskreten Zeitschritt Randwertaufgaben gelöst werden müssen. Führt man einen weiteren Parameter γ ein, der im stationären Fall = 0 und im instationären Fall = 1 ist, so kann man die stationäre und instationäre Aufgabe zusammenfassen, und es ergeben sich die folgenden Gleichungen

$$\frac{\gamma}{\tau} u_r - L_r^* \mathbf{u} = -\frac{\partial p}{\partial r} + g_r + \gamma H_r \mathbf{u} \tag{3.4}$$

$$\frac{\gamma}{\tau} u_z - L_z^* \mathbf{u} = -\frac{\partial p}{\partial z} + g_z + \gamma H_z \mathbf{u} \tag{3.5}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \tag{3.6}$$

die unter Berücksichtigung der Rand- und Druckbedingung zu lösen sind. Wendet man das Relaxationsverfahren

$$A_r\left(u_r^{n+1} - u_r^n\right) = \rho\left(L_r^* \mathbf{u}^n - \frac{\partial p^n}{\partial r} - \frac{\gamma}{\tau} u_r^n + g_r + \gamma H_r \mathbf{u}\right) \tag{3.7}$$

$$A_z\left(u_z^{n+1} - u_z^n\right) = \rho\left(L_z^* \mathbf{u}^n - \frac{\partial p^n}{\partial z} - \frac{\gamma}{\tau} u_z^n + g_z + \gamma H_z \mathbf{u}\right) \tag{3.8}$$

$$p^{n+1} - p^n = -\sigma \operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1} \tag{3.9}$$

$$\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n \Big|_{\partial\Omega} = 0\,; \quad \int_\Omega p^{n+1}\, r\, d\varphi\, dr\, dz = 0\,; \quad n = 0, 1, \ldots \tag{3.10}$$

an, dann kann man zeigen, daß dieses Verfahren unter den Bedingungen $\alpha_1 \alpha_2 - \rho\gamma/\tau - \rho\,(\partial\eta/r\partial r) > 0$, $\alpha_1 \beta_2 - \rho\eta > 0$, $\alpha_2 \beta_1 - \rho\eta > 0$, $\beta_1 \beta_2 > 0$, $\eta - \frac{1}{\epsilon} > 0$, $1 - \sigma\epsilon > 0$, $\rho > 0$, $\sigma > 0$ und $\epsilon > 0$

konvergiert (vgl. Anhang 1 bis 3).

4. Allgemeine Bemerkungen

Durch ihre Universalität und ihre Übersichtlichkeit wurden in der letzten Zeit auch bei allgemeineren Problemen des Impuls-, Wärme- und Stoffaustausches die Relaxationsverfahren angewandt. Bei der Berücksichtigung konvektiver Glieder und/oder unbekannter Funktionen in den Zähigkeitskoeffizienten ist ein weiterer Iterationszyklus erforderlich, so daß in jedem Iterationsschritt die lineare Stokessche Gleichung bzw. bei Anwendung des Relaxationsverfahrens noch einfachere Gleichungen (entkoppelte Gleichungen) zu lösen sind. Obwohl es bei einigen instationären Aufgaben gelingt, die Konvergenz der Iterationsverfahren nach den konvektiven Gliedern zu beweisen [2], treten bei praktischen Rechnungen oft so kleine Konvergenzgeschwindigkeiten auf, daß eine Änderung des Iterations- bzw. Relaxationsverfahrens erforderlich wird. Auf Grund der Bedeutung dieser Gleichungen für praktische Aufgaben werden an vielen Stellen Arbeiten zur Verbesserung der Konvergenzgeschwindigkeit von Relaxations- und Iterationsverfahren und Untersuchungen zur Erfassung von Strömungen Newtonscher und nicht-Newtonscher Medien in komplizierteren Gebieten und bei größeren Geschwindigkeiten durchgeführt.

Anhang 1

Bildet man die Differenz aus den Gln. (1.6) bis (1.8) mit den Gln. (1.1) bis (1.3) und führt die Bezeichnungen $v_r^n = u_r^n - u_r$, $v_z^n = u_z^n - u_z$ und $q^n = p^n - p$ ein, so erhält man unter Berücksichtigung der Darstellungen der Operatoren A_r, A_z, L_r und L_z nach Multiplikation der Gleichungen mit v_r^{n+1}, v_z^{n+1} bzw. q^{n+1} und Integration über Ω die folgenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_1 \alpha_2 \left(v_r^{n+1} - v_r^n, v_r^{n+1}\right) \\
&- (\alpha_2 \beta_1 - \rho\eta)\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{r \partial r} r \left(v_r^{n+1} - v_r^n\right), v_r^{n+1}\right) \\
&\quad + \beta_1 \beta_2 \left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{r \partial r} r \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(v_r^{n+1} - v_r^n\right), v_r^{n+1}\right) \\
&\quad - (\alpha_1 \beta_2 - \rho\eta)\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(v_r^{n+1} - v_r^n\right), v_r^{n+1}\right) \\
&\quad - \rho\eta\left(\frac{\partial}{\partial r} e_r^{n+1}, v_r^{n+1}\right) - \rho\eta\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} v_r^{n+1}, v_r^{n+1}\right) \\
&\quad = -\rho\left(\frac{\partial q^n}{\partial r}, v_r^{n+1}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_1\alpha_2\left(v_z^{n+1}-v_z^n,\ v_z^{n+1}\right)\\
&-(\alpha_2\beta_1-\rho\eta)\left(\frac{\partial}{r\partial r}\,r\,\frac{\partial}{\partial r}\left(v_z^{n+1}-v_z^n\right),v_z^{n+1}\right)\\
&+\ \beta_1\beta_2\left(\frac{\partial}{r\partial r}\,r\,\frac{\partial}{\partial r}\,\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(v_z^{n+1}-v_z^n\right),v_z^{n+1}\right)\\
&-(\alpha_1\beta_2-\rho\eta)\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(v_z^{n+1}-v_z^n\right),v_z^{n+1}\right)\\
&-\rho\eta\left(\frac{\partial}{r\partial r}\,r\,\frac{\partial}{\partial r}\,v_z^{n+1},v_z^{n+1}\right)-\rho\eta\left(\frac{\partial}{\partial z}\,e_z^{n+1},\right.\\
&\left.v_z^{n+1}\right)\ =\ -\rho\left(\frac{\partial q^n}{\partial z},v_z^{n+1}\right)
\end{aligned}\right\}\quad(1.11)$$

$$\left(q^{n+1}-q^n,\ q^{n+1}\right)\ =\ -\sigma\left(q^{n+1},\ \operatorname{div}v^{n+1}\right)\qquad(1.12)$$

Dabei bedeuten $(w_1, w_2) = \int_\Omega w_1\, w_2\, r d\varphi\, dr\, dz$,

$$e_r^n = \frac{\partial r v_r^n}{r\partial r}\quad\text{und}\quad e_z^n = \frac{\partial v_z^n}{\partial z}.$$

Berücksichtigt man die homogenen Randbedingungen für v_r^{n+1} und v_z^{n+1}, so erhält man aus den Gln. (1.10) bis (1.12) durch partielle Integration und der Beziehung $2(w_1-w_2)\,w_1 = w_1^2 - w_2^2 + (w_1-w_2)^2$

$$\|v_r^{n+1}\|_{*r}^2 - \|v_r^n\|_{*r}^2 + \|v_r^{n+1}-v_r^n\|_{*r} + 2\rho\eta\,\|v_r^{n+1}\|_r^2 = \\ = 2\rho\left(q^n, e_r^{n+1}\right)\qquad(1.13)$$

$$\|v_z^{n+1}\|_{*z}^2 - \|v_z^n\|_{*z}^2 + \|v_z^{n+1}-v_z^n\|_{*z}^2 + 2\rho\eta\,\|v_z^{n+1}\|_z^2 = \\ = 2\rho\left(q^n, e_z^{n+1}\right)\qquad(1.14)$$

$$|q^{n+1}|^2 - |q^n|^2 + |q^{n+1}-q^n|^2 = \\ = -2\sigma\left(q^{n+1}, \operatorname{div}v^{n+1}\right)\qquad(1.15)$$

Dabei sind

$$|w|^2 = (w,w);\quad \|v_r\|_r^2 = |e_r|^2 + \left|\frac{\partial v_r}{\partial z}\right|^2;$$

$$\|v_z\|_z^2 = \left|\frac{\partial v_z}{\partial r}\right|^2 + |e_z|^2$$

$$\|v_r\|_{*r}^2 = \alpha_1\alpha_2\,|v_r|^2 + (\alpha_2\beta_1-\rho\eta)\,|e_r|^2 + \\ + (\alpha_1\beta_2-\rho\eta)\left|\frac{\partial v_r}{\partial z}\right|^2 + \beta_1\beta_2\left|\frac{\partial}{\partial z}\,e_r\right|^2$$

$$\|v_z\|_{*z}^2 = \alpha_1\alpha_2\,|v_z|^2 + (\alpha_2\beta_1-\rho\eta)\left|\frac{\partial v_z}{\partial r}\right|^2 + \\ + (\alpha_1\beta_2-\rho\eta)\,|e_z|^2 + \beta_1\beta_2\left|\frac{\partial}{\partial r}\,e_z\right|^2$$

Verwendet man noch die Beziehungen

$$\left(q^{n+1}, \operatorname{div}v\right) = \left(q^{n+1}-q^n, \operatorname{div}v\right) + \left(q^n, e_r + e_z\right)$$

$$\left(q^{n+1}-q^n, \operatorname{div}v\right) \leqslant \epsilon\,|q^{n+1}-q^n|^2 + \\ + \frac{1}{\epsilon}\left(|e_r|^2 + |e_z|^2\right)$$

und multipliziert die Gln. (1.13) und (1.14) mit σ und die Gl. (1.15) mit ρ, so folgt nach der Addition dieser 3 Gleichungen die Ungleichung

$$\sigma\Big(\|v^{n+1}\|_*^2 - \|v^n\|_*^2 + \|v^{n+1}-v^n\|_*^2 + \\ + 2\rho\left(\eta-\frac{1}{\epsilon}\right)\|v^{n+1}\|^2\qquad(1.16)\\ + \rho\,\,|q^{n+1}|^2 - |q^n|^2 + |q^{n+1}-q^n|^2\,(1-\sigma\epsilon)\Big)\\ \leqslant 0$$

Dabei sind $\|v\|_*^2 = \|v_r\|_{*r}^2 + \|v_z\|_{*z}^2$;

$\|v\|^2 = \|v_r\|_r^2 + \|v_z\|_z^2$; $e_r = \dfrac{\partial r\, v_r}{r\partial r}$ und $e_z = \dfrac{\partial v_z}{\partial z}$.

Der Ausdruck $\|v\|_*$ stellt eine Norm dar und ist nicht negativ, wenn die Ungleichungen $\alpha_1\alpha_2 > 0$, $\alpha_1\beta_2 - \rho\eta > 0$, $\alpha_2\beta_1 - \rho\eta > 0$ und $\beta_1\beta_2 > 0$ gelten. Summiert man die Ungleichung (1.16) über n von 0 bis n_o, so erhält man

$$\sum_{n=0}^{n_o}\left[\sigma\,\|v^{n+1}-v^n\|_*^2 + 2\rho\sigma\left(\eta-\frac{1}{\epsilon}\right)\|v^{n+1}\|^2 + \right.\\ \left. + \rho\,|q^{n+1}-q^n|^2\,(1-\sigma\epsilon)\right] + \\ + \sigma\|v^{n_o+1}\|_*^2 + \rho\,|q^{n_o+1}|^2 \leqslant \\ \leqslant \sigma\,\|v^o\|_*^2 + \rho\,|q^o|^2.$$

Wenn die Ungleichungen $\rho > 0$, $\sigma > 0$, $\eta - \dfrac{1}{\epsilon} > 0$ und $1-\epsilon > 0$ gelten, dann sind die Glieder der Summe nicht negativ und wegen der Beschränktheit der Summe müssen die Normen $\|v^{n+1}\|$, $\|v^{n+1}-v^n\|_*$ und $|q^{n+1}-q^n|$ gegen Null streben, wenn n gegen ∞ strebt.

Anhang 2

Gegenüber dem Abschnitt 1 sind auf den rechten Seiten der Gln. (2.8) und (2.9) die Glieder $-(\rho/\tau)\,u_r^n$ bzw. $-(\rho/\tau)\,u_z^n$ zu berücksichtigen. Diese lassen sich in der

Form $(\rho/\tau)\ (u_r^{n-1} - u_r^n)\ -(\rho/\tau)\, u_r^{n+1}$ und (ρ/τ) $(u_z^{n+1} - u_z^n) - (\rho/\tau)\, u_z^{n+1}$ schreiben.

Die ersten Anteile werden auf den linken Seiten der Gleichungen mit den Gliedern $\alpha_1\alpha_2\,(u_r^{n+1} - u_r^n)$ bzw. $\alpha_1\alpha_2\,(u_z^{n+1} - u_z^n)$ der Operatoren A_r bzw. A_z zu $(\alpha_1\alpha_2 - \rho/\tau)\,(u_r^{n+1} - u_r^n)$ bzw. $(\alpha_1\alpha_2 - \rho/\tau)$ $(u_z^{n+1} - u_z^n)$ verbunden, während die anderen Anteile bei den Umformungen entsprechend des Anhangs 1 zu nicht negativen Anteilen auf den linken Seiten der Gleichungen führen.

Anhang 3

Neben den Differentialoperatoren L_r^* und L_z^* werden noch die Operatoren $\widetilde{L}_r \cdot = \frac{\partial}{\partial r}\eta\,\frac{\partial r\cdot}{r\partial r} + \frac{\partial}{\partial z}\eta\,\frac{\partial\cdot}{\partial z}$ und

$$\widetilde{L}_z \cdot = \frac{\partial}{r\partial r}\,\eta\, r\,\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z}\,\eta\,\frac{\partial\cdot}{\partial z}$$

eingeführt. Auf den linken Seiten der Gln. (3.7) bzw. (3.8) werden die Ausdrücke $\rho\, L_r\,(u^{n+1} - u^n)$ bzw. $\rho\, L_z\,(u^{n+1} - u^n)$ addiert und subtrahiert. Die mit dem Pluszeichen versehenen Anteile werden entsprechend den Umformungen des Abschnittes 1 und des Anhangs 1 weiter verwendet. Dabei ist jetzt zu berücksichtigen, daß η eine Ortsfunktion ist. Das Glied $-\rho\,\frac{u_r}{r}\,\frac{\partial\eta}{\partial r}$ des Operators L_r^* wird zusammen mit dem Glied $-\frac{\rho\gamma}{\tau}\,u_r$ ähnlich wie im Anhang 2 mit dem Glied $\alpha_1\alpha_2\,(u^{n+1} - u^n)$ des Operators A_r abgeschätzt. Die mit dem Minuszeichen versehenen Ausdrücke

$$\rho\,\widetilde{L}_r\,(u_r^{n+1} - u_r^n) \quad \text{bzw.} \quad \rho\,\widetilde{L}_z\,(u_z^{n+1} - u_z^n)$$

werden mit den verbleibenden Gliedern von $L_r^*\,u^n$ bzw. mit $L_z^*\,u^n$ zusammengefaßt. Nach den Umformungen und der Summation der Gleichungen entsprechend des Anhangs 1 bleibt noch der Anteil

$$-\left(\frac{\partial}{\partial r}\eta\, e_r^n + \frac{\partial}{\partial z}\eta\, e_{rz}^n + \widetilde{L}_r\left(v_r^{n+1} - v_r^n\right), v_r^{n+1}\right) -$$

$$-\left(\frac{\partial}{r\partial r}\eta r e_{rz}^n + \frac{\partial}{\partial z}\eta e_z^n + \widetilde{L}_z\left(v_z^{n+1} - v_z^n\right), v_z^{n+1}\right)$$

$$= |e_r^{n+1}|_\eta^2 + |e_z^{n+1}|_\eta^2 + |e_{rz}^{n+1}|_\eta^2 +$$

$$+\ 2\left(\eta\left(w_{rz}^{n+1} - w_{rz}^n\right), w_{rz}^{n+1}\right)$$

$$= |e_r^{n+1}|_\eta^2 + |e_z^{n+1}|_\eta^2 + |e_{rz}^{n+1}|_\eta^2 + |w_{rz}^{n+1}|_\eta^2 -$$

$$-\ |w_{rz}^n|_\eta^2 + |w_{rz}^{n+1} - w_{rz}^n|_\eta^2$$

übrig, der zur weiteren Abschätzung verwendet werden kann. Dabei sind $2e_{rz}^n = \frac{\partial v_r^n}{\partial z} + \frac{\partial v_z^n}{\partial r}$,

$$2w_{rz}^n = \frac{\partial v_z^n}{\partial r} - \frac{\partial v_r^n}{\partial z} \quad \text{und}$$

$$|e|_\eta^2 = (\eta e, e)\,.$$

LITERATUR:

[1] Gajewski, H.: Zur iterativen Lösung der zweidimensionalen Boussinesq-Gleichungen. ZAMM 55, 571–581, 1975.

[2] Gajewski, H.: Zur globalen Konvergenz eines modifizierten Kato-Fujita-Iterationsverfahrens. ZAMM 58, 61–65, 1978.

[3] Janenko, N.N.: Die Zwischenschrittmethode zur Lösung mehrdimensionaler Probleme der mathematischen Physik. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York 1969.

[4] Самарский, А.А.: Введение в теорию разностных схем. Наука, Москва 1971.

[5] Самарский, А.А., Николаев, Е.С.: Методы решения сеточных уравнений. Наука, Москва 1978.

[6] Smith, G.D.: Numerische Lösung von partiellen Differentialgleichungen. Akademie-Verlag, Berlin 1971.

[7] Temam, R.: Navier-Stokes Equations. North-Holland Publishing Company Amsterdam, New York, Oxford 1977.

Anschrift des Verfassers:
Prof. Dr. Walter Zwick,
Akademie der Wissenschaften der DDR,
Institut für Mechanik
1199 Berlin
Rudower Chaussee 5