

Anwendung numerischer Methoden in der Bruchmechanik¹⁾

Johannes Altenbach, Lothar Wiltinger

Bruchmechanische Untersuchungen für spröde, hochfeste Werkstoffe sind gegenwärtig am weitesten entwickelt. Eine Analyse des internationalen Standes zeigt, daß die Einführung bruchmechanischer Berechnungsmethoden in die Praxis vor allem in Verbindung mit leistungsfähigen numerischen Verfahren erfolgt. Der vorliegende Beitrag gibt einen Überblick über die für die Lösung von Aufgaben der linear-elastischen Bruchmechanik besonders geeigneten numerischen Verfahren und faßt Erfahrungen zusammen, die bei der Berechnung von 2D- und 3D-Aufgaben gesammelt werden konnten.

1. Einleitung

Die Erforschung des Bruchverhaltens von Konstruktions- und Werkzeugwerkstoffen ist von großer volkswirtschaftlicher Bedeutung. Der Bruch ist die gefährlichste Versagensursache einer Konstruktion. Es kommt häufig zum Totalausfall einer Maschine oder Anlage mit hohen Sachschäden und Nachfolgeausfällen. Das Versagen einer Konstruktion durch Bruch ist leider auch vielfach mit der Gefährdung von Menschenleben verbunden.

Verschiedene aktuelle Schadensfälle an Brücken, Chemieanlagen und Transportmitteln haben verdeutlicht, daß überraschend auftretendes Versagen durch Bruch keineswegs der Vergangenheit angehört. Die spektakulären Sprödbrüche u. a. auch im Schiffbau der letzten Jahrzehnte haben jedoch die Bemühungen um die Bruchforschung wesentlich intensiviert und international zur Bildung leistungsfähiger Forschungseinrichtungen für die Bruchforschung geführt.

Die konventionellen Methoden der Festigkeitsberechnung reichen nicht immer aus, um eine hohe Bruchsicherheit zu gewährleisten. Dies gilt im wachsenden Maße für Sprödbrüche, die infolge technologischer Bedingungen oder während des Betriebes entstandener Risse schon bei relativ niedrigen Beanspruchungen ausgelöst werden können. Bruchforschung unter dem hier betrachteten Gesichtspunkt dient daher der vordringlichen volkswirtschaftlichen Aufgabenstellung, durch physikalische Analyse der Brucherscheinungen und Erarbeitung geeigneter Kriterien zur qualitativen und quantitativen Beurteilung des Bruchverhaltens die Berechnungsvorschriften der Konstrukteure so zu erweitern, daß eine hohe Sicherheit der Konstruktionen unter strenger Beachtung der Anforderungen der Materialökonomie erreicht wird. Die Bruchforschung präzisiert auch im Sinne eines beanspruchungsgerechten Werkstoffeinsatzes die Anforderungen an den Werkstoffhersteller.

Die Grundlagen- und Applikationsforschung zur Bruchmechanik haben ihrer Natur nach einen ausgeprägten interdisziplinären Charakter. Das hat seine Ursache darin, daß die qualitative und quantitative Beschreibung des Bruchverhaltens die Betrachtung folgender Problemkreise erfordert:

Festkörperphysikalische Untersuchungen zur Risfbildung und Rißausbreitung in atomaren und submikroskopischen Bereichen;

werkstofftechnische Untersuchungen zum Einfluß des mikroskopischen Gefüges auf den Widerstand gegenüber einer stabilen oder instabilen Rißausbreitung und Entwicklung von Methoden der Werkstoffprüfung zur Ermittlung bruchmechanischer Kennwerte und zur zerstörungsfreien Fehlergrößenbestimmung;

festkörpermechanische Untersuchungen der makroskopischen Spannungs- und Verformungszustände in Bauteilen mit Rissen und Festlegung beanspruchungsgerechter Bruchsicherheitskriterien.

Dem Festkörpermechaniker, und nur für diesen möchte ich im folgenden sprechen, kommt somit die Aufgabe zu, für ein Bauteil mit Riß bzw. rißartigem Defekt die Spannungen, Verformungen und bruchmechanischen Kenngrößen als Folge der gegebenen Beanspruchungen zu ermitteln. Dies kann auf experimentellem oder rechnerischem Wege geschehen. In Verbindung mit bruchmechanischen Werkstoffkennwerten, die mit Hilfe entsprechender Prüfmethoden ermittelt werden müssen, und geeigneter Bruchkriterien, die als Arbeitshypothesen benutzt werden, formuliert der Festkörpermechaniker Aussagen über die Stabilität eines im Bauteil vorhandenen Risses bzw. über die Sicherheit des Bauteiles gegenüber Versagen durch Bruch.

Wie bereits hervorgehoben, erfordert die Untersuchung der Bedingungen für das Eintreten eines Sprödbruches besondere Aufmerksamkeit. Sprödbrüche sind gekennzeichnet durch keine oder, meist im mikroskopischen Bereich, nur sehr geringe bleibende Deformationen beim Brucheintritt und sehr große Rißfortpflanzungsgeschwindigkeiten bis zu 10^4 m s^{-1} . Sind die auslösenden Bedingungen für einen Sprödbruch erst einmal gegeben, sind kaum noch Gegenmaßnahmen einleitbar, und der Bruch vollzieht sich im allgemeinen mit schwerwiegenden Folgen. Dabei kann das Sprödbruchverhalten eine Werkstoffeigenschaft sein oder sich aus der Beanspruchungsart ergeben (z. B. dreiachsige Beanspruchung, tiefe Temperaturen, Neutronenbestrahlung). Der Sprödbruch kann für Beanspruchungswerte auftreten, die unterhalb der Streckgrenze des Werkstoffes liegen.

1) Erweiterte Fassung eines Vortrages, der vom 1. Verfasser auf dem Schiffbautechnischen Symposium, Rostock 1980, gehalten wurde

Eine besonders wichtige Aufgabe der Bruchmechanik ist daher die Qualifizierung der beanspruchungs- und werkstoffseitigen Bedingungen für das Auftreten von Sprödbrüchen und die Ableitung der erforderlichen Sicherheitskriterien. Da ein plötzlicher Sprödbruch erst bei einer bestimmten Rißfolge ausgelöst wird und diesem im allgemeinen eine Phase stabilen Rißwachstums vorausgeht, untersucht die Bruchmechanik auch die Bedingungen für ein stabiles Rißwachstum in Abhängigkeit von den Werkstoffeigenschaften und der Beanspruchung. Die Kenntnis über die mögliche Restlebensdauer geschädigter Bauteile ist Grundlage zur Einleitung von Reparaturen oder für Bauteilwechselungen.

Bruchmechanische Untersuchungen für spröde, hochfeste Werkstoffe sind gegenwärtig am weitesten entwickelt und in die Berechnungspraxis eingeführt. Sie erfolgen auf der Grundlage der sogenannten linear-elastischen Bruchmechanik (LEBM), die ein linear-elastisches Materialverhalten voraussetzt. Auf duktile Werkstoffe ist die LEBM daher nur in beschränktem Umfang anwendbar. Alle folgenden Ausführungen beziehen sich nur auf die LEBM und auf die genannte „Hauptaufgabe“, durch eine bruchmechanische Analyse Kriterien für die Sicherheit gegenüber plötzlicher instabiler Rißausbreitung anzugeben. Auf diesem Gebiet wurden in der DDR bereits Erfahrungen gesammelt und auch leistungsfähige Rechenprogramme entwickelt [1] bis [6].

2. Wertung und Auswahl numerischer Lösungsverfahren

Bei der Anwendung bruchmechanischer Kenntnisse für die Festigkeitsberechnung statisch beanspruchter rißbehafteter Bauteile ist es zweckmäßig, die gegebenen Aufgabenstellungen in eine der beiden folgenden Problemkreise einzuordnen:

1. Die vorhandenen Risse sind klein im Vergleich zu den Bauteilabmessungen. Die Spannungs- und Verformungszustände der rißbehafteten Bauteile unterscheiden sich dann nur in der unmittelbaren Umgebung der Risse von denen der rißfreien Bauteile. Die bruchmechanische Untersuchung erfolgt dann mit Hilfe der Superpositionsmethode. Der Spannungszustand im Bauteil wird zunächst mit den bekannten Methoden, ohne Berücksichtigung des Risses, berechnet (Grundspannungszustand).

Danach wird eine analytische Rißlösung überlagert, die zur Vereinfachung des Berechnungsmodells von einem unendlich großen Bereich mit Riß (unendliche Scheibe, unendlicher Körper, Halbscheibe, Halbraum u. a. m.) ausgeht und nur den Grundspannungszustand als Beanspruchung und die Rißgeometrie erfaßt. Viele praktische Aufgaben können so relativ einfach auch einer bruchmechanischen Analyse unterzogen werden, da die Berechnung des Grundspannungszustandes mit der traditionellen Festigkeitsberechnung übereinstimmt und die analytischen Lösungen für Rißprobleme unendlicher einfach zusammenhängender Bereiche für die wichtigsten Beanspruchungen und Rißgeometrien bekannt sind. Auf

Einzelheiten dieser Vorgehensweise und Beispiele wurde in [7] eingegangen.

2. Die vorhandenen Risse sind in der Größenordnung der Bauteilabmessungen. Die Berechnung des Spannungs- und Verformungszustandes für das Bauteil mit Riß muß unter gleichzeitiger Berücksichtigung der Bauteil- und Rißgeometrie und der gegebenen Belastungen und Lagerungen erfolgen. Dies ist im allgemeinen nur mit Hilfe leistungsfähiger numerischer Methoden möglich.

Eine Analyse des internationalen Standes zeigt, daß die Einführung bruchmechanischer Methoden in die Berechnungspraxis vor allem in Verbindung mit leistungsfähigen numerischen Verfahren erfolgt. Für die Auswahl geeigneter numerischer Verfahren gelten verschiedene Kriterien (Problemklasse, Verfügbarkeit von Programmen, Genauigkeitsanforderungen und Aufwand usw.). Für eine Wertung sollen die numerischen Lösungsverfahren für Aufgaben der LEBM in 5 Gruppen zusammengefaßt werden:

Differenzenverfahren	(FDM)
Kollokationsverfahren	(MWR)
Finite-Elemente-Methoden	(FEM)
Randintegralgleichungsmethoden	(BIE)
Spezielle Verfahren.	

Mit dem **Differenzenverfahren** können Rißprobleme in bekannter Weise durch Finitisierung der die Aufgabe beschreibenden Differentialgleichungen und Randbedingungen bei entsprechendem Aufwand (Feinheit des Differenzennetzes) mit ausreichender Genauigkeit berechnet werden. Im allgemeinen fehlen jedoch anwenderfreundliche Standard- oder Spezialprogramme, so daß in Abhängigkeit von der gewünschten Genauigkeit ein großer Vor- und Nachbereitungsaufwand entstehen kann. Ferner erschweren unregelmäßige Bauteilgeometrien, Inhomogenität oder Anisotropie des Materialverhaltens u. a. m. eine einfache Anwendung der FDM [8].

Kollokationsverfahren führen bei Rißproblemen, die durch ein Berechnungsmodell „einfach zusammenhängender Bereich“ im Rahmen der Elastizitätstheorie erfaßt werden können, auf Lösungen hoher Genauigkeit. Da die Wahl der Kollokationspunkte in hohem Maße die Lösungsgenauigkeit beeinflusst und bei der Berechnung mehrfach zusammenhängender Bereiche (z. B. endliche Scheibe mit Loch oder Riß) Besonderheiten zu beachten sind (vgl. z. B. [9] und [10]), liegen im allgemeinen keine universell nutzbaren Rechenprogramme vor. Kollokationsverfahren können als Spezialfall der Methode der gewichteten Residuen (MWG) angesehen werden [11].

Die **Finite-Elemente-Methode** ist die z. Z. vorherrschende Methode zur numerischen Analyse von Rißproblemen. Sie zeichnet sich durch große Anpassungsfähigkeit an die Bauteilgeometrien und -belastungen aus und gestattet in einfacher Weise die Erfassung unterschiedlicher Materialeigenschaften. Die FEM wurde mit Erfolg auf viele praktische Aufgaben der LEBM, aber auch auf Aufgaben der Fließbruchmechanik angewendet. Es liegen bewährte, nutzerfreundliche Rechenprogramme vor, die

Bild 1
Körper mit Griffith-Riß in
dreiaxigem Spannungsfeld

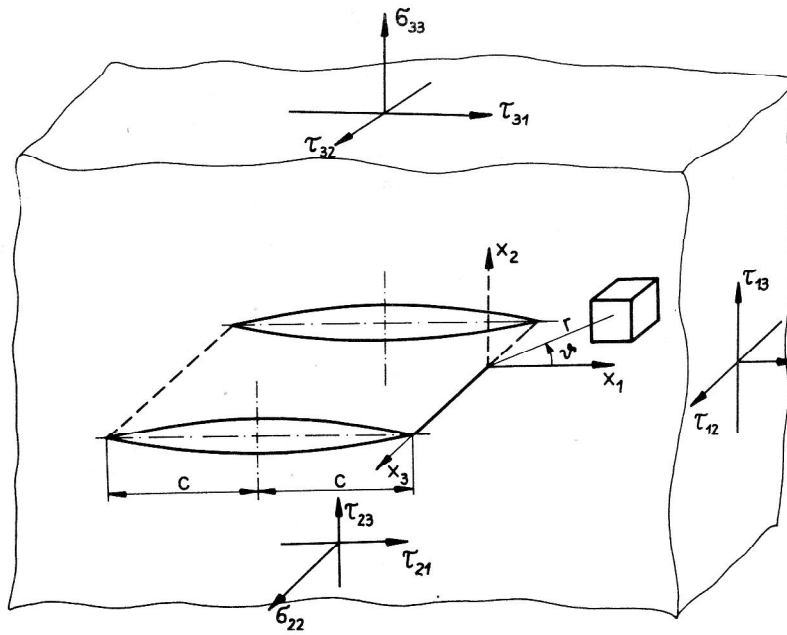
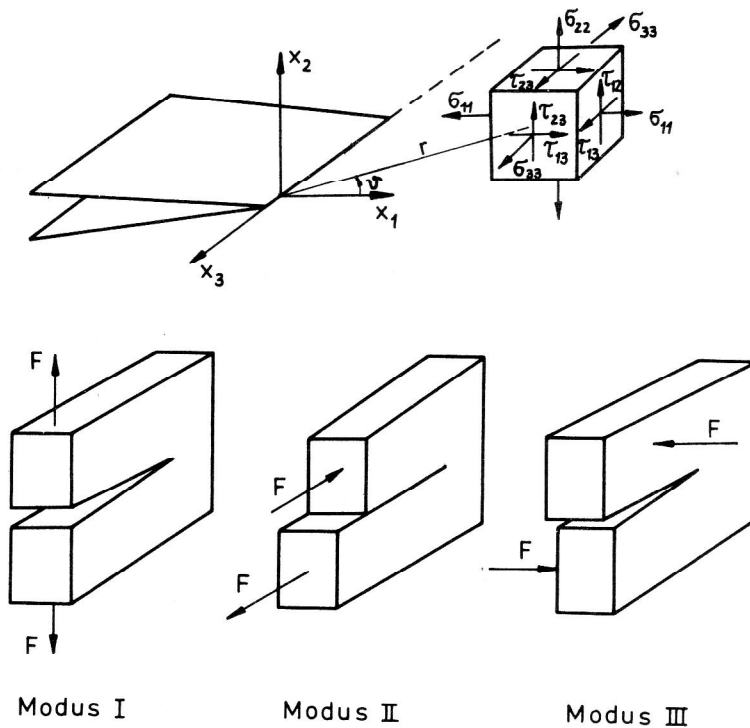


Bild 2
Rißöffnungsarten



unmittelbar oder modifiziert für Aufgaben der Bruchmechanik eingesetzt werden können.

Die Methode der **Randintegralgleichungen** ist in Verbindung mit einer Finite-Elemente-Diskretisierung in den letzten Jahren vor allem zur Berechnung von 3D-Modellen der Bruchmechanik herangezogen worden. Die BIE erfordert nur die Diskretisierung der äußeren Berandung eines Körpers, d. h. die Dimension des Berechnungsmodells ist im Vergleich zur FEM um eine Ordnung reduziert. Dieser Vorteil wird jedoch durch einige Nachteile, z. B. vollbesetzte, unsymmetrische Matrizen im Gleichungssystem u. ä. erkauft. Für einen realen Aufwands-

vergleich der BIE und der FEM fehlen eigene Erfahrungen bei der Anwendung der BIE.

Neben den bisher genannten universell einsetzbaren numerischen Methoden wurde eine Vielzahl spezieller numerischer Lösungsverfahren entwickelt, die außerordentlich leistungsfähig und effektiv sein können, sich jedoch nur schwer nach allgemeineren Gesichtspunkten (vgl. z. B. die Arbeiten von Kawai [12]) ordnen lassen.

Ein umfassender Überblick über den derzeitigen internationalen Stand bei der Entwicklung und der Anwendung numerischer Methoden zur Lösung von Aufgaben der Bruchmechanik wurde auf den internationalen

Tagungen „Numerical Methode in Fracture Mechanics“ gegeben, die im Januar 1978 [12] und im Juni 1980 [13] in Swansea, U. K., durchgeführt wurden. Der in der DDR erreichte Stand beim Einsatz numerischer Methoden in der Bruchmechanik kommt für die FEM insbesondere in den Dissertationen von Kuna [14], Theilig [15] und Wiltner [16] zum Ausdruck. Kollokationsmethoden wurden vor allem von Günther [17] angewendet.

Alle weiteren Darstellungen beziehen sich ausschließlich auf die Anwendung der FEM, da nur hierfür ausreichende eigene Erfahrungen und Ergebnisse vorliegen und die Anwendung der FEM auch den Schwerpunkt der weiteren Arbeiten in der DDR darstellen.

3. Anwendung der FEM auf die Analyse zwei- und dreidimensionaler Rißprobleme

Die LEBM geht davon aus, daß Bauteile mit Riß auch bei komplexer räumlicher Beanspruchung (Bild 1) durch Kombination der Beanspruchung der drei Rißöffnungsarten (Bild 2) berechnet werden können und die asymptotischen Lösungen nach Gln. (1) und (2) für den unmittelbaren Rißspitzenbereich die Grundlage für analytische oder numerische Untersuchungen von Rißproblemen sind.

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[\frac{K_I}{2G} \cos \frac{\vartheta}{2} (\kappa - 1 + 2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{K_{II}}{2G} \sin \frac{\vartheta}{2} (\kappa + 1 + 2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2}) \right] \\
 u_2 &= \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[\frac{K_I}{2G} \sin \frac{\vartheta}{2} (\kappa + 1 - 2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2}) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{K_{II}}{2G} \cos \frac{\vartheta}{2} (\kappa - 1 - 2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}) \right] \\
 u_3 &= \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \frac{2K_{III}}{G} \sin \frac{\vartheta}{2}
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\vartheta}{2} \left(1 - \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{3\vartheta}{2} \right) \\
 &\quad - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\vartheta}{2} \left(2 + \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{3\vartheta}{2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{22} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\vartheta}{2} \left(1 + \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{3\vartheta}{2} \right) \\
 &\quad + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{3\vartheta}{2}
 \end{aligned}$$

$$\sigma_{33} = \nu (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad (\text{EVZ})$$

$$\begin{aligned}
 \tau_{12} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{3\vartheta}{2} \\
 &\quad + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\vartheta}{2} \left(1 - \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{3\vartheta}{2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\tau_{13} = - \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\vartheta}{2}$$

$$\tau_{23} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\vartheta}{2}$$

(2)

Die Gln. (1) und (2) ergeben sich durch formale Überlagerung der asymptotischen Lösungen für die Rißöffnungsarten I, II und III nach Bild 2, unter Beachtung der angegebenen Koordinaten.

Für die Größe κ gilt:

$$\kappa = \begin{cases} (3 - \nu)/(1 + \nu) \\ \text{für den ebenen Spannungszustand (ESZ)} \\ (3 - 4\nu) \\ \text{für den ebenen Verzerrungszustand (EVZ)} \end{cases}$$

G und r sind die elastischen Konstanten, K_I , K_{II} , K_{III} die Spannungsintensitätsfaktoren für die Rißöffnungsarten I, II und III. Sie sind bei 3D-Modellen als Funktionen des Ortes x_3 auf der Rißfront aufzufassen und allgemein nur von der Belastung und der Rißgeometrie abhängig. Bei der Anwendung der asymptotischen Lösungen ist darauf zu achten, daß ihr Gültigkeitsbereich auf $r \leq c/20$ beschränkt werden sollte (Bild 1).

In den Gln. (1) und (2) entfallen die unterstrichenen Glieder, falls ein ESZ oder EVZ vorliegt. Für den dreidimensionalen Fall können die Gln. (1) und (2) auch in der verallgemeinerten Form (3) geschrieben werden.

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} [K_I f_{ij}^I(\varphi) + K_{II} f_{ij}^{II}(\varphi) + K_{III} f_{ij}^{III}(\varphi)] \tag{3}$$

Die Funktionen $f_{ij}^I(\varphi)$, $f_{ij}^{II}(\varphi)$, $f_{ij}^{III}(\varphi)$ sind dimensionslos und nur von φ abhängig, K_I , K_{II} , K_{III} sind unabhängig von r und φ .

Bild 3 erläutert die prinzipielle Vorgehensweise der LEBM. Die Berechnung der Spannungen und Verschiebungen ist Voraussetzung für die Berechnung von Bruchkenngrößen, die im Unterschied zu den bekannten Festigkeitshypothesen das singuläre Verhalten der Spannungen an der Rißspitze ($r^{-1/2}$ -Singularität) erfassen können.

Die bekanntesten Bruchkenngrößen sind die Spannungsintensitätsfaktoren, die bei einer FE-Lösung für das

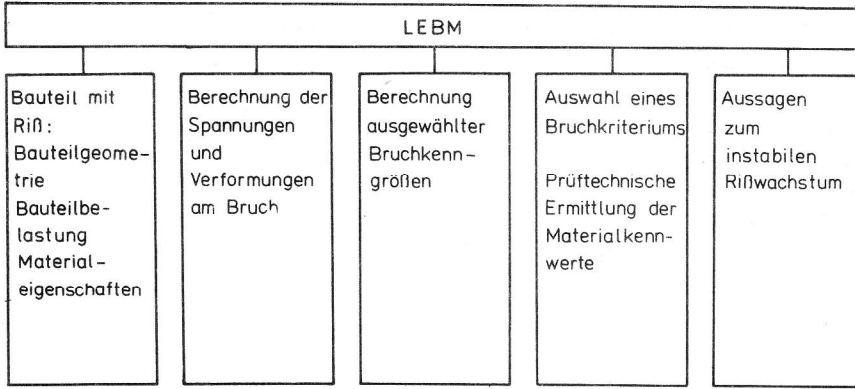


Bild 3
Ablauf der Analyse elastostatischer Rißprobleme im Rahmen der LEBM

Verschiebungs- bzw. Spannungsfeld wie folgt bestimmt werden:

Für einen Schnitt $x_3 = \text{konst}$ werden für $\vartheta = \text{konst}$ die K-Faktoren mit Hilfe der Gln. (1) (Verschiebungsmethode) in Abhängigkeit von r bestimmt, z. B.

$$\left. \begin{aligned}
 K_I(r) &= u_2 E \left(\frac{\pi}{8r}\right)^{1/2} \\
 K_{II}(r) &= u_1 E \left(\frac{\pi}{8r}\right)^{1/2} \\
 K_{III}(r) &= u_3 G \left(\frac{\pi}{8r}\right)^{1/2}
 \end{aligned} \right\} \begin{aligned}
 &\vartheta = \pi \\
 &\text{ESZ in der} \\
 &x_1 - x_2\text{-Schnittebene}
 \end{aligned} \quad (4)$$

In analoger Weise können die K-Faktoren auch auf der Grundlage der numerisch berechneten Spannungswerte mit Hilfe der Gln. (2) (Spannungsmethode) ermittelt werden, z. B.

$$\begin{aligned}
 K_I(r) &= \sigma_{22} (2\pi r)^{1/2} ; & \vartheta &= 0 \\
 K_{II}(r) &= -\sigma_{11} (2\pi r)^{1/2} ; & \vartheta &= \pi \\
 K_{III}(r) &= -\tau_{13} (2\pi r)^{1/2} ; & \vartheta &= \pi
 \end{aligned} \quad (5)$$

Die Verschiebungsmethode wird im allgemeinen bevorzugt, da die Verschiebungswerte mit Hilfe der FEM mit einem kleineren Fehler berechnet werden als die Spannungen.

Die Bestimmung des K-Faktors für die Rißspitze erfolgt dann durch Extrapolation nach Bild 4.

Weitere für die Anwendung wichtige Bruchkenngrößen sind:

1. Die Energiedichtefunktion $S = rW(r, \vartheta)$ nach Sih [8]

$$W(r, \vartheta) = \frac{1+\nu}{2E} \sigma_{ij} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk}^2 + \frac{1}{2} \sigma_{kk} \alpha T \quad (6)$$

2. Das J-Integral nach Rice [21] (Bild 5)

$$J = \oint (W dx_2 - \sigma_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1}) ds \quad (7)$$

3. Die Energiefreisetzungsrate nach Griffith [21] und [22]

$$\tilde{G} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\Delta C} u^T \Delta K u \quad (8)$$

(u ist der Verschiebungsvektor, ΔK die Änderung der Steifigkeitsmatrix)

Für die LEBM gilt $J = G$.

Als Bruchkriterium, d. h. als Beginn des instabilen Rißwachstums, wird ein „kritischer Wert“ der Bruchkenngröße gewählt, der ein reiner Werkstoffkennwert sein sollte. Instabiles Rißwachstum tritt auf, falls gilt

$$\begin{aligned}
 K_I &\geq K_{Ic} \\
 K_{II} &\geq K_{IIc} ; S \geq S_c ; J \geq J_c ; \tilde{G} \geq \tilde{G}_c \\
 K_{III} &\geq K_{IIIc}
 \end{aligned} \quad (9)$$

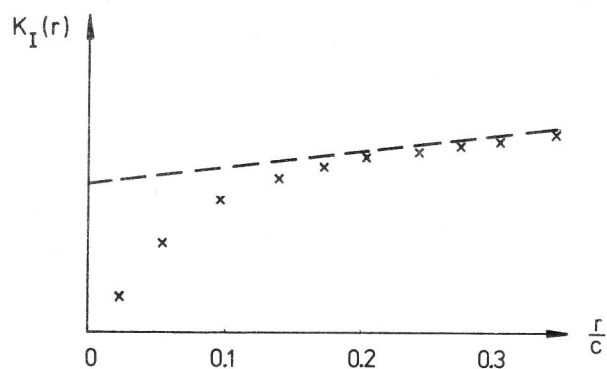


Bild 4
xxx berechnete Werte $K_I(r)$ für einen Schnitt
 $\vartheta = \text{konst}$ --- Extrapolation des geradlinigen Teils von $K(r)$

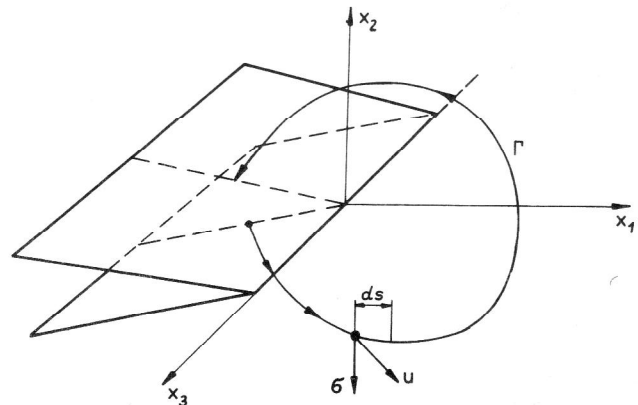


Bild 5
Berechnung des J-Integrals

Die Spannungsintensitätsfaktoren können bei kombinierter Belastung nicht zusammengefasst werden, da nur der Einzelnachweis für jede Riöffnungart physikalisch sinnvoll interpretierbar ist. Eine Zusammenfassung gelingt für den allgemeinen Beanspruchungszustand jedoch mit Hilfe der Energieinterpretation

$$\tilde{G}_{ges} = J_{ges} = \frac{1+\kappa}{8G} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1}{2G} K_{III}^2 \geq G_c = J_c \quad (10)$$

Die Forderung nach einer reproduzierbaren prüftechnischen Ermittlung einer Bruchkenngröße ist am besten für die Größe K_{IC} erfüllt [1]. Die Werte G_c , J_c und S_c werden im allgemeinen rechnerisch aus den Kennwerten K_{IC} ermittelt.

Für 3D-Modelle hat das Sih-Kriterium im Vergleich zu den anderen Kriterien den Vorzug, daß es außer der Aussage über den Beginn der instabilen Riäusbreitung auch Informationen über die Riäusbreitungsrichtung bzw. Riäverzweigen liefert. Für eine kugelförmige Umgebung eines Punktes der Riäfront (Bild 6) erfolgt die Riäusbreitung immer in Richtung S_{min} . Treten mehrere lokale Minima auf, ist die Möglichkeit einer Riäverzweigung gegeben. Das Bruchkriterium lautet somit

$$S_{min} \geq S_c \quad (11a)$$

mit

$$\frac{S_{min}}{r_0} = \text{konst} \quad (11b)$$

für die neue Riäfront (Bild 7).

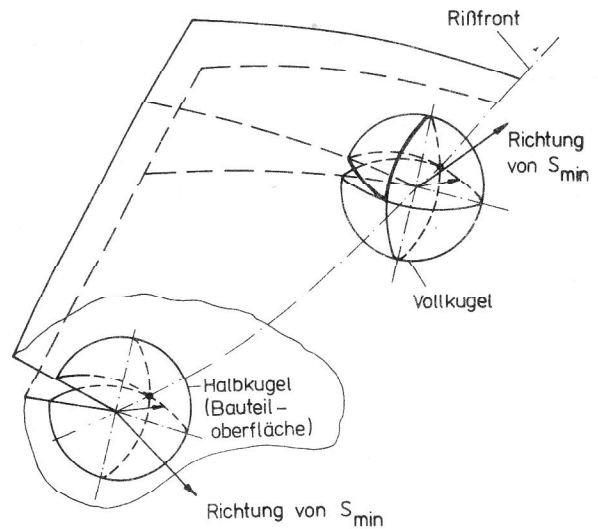


Bild 6
Ermittlung der möglichen Riäusbreitungsrichtung mit dem Sih-Kriterium

Für die Erfassung der Spannungssingularität an der Riäspitze bei Anwendung der FEM sollen folgende Fälle unterschieden werden:

1. Verwendung von Standardelementen
2. Konstruktion spezieller Elementfunktionen, die die Singularität enthalten,
3. Verwendung knotendistordierter isoparametrischer Standardelemente,
4. Hybride-Elemente-Darstellungen.

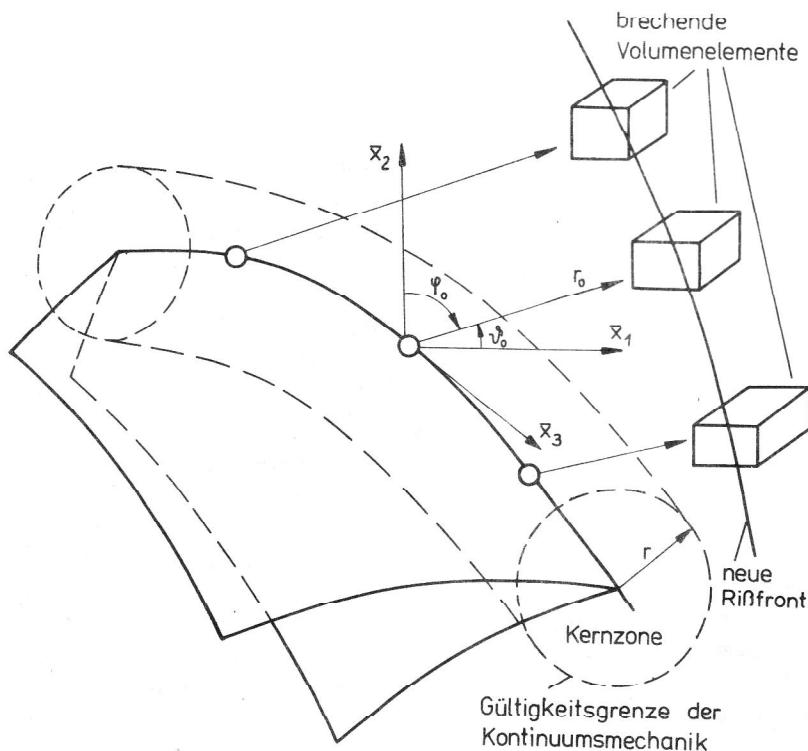


Bild 7
Ausbildung einer neuen Riäfront nach dem Sih-Kriterium

Bild 8
Das FE-Programm CRACK2D

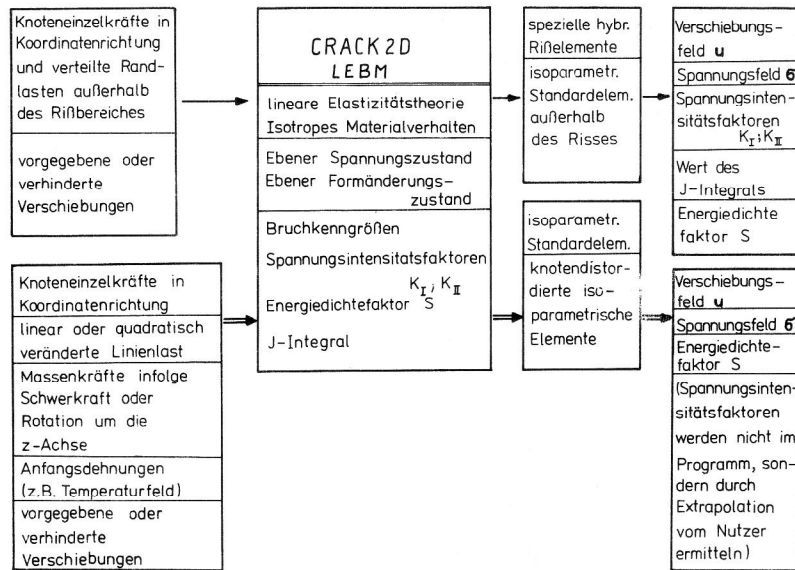
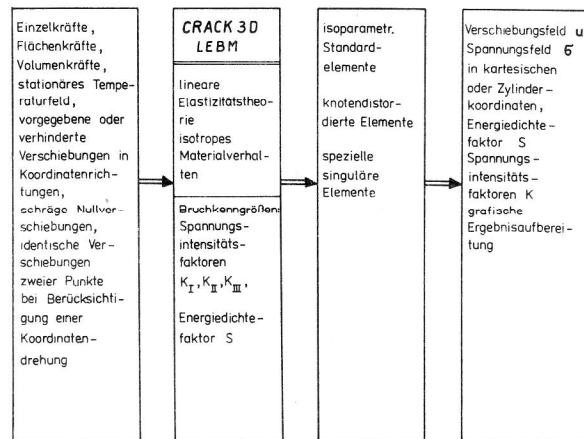


Bild 9
Das FE-Programm CRACK3D



Die Nachbildung des singulären Verhaltens an der Rissspitze mit Standardelementen liefert auch bei sehr feiner Elemententeilung und somit hohem Aufwand für die Datenaufbereitung und die Ergebnisauswertung nur recht ungenaue Werte [18]. Sie ist nur für den Ausnahmefall zu empfehlen, falls kein anderes FE-Programm verfügbar ist.

Es wurde daher bereits frühzeitig begonnen, spezielle Elemente mit eingebettetem Riß zu entwickeln [8]. Solche Elemente verletzen jedoch häufig die Kompatibilitätsbedingungen zu anderen Elementen und die Konvergenz des numerischen Lösungsverfahrens gegen die wirkliche Lösung ist nicht gesichert.

Die Feststellung, daß bei isoparametrischen Elementen mit quadratischen Ansatzfunktionen für die Verschiebungen eine Verschiebung der Seitenmittenknoten auf die 1/4-Position für die zugeordnete Elementecke gerade eine Spannungssingularität $\sim (r^{-1/2})$ erzeugt, erlaubt die weitgehende Verwendung von Standardprogrammen mit der angegebenen Modifikation für bruchmechanische Analysen (s. z. B. [19]).

Höchste Genauigkeit bei verhältnismäßig geringem Aufwand erzielt man mit Hilfe hybrider Elementformulierungen. Hybride „Verschiebungselemente“ wurden vor allem von Atluri [12], hybride „Spannungselemente“ von Pian [12] eingesetzt. Hybride Spannungselemente haben den Vorzug, daß sie kompatibel in ein Standardprogramm eingefügt werden können, das mit isoparametrischen Verschiebungselementen arbeitet.

In den letzten Jahren wurden die FE-Programme CRACK2D und CRACK3D erarbeitet und getestet. Die Bilder 8 und 9 geben einen Überblick über den Inhalt dieser Programme.

Bild 10 zeigt den Elementkatalog von CRACK2D. Das isoparametrische 6-Knoten-Dreieck-Element und das isoparametrische 8-Knoten-Viereck-Element dient zur Vernetzung der Bauteile mit Ausnahme des Rißbereiches. Für den Rißbereich stehen die entsprechenden isoparametrischen knotendistorierten Elemente und ein 17-Knoten-Hybrid-Element bzw. für Symmetrieschnitte die 9-Knoten-Hybrid-Elemente zur Verfügung. Es handelt sich um hybride Spannungselemente, die von Kuna [14] entwickelt und auf der Grundlage arbeits-

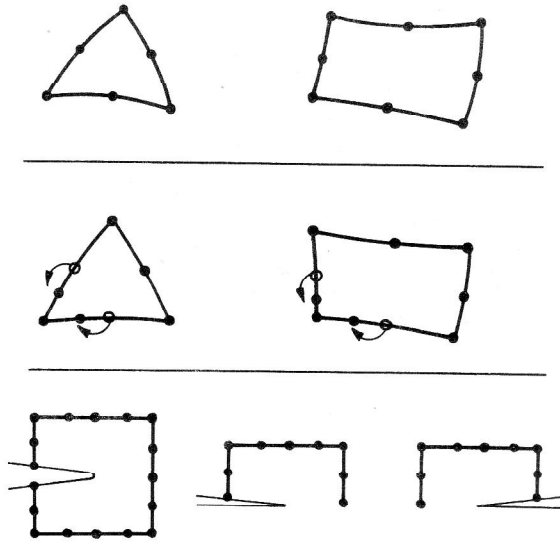


Bild 10
Elementkatalog des FE-Programms CRACK2D

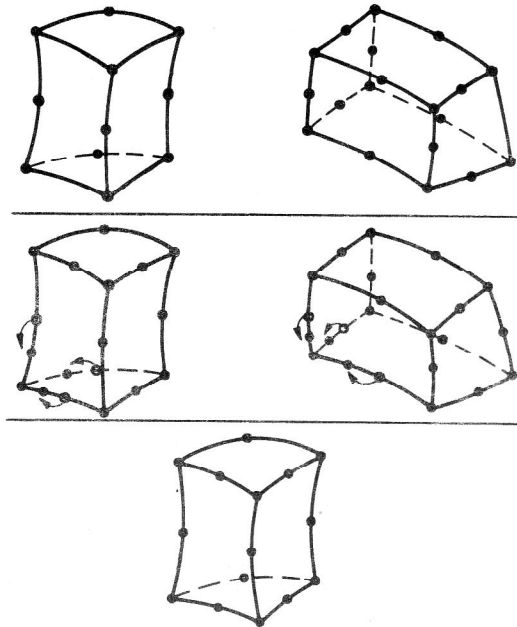


Bild 11
Elementkatalog des FE-Programms CRACK3D

teiler Zusammenarbeit zwischen dem IFE Halle und der TH Magdeburg mit den anderen Elementen zum Programm CRACK2D verbunden wurden [6].

Der Elementkatalog von CRACK3D (Bild 11) enthält die isoparametrischen Pentader- und Hexaederelemente mit 45 bzw. 60 Knoten als Standardelemente für ungestörte Bauteilbereiche, die entsprechenden knotendistordierten Elemente für den Rißbereich und zusätzlich ein spezielles singuläres Element, das jedoch mit den Standardelementen kompatibel ist.

Der Einbau eines hybriden Spannungselementes ist nach den guten Erfahrungen mit CRACK2D geplant. Die hierfür erforderlichen theoretischen Untersuchungen und Testungen werden wiederum von Kuna [20] durchgeführt.

Bild 12 erläutert die Einbettung der Rißfront durch die speziellen singulären Elemente SI45, Bild 13 die Struk-

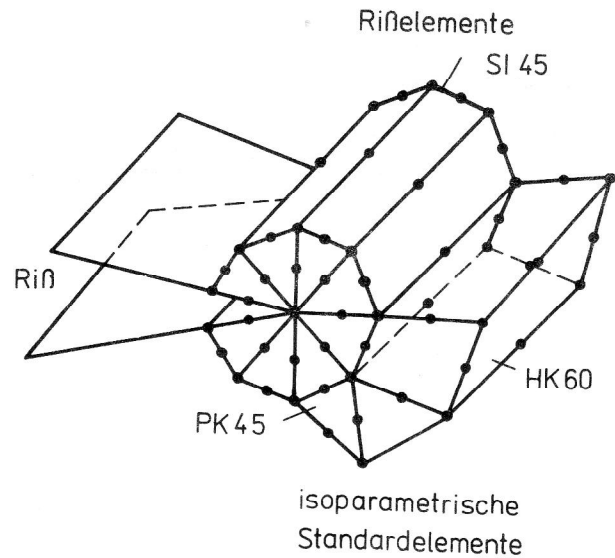


Bild 12
Einbettung einer Rißfront mit den Rißelementen SI45

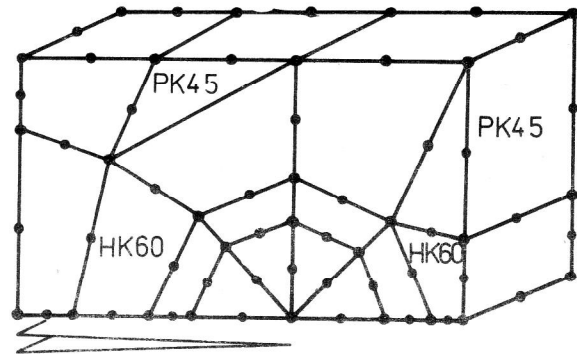


Bild 13
Strukturierung einer CT-Probe unter Verwendung von knotendistordierten Elementen PK45D

turierung einer CT-Probe unter Verwendung knotendistordierter Pentaderelemente PK45D.

Die Leistungsfähigkeit von CRACK3D sei durch folgende Angaben charakterisiert:

Maximale Anzahl der Freiheitsgrade	3960
Maximale Anzahl der Elemente	340
halbe Bandweite des Gleichungssystems	439

automatische Datengenerierung für Grundstrukturen
Bild (14)

Segmentierungstechnik und Restart
Modulkonzept

automatische Ergebnisauswertung durch Bruchkenngrößenberechnung und Einsatz grafischer Methoden
Programmablaufsteuerung

minimaler Codierungsaufwand

automatische Zuweisung der Externspeichermenge.

Auf die Darstellung von Beispielen zu den Programmen CRACK2D und CRACK3D muß hier verzichtet werden (vgl. z. B. [18], [16]).

Bild 15 erläutert anhand einer Grobflußdarstellung die Wirkungsweise des Programmes CRACK3D. Bei der Ausführung ist der Programmlauf in sukzessive abzuarbeitende Teilläufe gliederbar, die sämtlich der Steuerung

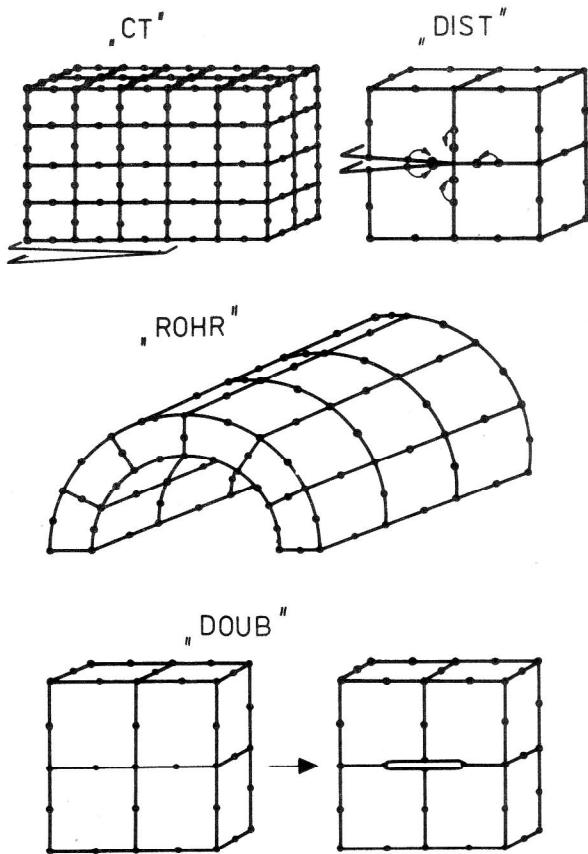
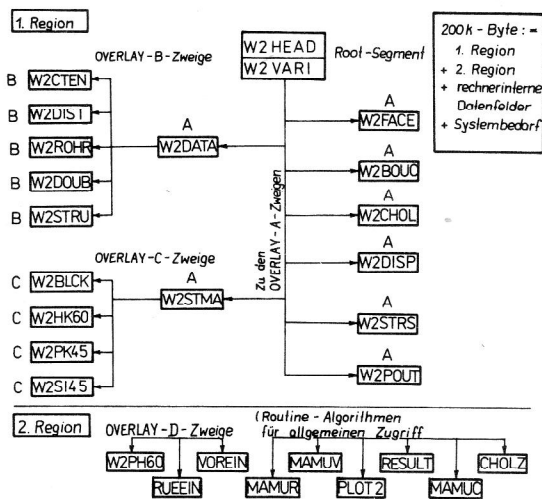


Bild 14
Vernetzung von Grundkörpern mit Riß im FE-Programm CRACK3D

durch die katalogisierte Prozedur CRACK3 [16] unterliegen:

1. Pre-processing

Aufbereitung der Eingabedaten (CALLs für die Datengeneratoren)



Anmerkung: Alle gleichnamigen Zweige können einander im Hauptspeicher überschreiben. Maßgebend für den Hauptspeicherbedarf ist jeweils der längste der A-, B-, C- oder D-Zweige.

Bild 16
OVERLAY-Konzept für das Programm CRACK3D

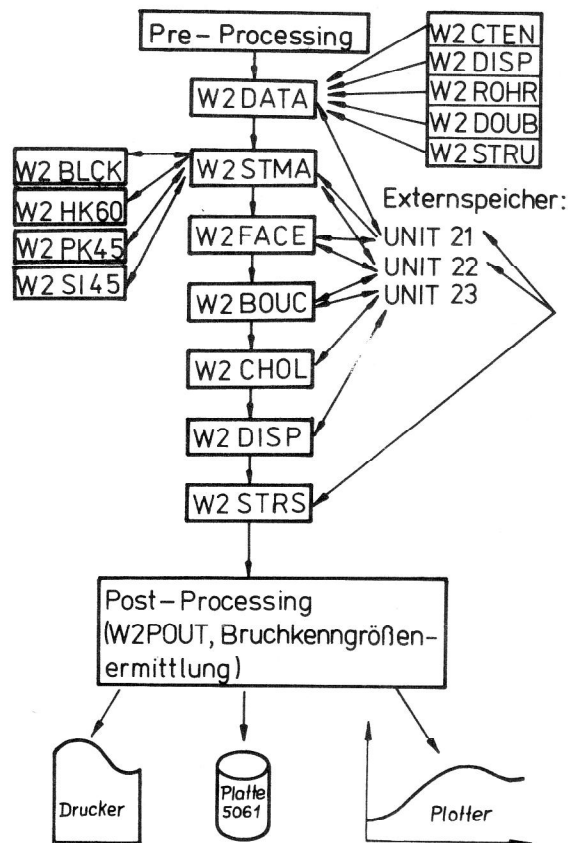


Bild 15
Grobflußdarstellung des Programms CRACK3D (linearelastischer Teil)

automatische Analyse des Berechnungsobjektes zum Zwecke der Zuweisung der benötigten Externspeichergröße
LINK-Lauf und Start des FEM-Algorithmus

2. Aufbau der Steifigkeitsmatrix (segmentierbar) im Modul W2STMA
3. Zusammenstellung des Lastvektors und Einarbeitung der Randbedingungen (Moduln W2FACE, W2BOUC)
4. Auflösung des linearen Gleichungssystems mit bandförmiger Systemsteifigkeitsmatrix (segmentierbar) im Modul W2CHOL
5. Ermittlung der Verschiebungen, Verzerrungen und Spannungen (Moduln W2DISP, W2STRS)
6. Post-Processing
aufbereitete Ergebnisauswertung
zusätzliche Ausgabemöglichkeit in Zylinderkoordinaten
grafische Darstellung per Drucker bzw. Zeichensoftware
Ermittlung von Bruchkennwerten wie K und S

Um den Hauptspeicherbedarf des Programms in erträglichen Grenzen (200K Byte) zu halten, wurde für CRACK3D eine geplante Überlagerungsstruktur realisiert (OVERLAY-Konzept). Dazu sind die Moduln des Programms entweder einem Hauptspeicherresidenten ROOT-Segment oder bestimmten OVERLAY-Zweigen

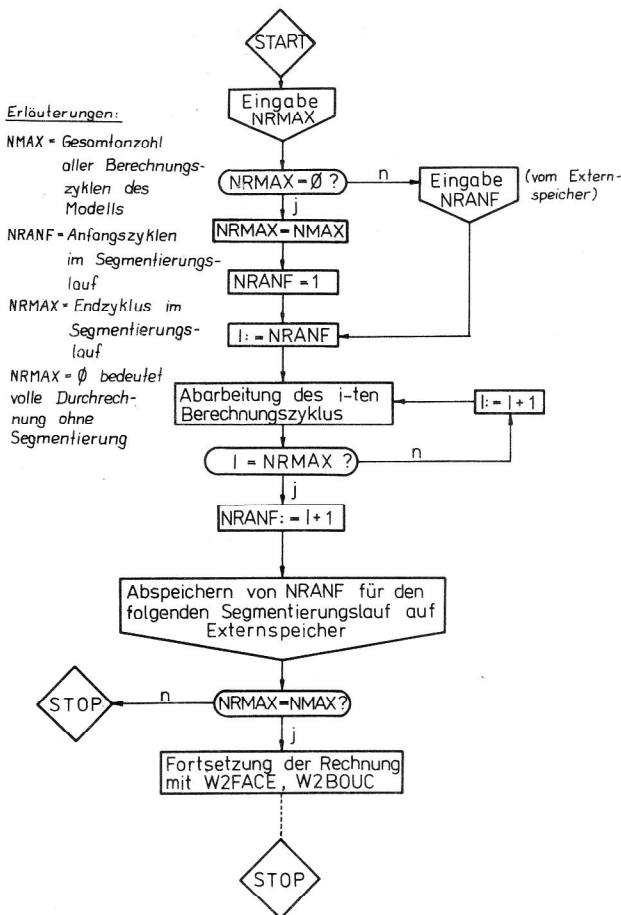


Bild 17
Segmentierungstechnik

zugeordnet (Bild 16). Letztere befinden sich nur während ihrer Abarbeitung im Hauptspeicher und werden durch den logisch nachfolgenden Zweig (entsprechend einer wählbaren Abarbeitungsstrategie) überschrieben. Das OVERLAY-Konzept hat sich als ein brauchbarer und zuverlässiger Weg zur Beherrschung von Problemen der Hauptspeicherbelegung erwiesen. Es findet zudem Unterstützung durch das OS-Betriebssystem und ist auch ohne Eingriff in bestehende Programmblöcke mit Erfolg anwendbar.

Vielfach besteht bei umfangreicher Berechnungsvorhaben der Wunsch, die Gesamtrechnung in zeitlich beliebig voneinander getrennten Einzelschritten ablaufen zu lassen (Segmentierungs-Restart-Algorithmus). Das in der Programmiersprache FORTRAN gehaltene Programm stellt diesen Service über interne Algorithmen für die Moduln W25TMA und W2CHOL zur Verfügung. Der im n-ten Segmentierungslauf jeweils erreichte Abarbeitungsstand wird auf einer Externspeichereinheit bis zur Fortführung der Rechnung (Restart) aufbewahrt. Über einfache Steuerkarten entscheidet der Nutzer selbst, wie weit das Programm im (n + 1)-ten Segmentierungslauf die Abarbeitung zum Berechnungsmodell vornehmen soll.

4. Weiterführung der Untersuchungen zur Anwendung numerischer Verfahren in der Bruchmechanik

Die Bedürfnisse verschiedener Anwenderbereiche für eine LEBM-Rechnung auf der Grundlage von 3D-Modellen hat zu qualitativ neuen Anforderungen an die Entwickler von FE-Programmen geführt. Die bisher gesammelten Erfahrungen zeigen, daß die größere Zahl der Rechenoperationen dazu führen, daß sich die Rechenzeiten bei vergleichbaren Berechnungsmodellen ungefähr wie 1 : 100 verhalten. Dies trifft für die EDVA ES 1040 (OS) sowohl für die I/O-Zeiten als auch für die CPU-Zeiten zu. Die Lösung von 3D-Modellen erfordert daher wesentlich anspruchsvollere Lösungsstrategien und -techniken. Besondere Aufmerksamkeit erfordern die Datenaufbereitung, die Datenkontrolle und die Ergebnisauswertung (Entwicklung leistungsfähiger und nutzerfreundlicher Programme für das Pre- und Postprocessing) und die besonders rechenzeitintensiven Abschnitte (Aufbau der Steifigkeitsmatrix und Lösung des Gleichungssystems). Die jetzt vorhandenen FEM-Programme sind daher entsprechend diesen Anforderungen weiterzuentwickeln, und es ist die Effizienz anderer Lösungsstrategien (z. B. BIE) zu prüfen.

Dabei sollte davon ausgegangen werden, daß die 3D-Analyse nicht den Routine- sondern den Ausnahmefall darstellt. Sie ist nur dort anzuwenden, wo eine 2D-Modellierung nicht möglich ist. Vorrangig sollten 3D-Rechnungen mit der Zielstellung der weiteren Verbesserung bzw. des Nachweises der Berechtigung von 2D-Rechnungen durchgeführt werden.

Ferner sind weitere Untersuchungen erforderlich, um solche Einflüsse wie z. B. Eigenspannungen auf das Bruchverhalten genauer erfassen zu können.

Große Aufmerksamkeit erfordern die Arbeiten zur Entwicklung und Anwendung leistungsfähiger numerischer Methoden in der Fließbruchmechanik. Der hierzu international erreichte Stand ist den Tagungsberichten des ICF-5 [23] zu entnehmen. Hinweise auf eigene 3D-Programmentwicklungen findet man z. B. in [16] und [24].

LITERATUR

- [1] Blumenauer, H., Pusch, G.: Bruchmechanik, VEB Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig 1975
- [2] Blumenauer, H.: Stand und Aufgaben der Bruchforschung. Aus der Arbeit von Plenum und Klassen der AdW der DDR, 2 (1978), S. 25 - 43.
- [3] Göldner, H., Nickel, J., Materne, V.: Möglichkeiten der Einbeziehung der Bruchmechanik zur Beurteilung der Bauteilsicherheit. Maschinenbautechnik 26 (1977) 11, S. 485 - 492.
- [4] Fischer, K.-F., Günther, W.: Gegenwärtiger Stand der Rißbruchmechanik im Hinblick auf eine praktische Nutzung. Maschinenbautechnik 78 (1979), 5, S. 220 - 223.
- [5] Kuna, M., Wiltinger, L., Altenbach, J.: Theoretische Überlegungen zur bruchmechanischen Analyse ebener, elastostatischer Rißprobleme. Maschinenbautechnik 30 (1981) 1, S. 4 - 8.
- [6] Altenbach, J., Kuna, M., Wiltinger, L.: CRACR2D-Rechenprogramm zur bruchmechanischen Analyse ebener elastostatischer Rißprobleme mit der Methode der fini-

- ten Elemente, Problembeschreibung und Anwenderdokumentation, IFF der AdW der DDR Halle, TH Magdeburg 1979.
- [7] Fischer, K.-F., Günther, W.: Behandlung rißbehafteter Bauelemente mit Methoden der Bruchmechanik. Schiffstechnisches Symposium, Rostock 1980.
- [8] Sih, G.C. (Ed.): Mechanics of Fracture, Vol. I, Methods of analysis and solutions of Crack problems. Nordhoff Pub., Leyden 1973. Vol. II, Threedimensional Crack problems, Nordhoff Pub., Leyden 1975.
- [9] Altenbach, J., Möckel, W.: Ein Beitrag zur Anwendung der Methode der Randkollokation in der Scheiben- und Plattentheorie. Wiss. Z. Techn. Hochsch. Magdeburg 20 (1976) 1, S. 3 – 7.
- [10] Altenbach, J.: Spannungs- und Stabilitätsberechnung für zentrisch gelochte Rechteckscheiben. Strojnický Casopis, 28 (1977) 1, S. 15 – 31.
- [11] Zienkiewicz, O. C.: The Finite Element Method, 3rd Ed. Mc Graw-Hill Book Company (UK), Limited 1977.
- [12] Luxmoore, A. R., Owen, D. R. J. (Ed.): Numerical Methods in Fracture Mechanics, Swansea, U. K. 1978.
- [13] Luxmoore, A. R., Owen, D. R. J. (Ed.): Numerical Methods in Fracture Mechanics, Swansea, U. K. 1980.
- [14] Kuna, M.: Anwendung der Methode der finiten Elemente in der Bruchmechanik elastischer und elastisch-plastischer Körper. Dissertation A, M.-Luther-Universität Halle, 1978.
- [15] Theilig, H.: Beitrag zur bruchmechanischen Analyse von Komponenten des Primärkreislaufes in Kernkraftwerken mit Druckwasserreaktoren. Dissertation A, Ingenieurhochschule Zittau 1978.
- [16] Wiltinger, L.: Zur Anwendung der Methode der finiten Elemente auf die Berechnung räumlich statischer Rißprobleme. Dissertation A, TH Magdeburg 1980
- [17] Günther, W.: Die Anwendung der Methode der Randkollokation in der Rißbruchmechanik. V. Symposium Verformung und Bruch, Magdeburg 1979, Teil II, S. 184 – 187.
- [18] Kuna, M., Wiltinger, L., Altenbach, J.: CRACK2D – Ein FE-Programm zur bruchmechanischen Analyse ebener elastostatischer Rißprobleme, Maschinenbautechnik 30 (1981), 2, S. 75 – 78.
- [19] Henshell, R. D., Shaw, K. C.: Crack tip finite elements are unnecessary. Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 19 (1975) S. 495 – 507.
- [20] Kuna, M.: Hybride Elemente zur Lösung dreidimensionaler Aufgaben der Bruchmechanik. V. Symposium Verformung und Bruch, Teil II, Magdeburg 1979, S. 172 – 175
- [21] Hahn, H. G.: Bruchmechanik, E. G. Teubner, Stuttgart 1976.
- [22] Hellen, T. K.: On the method of virtual crack extensions. Int. J. num. Meth. Eng. 9 (1975), S. 187 – 202.
- [23] Francois, D. (Ed.): Advances in Fracture Mechanics, Vol. 1 – V, Pergamon Press 1981.
- [24] Altenbach, J., Wiltinger, L.: Finite elements for the solution of static crack problems in two and three dimensions, 4. Kongreß für theoretische und angewandte Mechanik, Varna 1981.

Anschriften der Verfasser:

Prof. Dr. sc. techn. Johannes Altenbach
Technische Hochschule Otto von Guericke
Sektion Maschinenbau,
WB Festkörpermechanik
3010 Magdeburg, Postfach 124

Dr.-Ing. Lothar Wiltinger
VEB Waschmittelwerk Genthin
3280 Genthin, Hilde-Coppi-Str.