

Deformationsgesetze des plastischen Materialverhaltens auf der Grundlage von Versuchsergebnissen

Georg Backhaus, Karl Richter¹⁾

Die in früheren Veröffentlichungen (vgl. insbesondere [3] und [5]) entwickelten Spannungs-Deformations-Beziehungen werden einleitend erläutert und erfahren aufgrund von Ergebnissen zyklischer Versuche an Stahl und Messing [7] eine theoretische Erweiterung bzw. Präzisierung. Die in [3] eingeführte Bauschinger-Relaxationsfunktion erweist sich [10] für Zyklen mit Vorverformung als abhängig von der Lastwechselgeschichte. Bestimmend für das Auftreten zyklischer Verfestigung oder Entfestigung und das Erreichen eines stationären (stabilen) Zustands bei zyklischer Verformung ist die wirksame Vergleichsdehnung. Die zu ihrer Ermittlung entwickelten theoretischen Beziehungen werden anhand der Versuchsergebnisse überprüft. Mit den aus den experimentellen Ergebnissen ermittelten Materialkonstanten wird für verschiedenartige Fälle ein Vergleich zwischen Theorie und Versuch durchgeführt. Abschließend wird auf stetige Verformungsvorgänge und den Einfluß der Drehung des materiellen Elementes kurz eingegangen.

1. Einleitung

Die wesentlichen Eigenschaften des plastischen Materialverhaltens werden vor allem bei Versuchen mit endlichen Richtungsänderungen der plastischen Verformung deutlich. Solche Versuche sind daher geeignet als Grundlage der quantitativen Fassung phänomenologischer Stoffgesetze (Spannungs-Deformations-Beziehungen) zu dienen. Diese werden im wesentlichen durch den bei einer endlichen Änderung der Verformungsrichtung (Richtungstensor: $d\epsilon_{ij}^P / d\epsilon_{\nu}$) auftretenden verallgemeinerten Bauschingerereffekt bestimmt, der seine maximale Größe bei einer Umkehr der Verformungsrichtung erreicht. Für die Ermittlung quantitativer Beziehungen ist dieser Fall daher besonders geeignet.

Bild 1 zeigt schematisch den Verlauf der Fließspannungen bei Belastungsumkehr, aufgetragen über der Vergleichsdehnung $\epsilon_{\nu} = \sqrt{2/3 d\epsilon_{ij}^P d\epsilon_{ij}^P}$. Der Unterschied gegenüber den Fließspannungen bei monotoner Belastung (gespiegelte Fließkurve: $-k_f(\epsilon_{\nu})$) stellt den (verallgemeinerten) Bauschingerereffekt dar. In [1] bis [3] werden zwei Anteile des Bauschingerereffektes unterschieden: der erste Anteil (b_1 in Bild 1) erfährt im Augenblick der Lastumkehr den gesamten hierbei auftretenden Bauschingerereffekt und geht mit zunehmender Verformung in der neuen Richtung gegen null, der zweite Anteil (b_2) ist dementsprechend zunächst null und führt zu einer bleibenden Entfestigung im Vergleich zur monotonen Fließkurve.

Bei einer beliebigen Richtungsänderung $\Delta \frac{d\epsilon_{ij}^P}{d\epsilon_{\nu}}$ wird

der erste Anteil auf der Basis der Huber- v. Mises-Fließbedingung und des zugeordneten Fließgesetzes durch die folgenden Zusatzspannungen dargestellt ([1] bis [3]):

1) Die Entwicklung der theoretischen Beziehungen erfolgte durch den erstgenannten Autor. Sie basiert auf Ergebnissen der experimentellen Untersuchungen des zweitgenannten Autors.

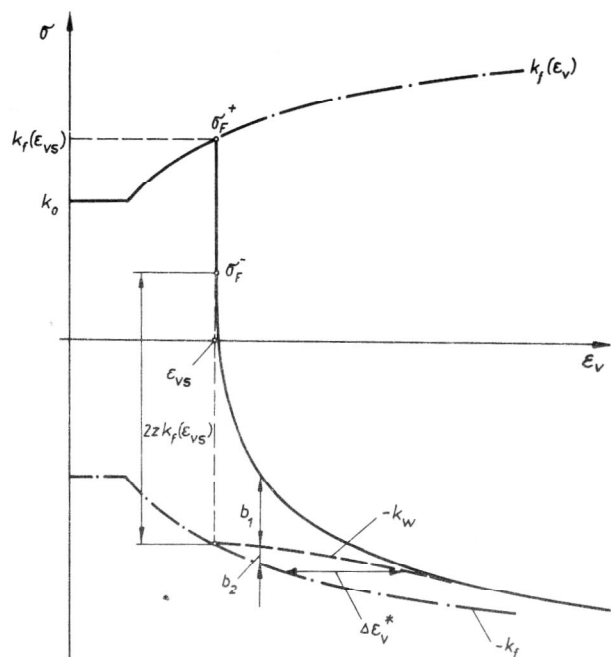


Bild 1
 Fließspannungsverlauf mit Umkehr der Belastungsrichtung bei $\epsilon_{\nu} = \epsilon_{vs}$
 Bauschingeranteile: b_1, b_2 ; Schlupf: $\Delta\epsilon_{\nu}^*$

$$\Delta s_{ijB}(\epsilon_{\nu}) = -\frac{2}{3} k_f(\epsilon_{vs}) \Delta \frac{d\epsilon_{ij}^P}{d\epsilon_{\nu}} f(\epsilon_{vs}, \epsilon_{\nu} - \epsilon_{vs}), \quad (1)$$

wobei $f(\epsilon_{vs}, \infty) = 0$ ist.

Hierin ist ϵ_{vs} die Vergleichsdehnung, bei der die Richtungsänderung erfolgt, k_f ist die Spannung der Fließkurve (Umformfestigkeit). Die skalare Funktion $f(\epsilon_{vs}, \epsilon_{\nu} - \epsilon_{vs})$ bewirkt die mit zunehmender Verformung $\epsilon_{\nu} - \epsilon_{vs}$ erfolgende Relaxation der Bauschingerspannungen Δs_{ijB} .

Außer der Verringerung der Größe der Fließspannung wird durch die Darstellung (1) auch die experimentell festgestellte verzögerte Einstellung der Richtung des

Spannungsvektors (Vektor im Raum der Deviatorspannungen) auf die geänderte Verformungsrichtung mit den obigen Annahmen in guter quantitativer Übereinstimmung mit Meßergebnissen (z. B. [4]) erfaßt (vgl. [14] Bild 4.55). Der erste Bauschingeranteil hat also *vektoriellen* Charakter.

Bei isotropem Materialverhalten und beliebiger Verformungsgeschichte gilt auf der oben genannten Basis die folgende Beziehung zwischen der augenblicklichen Fließspannung und Verformungsrichtung:

$$s_{ij}(\epsilon_v) = \frac{2}{3} k_f(\epsilon_v) \frac{d\epsilon_{ij}^p}{d\epsilon_v}(\epsilon_v). \quad (2)$$

Hierin ist s_{ij} die *wahre* Spannung, $d\epsilon_{ij}$ der *natürliche* Dehnungszuwachs. Die oben definierte Vergleichsdehnung ist also eine logarithmische Dehnung.

Die Berücksichtigung der durch den ersten Anteil des verallgemeinerten Bauschinger-effekts erzeugten Verformungsanisotropie ergibt daher nach einer endlichen Richtungsänderung:

$$s_{ij}(\epsilon_v > \epsilon_{vs}) = \frac{2}{3} k_f(\epsilon_v) \frac{d\epsilon_{ij}^p}{d\epsilon_v}(\epsilon_v) + \Delta s_{ijB}. \quad (3)$$

Der zweite oben genannte Anteil des Bauschinger-effektes beeinflusst nur die *Größe* des nach Verschwinden des ersten Anteils verbleibenden Fließspannungsvektors, nicht seine Richtung, die durch die neue Verformungsrichtung festgelegt ist. Dieser *skalare* Effekt wird in [5] (in einer gegenüber [3] verbesserten Form) durch eine Verminderung der die Fließspannung k_f bestimmenden Dehnung ϵ_v um den *Schlupf* $\Delta\epsilon_v^*$ erfaßt. An die Stelle der Vergleichsdehnung ϵ_v der Fließkurve $k_f(\epsilon_v)$ tritt also die *wirksame* Vergleichsdehnung

$$\epsilon_w = \epsilon_v - \Delta\epsilon_v^*. \quad (4a)$$

Auf Grund der oben getroffenen, experimentell begründeten Annahmen (Verlauf von b_1 und b_2) nimmt $\Delta\epsilon_v^*$ vom Wert null unmittelbar nach der Richtungsänderung bei ϵ_{vs} allmählich auf einen Endwert $\Delta\epsilon_{vs}^*$ zu, so daß angesetzt werden kann ([3] und [5]):

$$\epsilon_w = \epsilon_v - \Delta\epsilon_{vs}^* H(\epsilon_v - \epsilon_{vs}) \quad (4b)$$

mit

$$H(0) = 0 \quad \text{und} \quad H(\infty) = 1.$$

Für die Funktion H hat sich die folgende Darstellung als brauchbar erwiesen:

$$H(\epsilon_v - \epsilon_{vs}) = 1 - e^{-\rho(\epsilon_v - \epsilon_{vs})}. \quad (4c)$$

Der *Schlupf* $\Delta\epsilon_v^*$ bedeutet eine Horizontalverschiebung der Fließkurve $k_f(\epsilon_v)$ bzw. $-k_f(\epsilon_v)$. Bei hinreichender Größe von $\epsilon_v - \epsilon_{vs}$ kommt die verschobene Fließkurve mit dem Spannungsverlauf nach Belastungsumkehr zur Deckung (Bild 1). Das entspricht dem in [6] beschriebenen Verhalten.

Bei Berücksichtigung des verallgemeinerten Bauschinger-effekts (Anteile b_1 , b_2) lautet also die Spannungs-Verformungs-Beziehung nach einer endlichen Richtungsänderung bei ϵ_{vs} :

$$s_{ij}(\epsilon_v > \epsilon_{vs}) = \frac{2}{3} k_f(\epsilon_w) \frac{d\epsilon_{ij}^p}{d\epsilon_v}(\epsilon_v) - \frac{2}{3} k_f(\epsilon_{vs}) \Delta \frac{d\epsilon_{ij}^p}{d\epsilon_v} \cdot f(\epsilon_{vs}, \epsilon_v - \epsilon_{vs}) \quad (5)$$

wobei für die *wirksame* Fließspannung auch die Schreibweise

$$k_f(\epsilon_w) = k_w(\epsilon_v)$$

Verwendung finden kann (Bild 1).

Die weiteren Ausführungen dienen der experimentellen Untermauerung und Vervollständigung der theoretischen Beziehungen und der Gewinnung quantitativer Daten. Zu diesem Zweck wurden zyklische Torsionsversuche an zwei Werkstoffen (St 38, Ms 58) durchgeführt [7].

2. Bauschinger-Relaxationsfunktion und Schlupf

Bauschinger-Relaxationsfunktion

Die den relaxierenden Bauschingeranteil b_1 bestimmende Funktion $f(\epsilon_{vs}, \epsilon_v - \epsilon_{vs})$ wird in [1] bis [3] in folgender Form dargestellt:

$$f(\epsilon_{vs}, \epsilon_v - \epsilon_{vs}) = z(\epsilon_{vs}) \varphi(\epsilon_v - \epsilon_{vs}). \quad (6a)$$

Hierin ist z bestimmt durch die bekannte *Bauschinger-Kennzahl*

$$2z = \frac{\sigma_F^+ + \sigma_F^-}{\sigma_F^+}. \quad (6b)$$

σ_F^+ bzw. σ_F^- sind die vorzeichenbehafteten Fließspannungen unmittelbar vor bzw. nach der Belastungsumkehr (Bild 1). Der Wert von $2z$ ist von der Definition der Fließgrenze abhängig und erreicht, wie zahlreiche Versuchsergebnisse zeigen, schnell eine praktisch konstante Größe. Werte $2z > 1$ treten auf, wenn die plastische Rückverformung bereits vor der völligen Entlastung auftritt.

Die Funktion $\varphi(\epsilon_v - \epsilon_{vs})$, die den allmählichen Abbau der den Bauschinger-effekt erzeugenden inneren Spannungszustände bewirkt, soll mit *Bauschinger-Relaxationsfunktion* bezeichnet werden und wird ([1] bis [3]) wie folgt angesetzt:

$$\varphi(\epsilon_v - \epsilon_{vs}) = e^{-K_1(\epsilon_v - \epsilon_{vs})^\rho}; \quad \rho < 1. \quad (6c)$$

Bei der Anwendung dieser Beziehung ist es manchmal zweckmäßig, sie durch einen aus wenigen Gliedern bestehenden Reihenansatz zu ersetzen:

$$\varphi(\epsilon_v - \epsilon_{vs}) = \sum_r a_r e^{-K_r(\epsilon_v - \epsilon_{vs})} \quad \text{mit} \quad \sum_r a_r = 1. \quad (6d)$$

Schlupf

Der die bleibende Entfestigung bewirkende *Schlupf* $\Delta\epsilon_{vs}^*$ wird in [5] der Dehnung ϵ_{vs} proportional gesetzt.

Diese Annahme wird durch die Ergebnisse systematischer Messungen an Stählen mit unterschiedlichem C-Gehalt [8] weitgehend bestätigt. $\Delta \epsilon_{vs}^*$ kann daher durch folgende Beziehung dargestellt werden:

$$\Delta \epsilon_{vs}^* = q \epsilon_{vs} D_s \quad (7)$$

mit

$$D_s = \frac{1}{6} \Delta \left. \frac{d \epsilon_{ij}^p}{d \epsilon_v} \right|_s \Delta \left. \frac{d \epsilon_{ij}^p}{d \epsilon_v} \right|_s \quad (8)$$

Hierin ist q der Proportionalitätsfaktor. D_s berücksichtigt die Größe der Richtungsänderung und wird aufgrund von Versuchsauswertungen [7] dem Quadrat des Betrages der Richtungsänderung proportional gesetzt²⁾.

Die Ermittlung der Materialkonstanten z , κ_1 , ρ erfolgt auf der Grundlage der Gl. (5) durch Vergleich der Fließspannungen von Versuchen ohne bzw. mit Umkehr der Belastungsrichtung. Bei Wechsel von Zug auf Druck oder umgekehrt sind evtl. vorhandene Unterschiede der Zug- und Druck-Fließspannungen zu berücksichtigen.

Der Wert von q ist annähernd durch die oben erwähnte Horizontalverschiebung der Fließkurve bestimmt. Der zur Bestimmung von ϵ_w benötigte Exponent ϑ kann bei einmaliger Änderung der Verformungsrichtung nach Gl. (27) wie folgt angenommen werden:

$$\vartheta \approx \frac{1}{2 \epsilon_{v1}} \ln(1 + 50 \epsilon_{v1}) \quad (9)$$

Aus den Versuchen ermittelte Werte zeigt die folgende Tabelle³⁾ (zu κ_∞ siehe Abschn. 4.):

Tabelle 1

Werkstoff	κ_1	κ_∞	ρ	q
St 38	10,4	1,0	0,45	1,0
Ms 58	19	0,3	0,59	0,6

3. Folge endlicher Richtungswechsel

Für eine Anzahl n aufeinanderfolgender endlicher Änderungen der Verformungsrichtung geht die für einmalige Richtungsänderung gültige Beziehung (5) durch Superposition über in:

$$s_{ij}(\epsilon_v > \epsilon_{vn}) = \frac{2}{3} k_f(\epsilon_w) \frac{d \epsilon_{ij}^p}{d \epsilon_v}(\epsilon_v) - \sum_{s=1}^n \frac{2}{3} k_f(\epsilon_{ws}) \cdot f(\epsilon_{vs}, \epsilon_v - \epsilon_{vs}) \Delta \left. \frac{d \epsilon_{ij}^p}{d \epsilon_v} \right|_s \quad (10)$$

2) Das ist eine Änderung gegenüber der Gl. (22) in [5], wo Proportionalität mit dem Betrage der Richtungsänderung angenommen wird.

3) Die Ermittlung der Werte κ_1 und ρ erfolgte unter Vernachlässigung der bei vollständiger Entlastung auftretenden plastischen Rückverformung (0,02 % bis 0,05 %), d. h. für $2z = 1$.

Der Index s kennzeichnet die der s -ten Richtungsänderung zugeordneten Größen. Die wirksame Vergleichsdehnung ϵ_w ergibt sich ebenfalls durch Superposition in der in [5] erläuterten Weise:

$$\epsilon_w = \epsilon_v - \sum_{s=1}^n \Delta \epsilon_{vs}^* (1 - e^{-\vartheta(\epsilon_v - \epsilon_{vs})}) \quad (11a)$$

$$\text{wobei } \Delta \epsilon_{v1}^* = q \epsilon_{v1} D_1 \quad (11b)$$

$$\Delta \epsilon_{vs}^* = q \left(\epsilon_{vs} - \sum_{t=1}^{s-1} \Delta \epsilon_{vt}^* \right) D_s \quad (11c)$$

Für die im Hinblick auf die durchgeführten Versuche besonders interessierende zyklische Belastung gilt:

$$\frac{d \epsilon_{ij}^p}{d \epsilon_v}(\epsilon_v > \epsilon_{vn}) = (-1)^n \left. \frac{d \epsilon_{ij}^p}{d \epsilon_v} \right|_o \quad (12a)$$

$$\Delta \left. \frac{d \epsilon_{ij}^p}{d \epsilon_v} \right|_s = (-1)^s 2 \left. \frac{d \epsilon_{ij}^p}{d \epsilon_v} \right|_o \quad (12b)$$

$$D_s = 1 \quad (12b)$$

Für die Vergleichsspannungen

$$\sigma_v = \sqrt{3/2 s_{ij} s_{ij}} \quad (13)$$

ergibt sich damit aus (10) unter Verwendung von (6a) der folgende Ausdruck für die Fließspannungen:

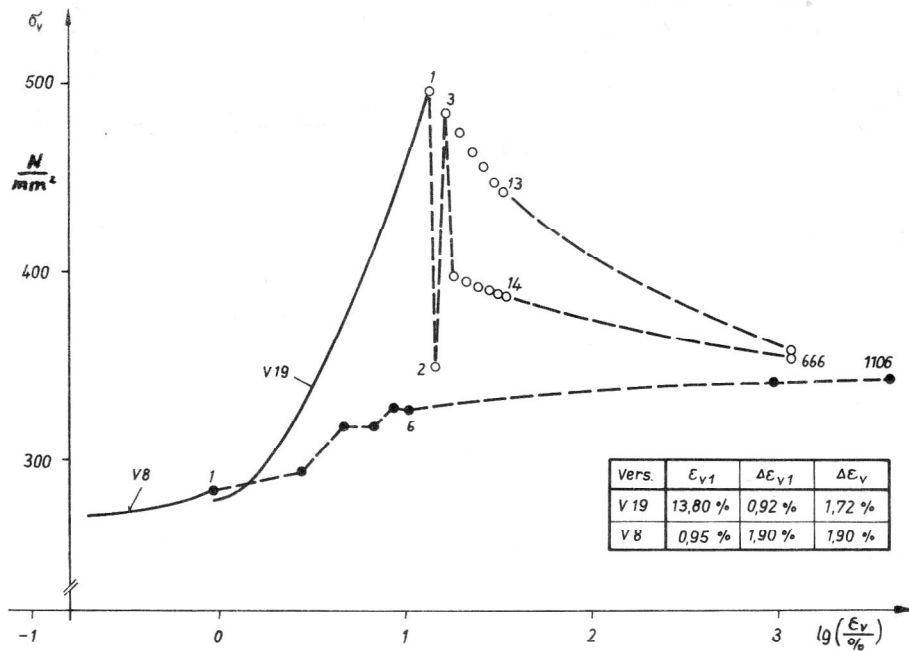
$$\sigma_v(\epsilon_v > \epsilon_{vn}) = k_f(\epsilon_w) - (-1)^n \sum_{s=1}^n (-1)^s \cdot \quad (14)$$

$$\cdot 2 z k_f(\epsilon_{ws}) \varphi(\epsilon_v - \epsilon_{vs})$$

Als ein Beispiel für die eingangs genannten Meßergebnisse an Stahl und Messing zeigt Bild 2 den Verlauf der Amplituden-Spannungen für Stahl, aufgetragen über dem log. der Vergleichsdehnung. Die eingetragenen Ziffern geben die Zahl der Lastwechsel an. $\Delta \epsilon_{v1}$ ist die Breite des ersten an die Vorverformung ϵ_{v1} anschließenden Halbzyklus, $\Delta \epsilon_v$ die konstant bleibende Breite der nachfolgenden Zyklen. Zum Vergleich ist ein Versuch mit symmetrischen Zyklen ($\epsilon_{v1} = \frac{\Delta \epsilon_v}{2}$) und ein Versuch

mit größerer Vorverformung ($\epsilon_{v1} \gg \Delta \epsilon_v$) dargestellt. Letzterer zeigt in Übereinstimmung mit vielen anderen Meßergebnissen eine allmähliche Abnahme der Amplitudendifferenzen (gleichbedeutend mit einer *Relaxation der Mittelspannung* [9]) sowie der Spannungsamplituden (*zyklische Entfestigung*). Man erkennt die Annäherung an einen stationären (stabilen) Zustand gleichbleibender Spannungsamplituden bei Mittelspannung null unabhängig von der Größe der Vorverformung.

Wie in [5] bereits gezeigt ist, wird die Relaxation der Mittelspannung durch die *Bauschinger-Relaxationsfunktion* erhalten, die mit zunehmender Vorverformung stärker werdende Entfestigung durch die Einführung des *Schlupfes* erfährt. In den folgenden Abschnitten wird auf



diese beiden Erscheinungen aufgrund von Ergebnissen der durchgeführten Versuche näher eingegangen.

4. Abhängigkeit der Funktion φ von der Lastwechselfolge

Während die Abnahme der Amplitudendifferenzen bei symmetrischen Zyklen ($\epsilon_{v1} = \Delta\epsilon_v/2$) mittels Gl. (14) quantitativ gut erfasst wird, zeigen Versuche mit Vorverformung ($\epsilon_{v1} > \Delta\epsilon_v/2$) eine wesentlich langsamere Relaxation der Mittelspannung, die auf eine Abhängigkeit der Relaxationsfunktion φ von der Vorgeschichte hindeutet. Wie in [10] ausgeführt wird, nimmt die Funktion φ die folgende Form an⁴⁾:

$$\varphi_s(\epsilon_v > \epsilon_{vn}) = \exp \left[- \sum_{i=1}^{n-s} (\kappa_i - \kappa_{i+1}) (\epsilon_{vi+s} - \epsilon_{vs})^\rho - \kappa_{n-s+1} (\epsilon_v - \epsilon_{vs})^\rho \right] \quad (15)$$

φ_s ist dabei die dem Lastwechsel mit der Nummer $s < n$ zugeordnete Relaxationsfunktion, die im Bereich $\epsilon_v > \epsilon_{vn}$ wirkt und von der Folge der Lastwechsel zwischen s und n bestimmt wird. Für $s = n$ ergibt sich für φ_s wieder die Beziehung (6c).

Die Exponenten κ_i in Gl. (15) bilden mit wachsender Lastwechselfolge i eine abnehmende Wertefolge

$$\kappa_i = \kappa_\infty + \frac{\kappa_1 - \kappa_\infty}{i} \quad (16)$$

die, wie in [10] gezeigt wird, zu guter Übereinstimmung mit den an Stahl und Messing gewonnenen Meßergebnissen führt. Aus den Versuchen ermittelte Werte κ_1 und κ_∞ zeigt Tab. 1.

Im Hinblick auf die Resultate der symmetrischen Zyklen scheint κ_∞ von der mittleren plastischen Dehnung abhängig zu sein:

Bild 2

Amplitudenspannungen nach Versuchen [7] an Stahlproben ohne (•) bzw. mit (o) Vorverformung.

$$\kappa_\infty = \kappa_\infty(\epsilon_{vm}) ; \quad \kappa_\infty(0) = \kappa_1 \quad (17)$$

Im allgemeinen Fall tritt also in den Gl. (10) und (14) an die Stelle von φ die Funktion φ_s nach Gl. (15), die von der Anzahl und der Verteilung der zwischen ϵ_{vs} und ϵ_{vn} liegenden Lastwechsel abhängt. Gl. (14) lautet damit:

$$\sigma_v(\epsilon_v > \epsilon_{vn}) = k_f(\epsilon_w) - (-1)^n \sum_{s=1}^n (-1)^s 2^s k_f(\epsilon_{ws}) \cdot \varphi_s(\epsilon_v - \epsilon_{vs}) \quad (18)$$

5. Zyklische Verfestigung und Entfestigung

Die bei wiederholten endlichen Richtungsänderungen im Vergleich zur Fließkurve auftretende geringere Verfestigung oder sogar Entfestigung wird in den Gl. (11) durch eine Abminderung der Vergleichsdehnung ϵ_v um den *Schlupf* $\Delta\epsilon_v^*$ erfasst. Für zyklische Verformungen ($D_s = D_1 = 1$), die nach einer Vorverformung bis ϵ_{v1} einsetzen und konstante Zyklenbreite $\Delta\epsilon_v$ besitzen, lassen sich die in (11) auftretenden Summenausdrücke in geschlossener Form darstellen.

Die folgenden Beziehungen werden unter Benutzung der Summenformel der geometrischen Progression erhalten [14]. Die Gl. (11 b,c) führen auf den Ausdruck:

$$\Delta\epsilon_{vs}^* = q(1-q)^{s-1} \epsilon_{v1} + [1 - (1-q)^{s-1}] \Delta\epsilon_v \quad (19)$$

Aus Gl. (11a) erhält man damit als wirksame Vergleichsdehnung für den $(n+1)$ -ten Lastwechsel:

4) Diese unterscheidet sich von dem in [7] entwickelten Ausdruck.

$$\epsilon_{wn+1} = \epsilon_{v1} \left[(1-q)^{n+q} \frac{\exp(-\vartheta n \Delta \epsilon_v) - (1-q)^n}{1 - (1-q) \exp(\vartheta \Delta \epsilon_v)} \right] + \Delta \epsilon_v \left[\frac{1 - (1-q)^n}{q} + \frac{\exp(-\vartheta n \Delta \epsilon_v) - 1}{1 - \exp(\vartheta \Delta \epsilon_v)} - \frac{\exp(-\vartheta n \Delta \epsilon_v) - (1-q)^n}{1 - (1-q) \exp(\vartheta \Delta \epsilon_v)} \right] \quad (20)$$

Diese Beziehung gilt für $q < 1$ und > 1 . Solange $0 \leq |1-q| < 1$ ist, nimmt der Einfluß der Vorverformung ϵ_{v1} mit wachsender Zahl n der Lastwechsel ständig ab. In dem speziellen Fall $q = 1$ ist:

$$\epsilon_{wn+1} = \epsilon_{v1} \exp(-\vartheta n \Delta \epsilon_v) + \Delta \epsilon_v \frac{\exp(\vartheta \Delta \epsilon_v)}{\exp(\vartheta \Delta \epsilon_v) - 1} \cdot [1 - \exp(-\vartheta n \Delta \epsilon_v)] \quad (21)$$

Die Spannung $k_f(\epsilon_w)$, die für die Größe der Amplitudenspannung in Gl. (14) bestimmend ist, hängt also bei großen Lastwechselzahlen nur von der Zyklusbreite $\Delta \epsilon_v$ ab.

Es wird, wie aus zahlreichen Versuchen bekannt ist, und wie es auch Bild 2 zeigt, ein von der Vorverformung unabhängiger stationärer oder stabiler Zustand erreicht.

Für große Lastwechselzahlen ($n \rightarrow \infty$) ergibt Gl. (20) den folgenden Zusammenhang zwischen der wirksamen Vergleichsdehnung ϵ_w und der Zyklusbreite $\Delta \epsilon_v$:

$$\epsilon_{w\infty} = \Delta \epsilon_v \left[\frac{1}{q} + \frac{1}{\exp(\vartheta \Delta \epsilon_v) - 1} \right] \quad (22a)$$

und

$$\epsilon_{w\infty} = \frac{1}{\vartheta} \text{ für } \Delta \epsilon_v \rightarrow 0. \quad (22b)$$

Gl. (22a) stellt ein Kriterium dafür dar, ob bei zyklischer Verformung bis zum Erreichen des stationären Zustandes Verfestigung oder Entfestigung auftritt. Ist die zu Beginn der zyklischen Verformung vorhandene Dehnung ϵ_{v1} kleiner als die wirksame Dehnung $\epsilon_{w\infty}$ des stationären Zustandes, dann tritt Verfestigung auf, andernfalls Entfestigung.

Bei symmetrischen Zyklen ist $\epsilon_{v1} = \frac{1}{2} \Delta \epsilon_v$, es tritt also nach Gl. (22a) immer Verfestigung auf. Für manche Werkstoffe (legierte Stähle hoher Festigkeit, wärmebeständige Legierungen), die auch bei symmetrischen Zyklen eine Entfestigung zeigen, müßten die Beziehungen (11) modifiziert werden, z. B. durch Einführung einer scheinbaren Vorverformung ϵ_{v0} , die der Dehnung ϵ_{v1} hinzuzufügen wäre.

6. Grenzlinie des stationären Zustandes

Die aus den Versuchen ermittelte experimentelle Zuordnung zwischen den Größen $\epsilon_{w\infty}$ und $\Delta \epsilon_v$ der Gl. (22a) ist in den Bildern 3 und 4 dargestellt. Zur Bestimmung von $\epsilon_{w\infty}$ ist zunächst die Spannung $k_{w\infty}$ zu ermitteln, die dann mit

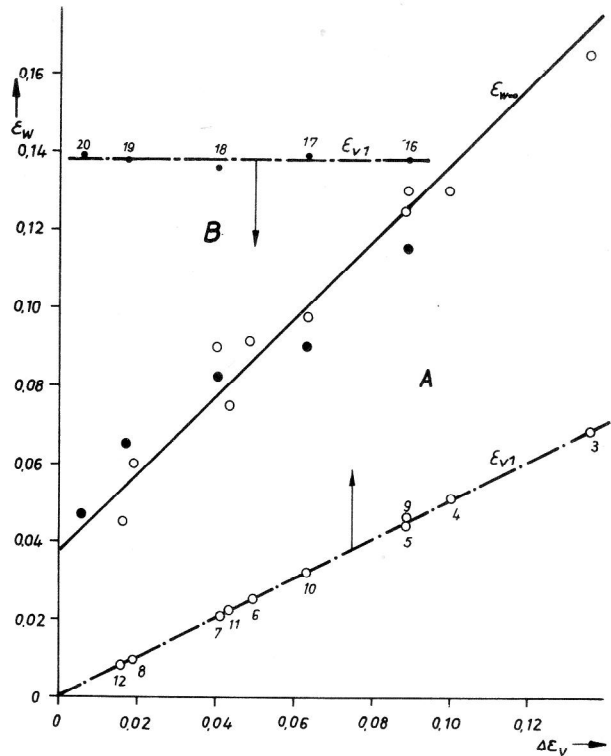


Bild 3

Grenzlinie (—) des stationären Zustandes nach [14] aus Versuchen an St 38 ohne (o) bzw. mit (•) Vorverformung; Beginn der Zyklen bei ϵ_{v1} (—•—)

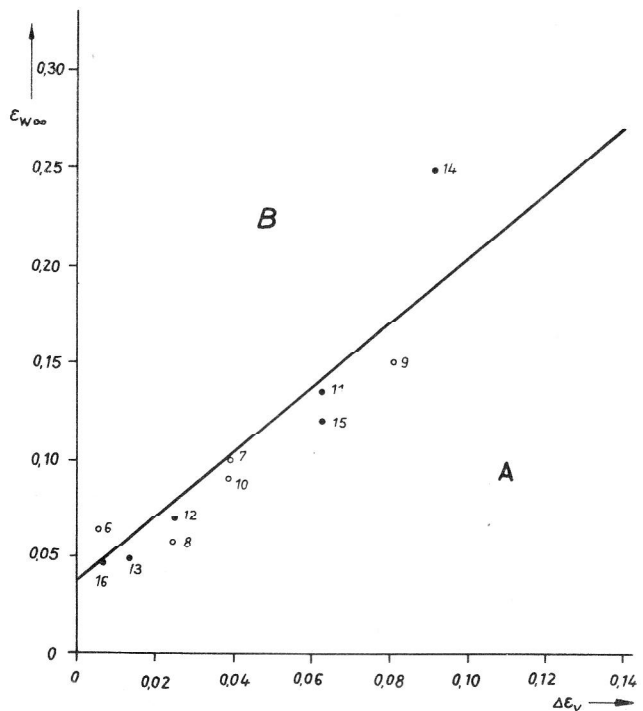


Bild 4

Grenzlinie (—) des stationären Zustandes nach Versuchen an Ms 58 ohne (o) bzw. (•) Vorverformung

$$k_{w\infty} = k_f(\epsilon_{w\infty})$$

aus den gemessenen Fließkurven unmittelbar den Wert $\epsilon_{w\infty}$ liefert.

Die Berechnung von $k_{w\infty}$ aus den gemessenen Spannungsamplituden σ_A ($n \rightarrow \infty$) kann auf der Grundlage der Gl. (18) mittels eines Näherungsausdruckes erfolgen:

$$\sigma_A(\infty) \approx k_w \infty \left[1 - 2z \left(\frac{3}{4} e^{-\kappa_1 \Delta \epsilon_v^\rho} - \frac{1}{4} e^{-\kappa_1 (2 \Delta \epsilon_v)^\rho} \right) \right] \quad (23)$$

Die durch die Versuchspunkte in Bild 3 und 4 gelegte Gerade stellt die *Grenzlinie* des stationären Zustandes dar [14]. Der Beginn der zyklischen Verformung kann unterhalb (Bereich A, $\epsilon_{v1} < \epsilon_{w\infty}$) oder oberhalb (Bereich B, $\epsilon_{v1} > \epsilon_{w\infty}$) liegen. In Bild 3 sind die zu den einzelnen Versuchspunkten gehörenden Ausgangswerte $\epsilon_{w1} = \epsilon_{v1}$ ebenfalls eingetragen. Mit wachsender Zyklenzahl nähert sich der betreffende Punkt der Grenzlinie. Im Bereich A tritt dabei ein Anwachsen von ϵ_w , also eine Verfestigung ein, im Bereich B eine Abnahme von ϵ_w , also eine Entfestigung. Die *Grenzlinie* trennt also den Bereich der zyklischen Verfestigung (A) von dem der zyklischen Entfestigung (B).

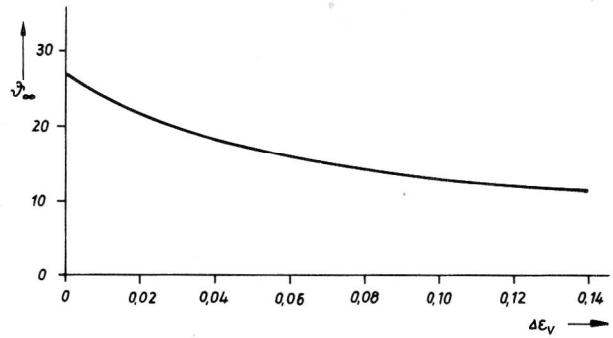


Bild 5
Abhängigkeit des Exponenten ϑ_∞ von der Zyklenbreite nach Gl. 25 ($c = 0,037$)

Bild 6
Wirksame Fließspannung k_w in Abhängigkeit von der Lastwechselzahl n ; aus Versuchen an St 38 ermittelt: \circ, \bullet : nach Rechnung: —

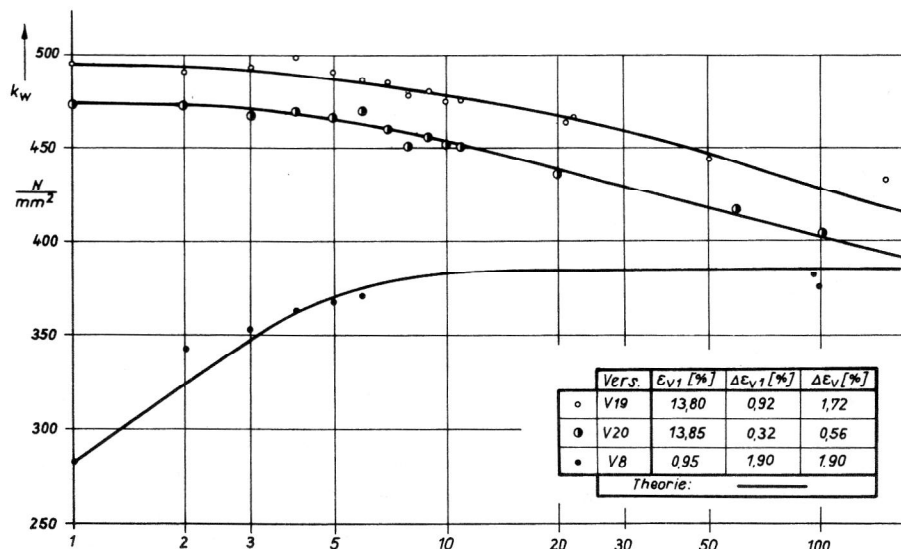
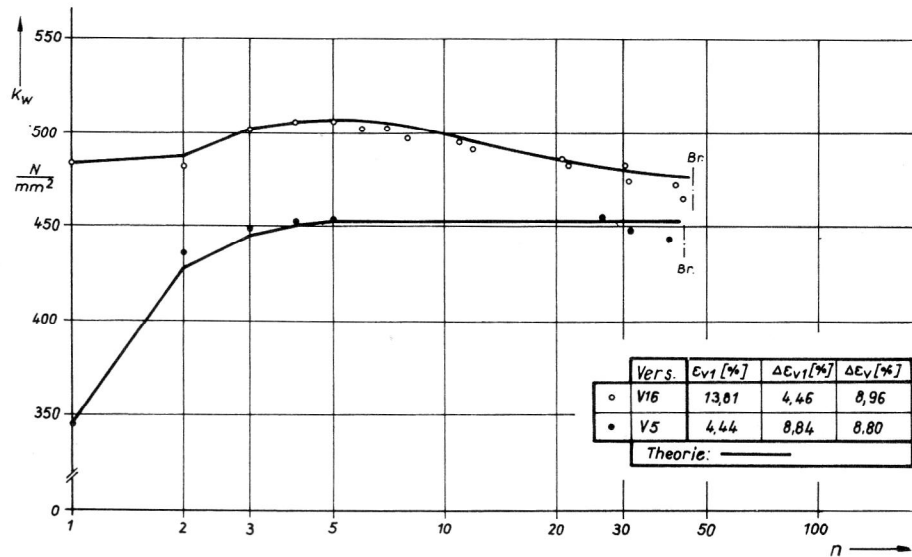


Bild 7
Wirksame Fließspannung k_w in Abhängigkeit von der Lastwechselzahl n ; aus Versuchen an St 38 ermittelt; \circ, \bullet, \bullet : nach Rechnung: —

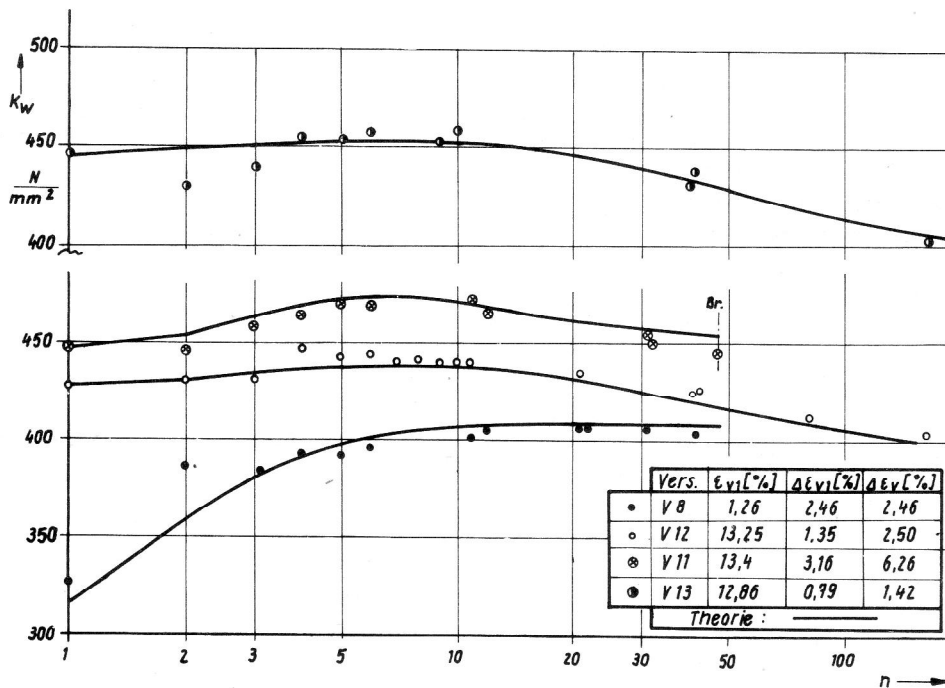


Bild 8
Wirksame Fließspannung k_w in Abhängigkeit von der Lastwechselzahl n ; aus Versuchen an Ms 58 ermittelt: •, ○, ⊙, ⊗; nach Rechnung: —

Mit der Geradengleichung der Grenzlinie

$$\epsilon_{w\infty} = m \Delta \epsilon_v + c \quad (24a)$$

liefert die Neigung m der Grenzlinie gemäß Gl. (22a) den Wert q :

$$q = 1/m \quad (\text{vgl. Tabelle 1}). \quad (24b)$$

Die Konstante c ist nach Gl. (22a) gegeben durch:

$$c = \frac{\Delta \epsilon_v}{\exp(\vartheta \Delta \epsilon_v) - 1} \quad (24c)$$

und führt damit auf eine Abhängigkeit des Exponenten ϑ im stationären Zustand ($= \vartheta_\infty$) von der Zyklenbreite $\Delta \epsilon_v$:

$$\vartheta_\infty = \frac{1}{\Delta \epsilon_v} \ln \left(1 + \frac{\Delta \epsilon_v}{c} \right), \quad (25)$$

dargestellt in Bild 5, wobei für die beiden untersuchten Werkstoffe $c \approx 0,037$ ist.⁵⁾

7. Wirksame Vergleichsdehnung ϵ_w

Zur Berechnung der Spannungen nach den Gl. (10), (14) bzw. (18) ist die Kenntnis der wirksamen Vergleichsdehnung ϵ_w erforderlich, mit der aus der Fließkurve $k_f(\epsilon_v)$ die wirksame Fließspannung $k_f(\epsilon_w) = k_w(\epsilon_v)$ zu entnehmen ist. Eine Überprüfung der zur Ermittlung von ϵ_w dienenden Beziehungen (11) und (25) kann mittels der im Versuch gemessenen Amplitudenspannungen $\sigma_v(n+1)$ erfolgen. Gl. (18) gibt:

5) Die hier angewandte Methode der Bestimmung von ϑ_∞ unterscheidet sich von der in [5] und [7] benutzten, wo außer q auch ϑ als Konstante angenommen wird. Letzteres führt jedoch bei größeren Zyklenbreiten $\Delta \epsilon_v$ zu Abweichungen von den gemessenen Spannungsverläufen.

$$k_w(n+1) = \sigma_v(n+1) + (-1)^n \sum_{s=1}^n (-1)^s 2z k_{ws} \cdot \varphi_s(\epsilon_{vn+1} - \epsilon_{vs}). \quad (26a)$$

Hierin sind die Funktionen φ_s durch die Gl. (15), (16) und (17) bestimmt. Damit kann $k_w(n+1)$ sukzessiv errechnet werden. Da die Glieder $s \rightarrow n$ den größten Beitrag zum Summenausdruck liefern, genügt für größere Werte n auch die vereinfachte Beziehung:

$$k_w(n+1) \approx \sigma_v(n+1) \left[1 - (-1)^n \sum_{s=1}^n (-1)^s 2z \cdot \varphi_s(\epsilon_{vn+1} - \epsilon_{vs}) \right]^{-1}. \quad (26b)$$

Die Ergebnisse der Auswertung einer Anzahl von Meßwerten sind in den Bildern 6 und 7 bzw. 8 für St 38 bzw. Ms 58 als Spannungen k_w über der Lastwechselzahl aufgetragen. Versuchen mit Vorverformung sind dabei symmetrische Zyklen gleicher Zyklenbreite zugeordnet.

Für die Nachrechnung dieser Ergebnisse stehen neben den Fließkurven die oben genannten Beziehungen zur Verfügung. Bei den Versuchen mit symmetrischen Verformungszyklen ergibt die Annahme $\vartheta = \text{const} = \vartheta_\infty$ ausreichende Übereinstimmung mit den Meßergebnissen. Es ist in diesem Falle $\Delta \epsilon_v = 2 \epsilon_{v1}$, somit gilt für ϑ (mit ϑ_1) bezeichnet) gemäß Gl. (25):

$$\vartheta_1 = \frac{1}{2 \epsilon_{v1}} \ln \left(1 + \frac{2 \epsilon_{v1}}{c} \right). \quad (27)$$

Bei Versuchen mit Vorverformung ($\epsilon_{v1} > \frac{\Delta \epsilon_v}{2}$)

ist der Wert ϑ zu Beginn der zyklischen Verformung kleiner als der Wert ϑ_∞ , der im stationären Zustand erreicht wird. Gl. (11a) ist daher wie folgt zu modifizieren:

$$\epsilon_w = \epsilon_v - \sum_{s=1}^n \Delta \epsilon_{vs}^* (1 - e^{-\vartheta_s(\epsilon_v - \epsilon_{vs})}), \quad (28a)$$

wobei angesetzt wird:

$$\vartheta_s = \vartheta_\infty - (\vartheta_\infty - \vartheta_1) e^{-\mu(s-1)} \quad (28b)$$

Faßt man die Vorverformung ϵ_{v1} als die halbe Breite eines ersten (symmetrischen) Zyklus auf, so ist der Wert ϑ_1 durch Gl. (27) bestimmt.

Die zur Übereinstimmung der in den Bildern 6 bis 8 dargestellten theoretischen Linienzüge mit den Versuchsergebnissen erforderlichen Werte ϑ_1 und μ sind in Bild 9 eingetragen. Von den Versuchen V 19 und V 20 für St 38 mit sehr kleinen Zyklusbreiten $\Delta\epsilon_v$ abgesehen ist die Übereinstimmung der benötigten Werte ϑ_1 mit Gl. (27) vorhanden.

Die Werte μ sind annähernd der Zyklusbreite proportional. Je größer $\Delta\epsilon_v$ ist, desto schneller nähert sich ϑ_s dem Wert ϑ_∞ . Setzt man $\mu = m\Delta\epsilon_v$, dann gilt mit

$$\Delta\epsilon_v(s-1) = \epsilon_v - \epsilon_{v1} \text{ auch:}$$

$$\vartheta_s = \vartheta_\infty - (\vartheta_\infty - \vartheta_1) e^{-m(\epsilon_{vs} - \epsilon_{v1})} \quad (28c)$$

Nach Bild 9b ist $m \approx 0,6$.

8. Berechnungsbeispiele

Um einen unmittelbaren Vergleich zwischen berechneten und gemessenen Spannungsverläufen zu erhalten, wurden die in Tabelle 2 angegebenen Versuche mit den in den vorhergehenden Abschnitten dargestellten theoretischen Beziehungen nachgerechnet. Die Spannungen ergeben sich aus Gl. (18) unter Benutzung der Gl. (15), (16), (28) und (11 b,c).

Tabelle 2 enthält die Versuchs-Merkmale und die für die Rechnung benutzten Konstanten.

Die Ergebnisse der Rechnungen enthalten die Bilder 10 bis 13. Zum Vergleich mit den Versuchen sind einzelne den gemessenen Spannungsverläufen entnommene Werte eingetragen.

Bild 10 zeigt einen Versuch mit symmetrischen Zyklen extrem großer Verformungsamplitude, Bild 11 einen Versuch mit symmetrischen Zyklen, bei dem nach 10 Lastwechseln die Probe einsinnig bis zum Bruch weiter verformt wurde.

Tabelle 2

Vers.	Versuchs-Merkmale			Bereich	Material-Konstanten						
	Werkst.	ϵ_{v1} [%]	$\Delta\epsilon_v$ [%]		ϑ_∞	ϑ_1	μ	q	κ_1	κ_∞	ρ
3	St 38	6,86	13,61	A	11	11	—	1	10,4	10,4	0,45
11	St 38	2,20	4,28	A	18	18	—	1	10,4	10,4	0,45
16	St 38	13,8	8,96	B	14	7,5	0,055	1	10,4	1,0	0,45
11	Ms 58	13,4	6,26	B	16	8	0,04	0,6	19,0	0,3	0,59

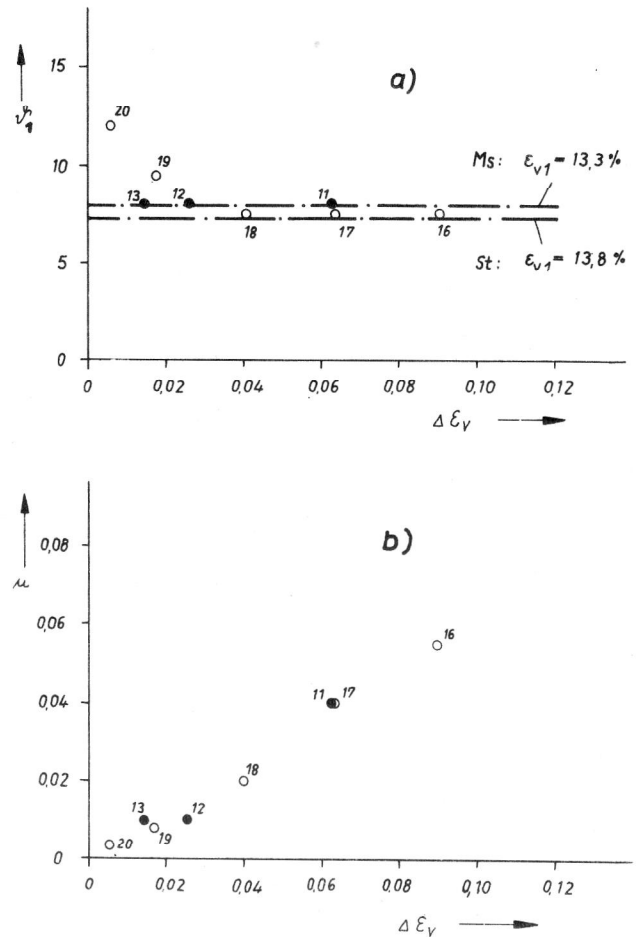


Bild 9

Aus Versuchen an St 38 (o) und Ms 58 (•) ermittelte Werte ϑ_1 und μ , nach [14]; Rechnung nach Gl. (27) mit $c = 0,037$:

In Bild 12 ist ein Versuch mit großer Vorverformung dargestellt ($\epsilon_{v1} \approx 3 \frac{\Delta\epsilon_v}{2}$), bei dem Entfestigung auftritt (Bruch nach 45 Lastwechseln). Bild 13 zeigt den Verlauf der Amplitudenspannungen bei großer Vorverformung für Messing.

In den Bildern ist der Verlauf der monotonen Fließkurve $k_f(\epsilon_v)$ sowie der wirksamen Fließspannungen $k_w(\epsilon_v)$ angegeben. Die Differenz zwischen diesen Kurven zeigt den rein skalaren Effekt der bleibenden Entfestigung (Bauschingeranteil b_2) an. Die allmählich ver-

Bild 10
 Spannungsverlauf bei symmetrischen
 Zyklen für St 38 nach
 Rechnung (—) und Versuch (o)

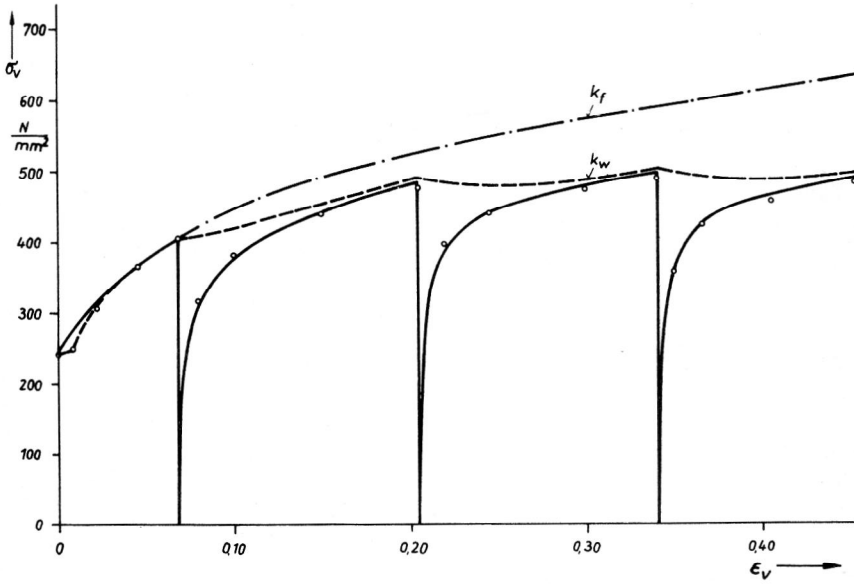


Bild 11
 Spannungsverlauf bei symmetrischen
 Zyklen für St 38 nach
 Rechnung (—) und Versuch (o),
 Darstellung nach [14]

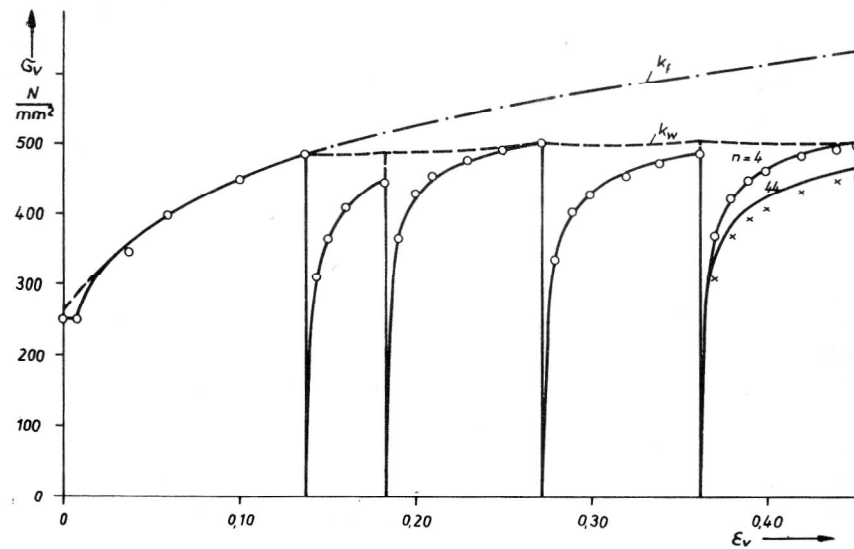
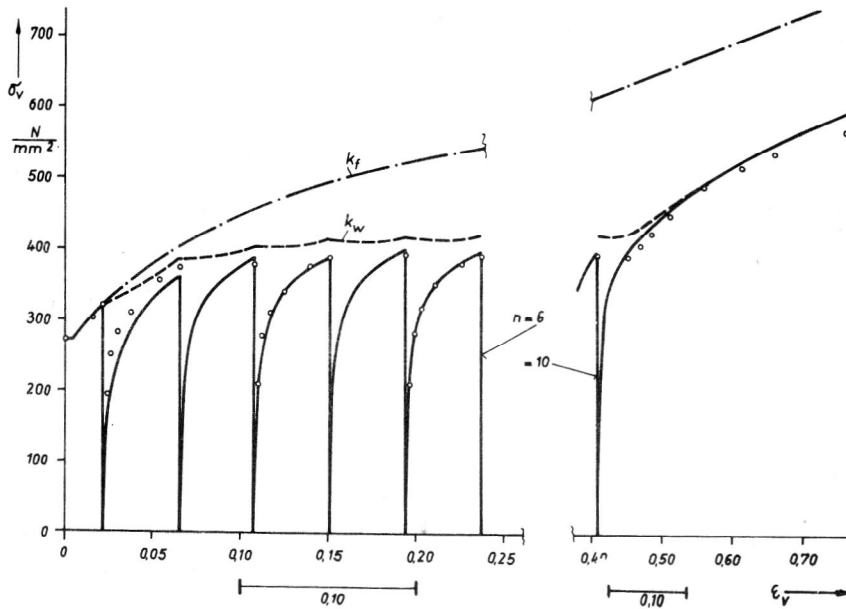


Bild 12
 Spannungsverlauf bei Zyklen mit großer Vorverformung für
 St 38 nach Rechnung (—) und Versuch (o+), Darstellung
 nach [14]

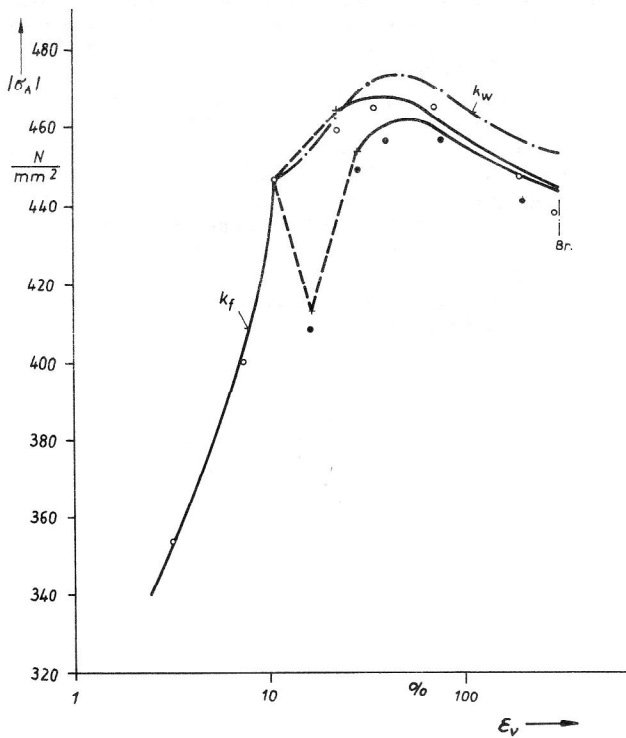


Bild 13
Verlauf der Amplitudenspannungen bei Zyklen mit großer Vorverformung für Ms 58 nach Rechnung (— +) und Versuch (o = n ungerade, ● = n gerade)

schwindende Differenz zwischen den Kurven $k_w(\epsilon_v)$ und dem resultierenden Spannungsverlauf $\sigma_v(\epsilon_v)$ stellt den vektoriellen Anteil des Bauschingereffekts (Anteil b_1) dar, der bei Richtungsänderungen $< 180^\circ$ zu der experimentell festgestellten verzögerten Einstellung des Spannungsvektors auf die neue Verformungsrichtung führt.

9. Verformung mit stetiger Richtungsänderung

Bei Verformung mit stetiger Richtungsänderung tritt an die Stelle des Summenausdrucks in Gl. (10) ein Integralausdruck, wobei $\Delta \frac{d\epsilon_{ij}^p}{d\epsilon_v}$ durch $\frac{d^2\epsilon_{ij}^p}{d\epsilon_v^2} d\epsilon_v$

zu ersetzen ist.

Im Bereich stetiger Richtungsänderung entfällt der durch die Gl. (11) gegebene Entfestigungseffekt, da der Faktor D_s mit dem Betrage der Richtungsänderung quadratisch gegen null geht (s. Gl. 8). Diese Annahme wird durch Nachrechnung von Versuchen mit stetigen Richtungsänderungen gestützt. Aus diesen Nachrechnungen geht auch hervor, daß in diesem Fall – wie im Fall der symmetrischen Zyklen – der Exponent κ der Bauschinger-Relaxationsfunktion als Konstante angesetzt werden kann, so daß an die Stelle von φ_s wieder die einfache Relaxationsfunktion φ nach Gl. (6c) tritt.

Aus Gl. (10) entsteht damit die folgende für rein stetige Richtungsänderungen gültige Beziehung:

$$s_{ij}(\epsilon_v) = \frac{2}{3} k_f(\epsilon_v) \frac{d\epsilon_{ij}^p}{d\epsilon_v}(\epsilon_v) - \int_0^{\epsilon_v} \frac{2}{3} z(\bar{\epsilon}_v) k_f(\bar{\epsilon}_v) \cdot$$

$$\cdot \varphi(\epsilon_v - \bar{\epsilon}_v) \frac{d^2\epsilon_{ij}^p}{d\bar{\epsilon}_v^2}(\bar{\epsilon}_v) d\bar{\epsilon}_v \quad (29)$$

mit $\varphi = e^{-\kappa_1(\epsilon_v - \bar{\epsilon}_v)^\rho}$ entsprechend Gl. (6c).

Eine Anwendung dieser Beziehung (29) auf plastische Verformungen konstanter Krümmung ist in [11] durchgeführt und ergibt gute Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen in [12].

10. Anisotropie und Faserdrehung

Die in den vorhergehenden Abschnitten behandelten Spannungs-Deformations-Beziehungen für beliebige endliche oder stetige Änderungen der Verformungsrichtung basieren auf der Fließbedingung nach Huber-von Mises. Die in irgendeinem Augenblick des Verformungsvorganges experimentell festgestellte Fließgrenzfläche wird also durch eine Hyperkugel im Deviatorraum angenähert. Die Lage ihres Mittelpunktes stellt – wie in [10], [13] und [14] näher ausgeführt ist – ein Maß für die Verformungsanisotropie dar.

Die Anisotropie ist eine materialgebundene Eigenschaft. Die obigen Spannungs-Deformations-Beziehungen setzen daher ein materialgebundenes Bezugssystem voraus. Für das hier benutzte Cartesische System ist diese Forderung nur angenähert zu erfüllen, indem eine Achse und eine durch sie mitbestimmte Koordinatenebene im infinitesimalen Bereich materialfest sind. Hierbei ist noch die verzerrungsbedingte Drehung des Materials $d\omega_{ij}/d\epsilon_v$ zu berücksichtigen. An die Stelle der Ableitung des Richtungs-

tensors $\frac{d}{d\epsilon_v} \left(\frac{d\epsilon_{ij}^p}{d\epsilon_v} \right)$ tritt die materielle Ableitung

2. Art, die diese Drehung berücksichtigt:

$$\frac{D}{d\epsilon_v} \left(\frac{d\epsilon_{ij}^p}{d\epsilon_v} \right) = \frac{d^2\epsilon_{ij}^p}{d\epsilon_v^2} + \frac{d\epsilon_{mj}^p}{d\epsilon_v} \frac{d\omega_{mi}}{d\epsilon_v} + \frac{d\epsilon_{ni}^p}{d\epsilon_v} \frac{d\omega_{nj}}{d\epsilon_v} \quad (30)$$

Sie bewirkt, daß auch bei stationären Verformungsvorgängen $d\epsilon_{ij}^p/d\epsilon_v = \text{const}$ in Gl. (29) ein Integralausdruck auftritt, dessen quantitativer Einfluß jedoch nur sehr gering ist (vgl. hierzu [13], [14]). Bei endlichen Richtungsänderungen entfällt in dem betreffenden Augenblick die Drehung.

LITERATUR

- [1] Backhaus, G.: Eine analytische Darstellung des Materialverhaltens im plastischen Bereich. First National Congress on Theoretical and Applied Mechanics 1969, Varna, Bulgarien; Proceedings Vol. 1, 311 – 320, Sofia 1971.
- [2] Backhaus, G.: Zur analytischen Darstellung des Materialverhaltens im plastischen Bereich. ZAMM 51, 471 – 477 (1971).
- [3] Backhaus, G.: Zur analytischen Erfassung des allgemeinen Bauschingereffektes. Acta Mechanica 14, 31 – 42 (1972).

- [4] Shiratori, E.; Ikegami, K.; Kaneku, K.: The Stress Vector and the Subsequent Yield Surface in Loading along the Strain Path with a Corner. Bulletin of the JSME, Vol. 17, No. 113, Nov. 1974.
- [5] Backhaus, G.: Fließspannungen und Fließbedingung bei zyklischen Verformungen. ZAMM 56, 337 – 348 (1976).
- [6] Orowan, E.: Causes and Effects of Internal Stresses. In: Internal Stresses and Fatigue in Metals, ed. by Rassweiler, G.M. and Grube, W.L.; Elsevier Publishing Comp., Amsterdam, London, New York, Princeton, 1959.
- [7] Richter, K.: Experimentelle und theoretische Untersuchungen zum Spannungs-Verformungs-Verhalten von St 38 und Ms 58 bei Zug-Torsions-Belastung im plastischen Bereich. Dissertation, Technische Universität Dresden, 1978.
- [8] Dietz, M.: Beitrag zum Wesen und zu den Ursachen des Bauschinger-effekts. Dissertation, Ingenieurhochschule Zwickau. 1977.
- [9] Ross, A.S., Morrew, J.D.: Cycle-dependent Stress Relaxation of A-286 alloy. Trans. ASME, J. Basic Engineering, Sept. 1966.
- [10] Backhaus, G.: Anisotropic Behaviour at Cyclic Plastic Deformation. In: Boehler, J.P. (ed.): Mechanical Behavior of Anisotropic Solids. Martinus Nijhoff Publishers BV, The Hague, The Netherlands, 1982.
- [11] Backhaus, G.: Plastic Deformation in Form of Strain Trajectories of Constant Curvature – Theory and Comparison with Experimental Results. Acta Mechanica 34, 193–204 (1979).
- [12] Ohashi, Y., Tokuda, M., Yamashita, H.: Plastic Deformation of Mild Steel under Combined Load of Axial Force and Torsion with Strain Trajectories of Constant Curvature. Bull. JSME, 18, (1975), 579 – 586.
- [13] Backhaus, G.: Constitutive Equations for the Plastic Behaviour of Metals and the Influence of the Deformation Induced Rotation. Acta Mechanica 41, 73 – 83 (1981).
- [14] Backhaus, G.: Deformationsgesetze. Akademie-Verlag, Berlin (1982).

Anschriften der Verfasser:

Prof. (em.) Dr.-Ing. G. Backhaus
8020 Dresden, Herkulesstr. 3
Dr.-Ing. K. Richter
8046 Dresden, Zschierenerstr. 14