

Zum Verzweigungsproblem elastisch-plastischer Verbundstäbe

Herbert Balke

Die Mischungsregel zur Berechnung der effektiven Spannungsdehnungskennlinie eines inkompressiblen elastisch-plastischen Verbundstabes wird zur Bestimmung des Maximums für die axiale Zugkraft benutzt. Die Lösung des achsensymmetrischen Verzweigungsproblems für verschiedene Komponentenpaarungen ergibt, daß die berechneten kritischen Dehnungen oberhalb der zum jeweiligen Kraftmaximum gehörenden Dehnungen liegen.

0. Einleitung

Schlanke homogene Zugstäbe aus elastisch-plastischem Material mit Verfestigung schnüren bei einer Belastung ein, die etwa dem Maximum im Kraftverlängerungsdiagramm entspricht. In [1] wird diese Erscheinung für den Kreiszylinderstab mittels der Verzweigungstheorie gedeutet. Danach übersteigt die wahre Spannung bei der Verzweigung die wahre Spannung beim Kraftmaximum um einen Betrag, der von dem Verhältnis Zylinderradius zur Wellenlänge der Eigenlösung und den Steifigkeitsmoduln abhängt.

In der vorliegenden Arbeit wird untersucht, inwieweit die Mischungsregel zur Berechnung des Kraftmaximums bei einachsig verstärkten elastisch-plastischen Zugstäben zur Abschätzung der Verzweigungslasten gültig ist, und für den zylindersymmetrischen Verbundstab das Verzweigungsproblem gelöst.

1. Mischungsregel für einachsig verstärkte Verbundstäbe

Ein Verbundstab bestehe aus parallel zur Stabachse angeordneten und spannungsfrei fest miteinander verbundenen zylindrischen Körpern gleicher Ausgangslänge L_0 . Die homogenen Körper verhalten sich inkompressibel elastisch-plastisch, isotrop verfestigend. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf zwei Materialtypen 1 und 2, die auf die Ausgangsquerschnittsflächen A_{01} und A_{02} der Komponenten 1 und 2 verteilt sind. Dann berechnet sich die biegefrei aufgebrachte Axialkraft F aus den wahren Axialspannungen σ_1, σ_2 in den aktuellen Querschnitten A_1, A_2 nach (vgl. Bild 1, 2)

$$F = A_1 \sigma_1 + A_2 \sigma_2 = \frac{A_{01}}{1 + \epsilon_n} \sigma_1(\epsilon_n) + \frac{A_{02}}{1 + \epsilon_n} \sigma_2(\epsilon_n) \quad (1.1)$$

mit der auf die Ausgangslänge (oder Nennlänge) bezogenen Dehnung

$$\epsilon_n = \frac{L - L_0}{L_0}, \quad (1.2)$$

L - aktuelle Stablänge. Gl. (1.1) kann mit dem Volumenanteil v der Komponente 1 auch als Gleichung für die

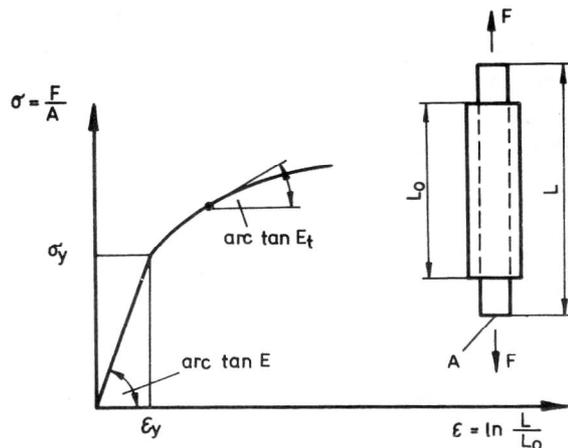


Bild 1
Idealisiertes Spannungsdehnungsdiagramm

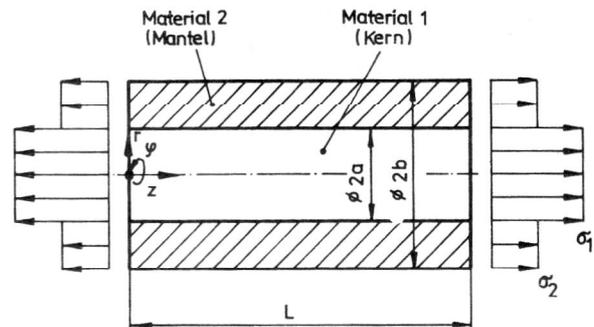


Bild 2
Rotationssymmetrischer Verbundstab in der aktuellen Konfiguration

effektive wahre Spannung σ_v des Verbundstabes geschrieben werden (Mischungsregel)

$$\sigma_v = v \sigma_1 + (1 - v) \sigma_2 \quad (1.3)$$

Mit Einführung der logarithmischen Dehnung

$$\epsilon = \ln(1 + \epsilon_n) \quad (1.4)$$

liefert die notwendige Bedingung für das Maximum der Kraft in (1.1)

$$\frac{dF}{d\epsilon_n} = \frac{(A_{o1} \frac{d\sigma_1}{d\epsilon_n} + A_{o2} \frac{d\sigma_2}{d\epsilon_n}) \cdot (1 + \epsilon_n) - (A_{o1} \sigma_1 + A_{o2} \sigma_2)}{(1 + \epsilon_n)^2} = 0$$

bzw. mit (1.4)

$$v\sigma_1 + (1-v)\sigma_2 = v \frac{d\sigma_1}{d\epsilon} + (1-v) \frac{d\sigma_2}{d\epsilon} \quad (1.5)$$

$$\text{und (1.3)} \quad \sigma_v = E_{tv} \quad (1.6)$$

wo E_{tv} den Tangentenmodul der effektiven Spannung über der logarithmischen Dehnung bezeichnet. Für die jeweilige Komponente i ist $d\sigma_i/d\epsilon$ im elastischen Bereich der Elastizitätsmodul $E_i = 3G_i$ (G_i - Schubmodul) und im elastisch-plastischen Bereich der Tangentenmodul E_{ti} . Gl. (1.5) ist eine Mischungsregel zur Bestimmung des Kraftmaximums des Verbundstabes. Mit $v = 0$ oder $v = 1$ liefert diese Gleichung das klassische Einschnürkriterium für die einzelne Komponente

$$\sigma_i = E_{ti} \quad (1.7)$$

In [2] wird gezeigt, daß die Verformung des Einkomponentenzugstabes homogen bleibt, so lange

$$\sigma < E_t \quad (1.8)$$

erfüllt ist. Im folgenden soll untersucht werden, ob es eine analoge Beziehung für den Verbundstab gibt. Hierzu wenden wir das in [3] angegebene hinreichende Eindeutigkeitskriterium ähnlich wie in [2] an.

2. Eine untere Schranke für die Verzweigungslast

In einem raumfesten Koordinatensystem x^k sei die Geschwindigkeit eines Körperpunktes v^k . $()|_k$ bezeichnen die kovariante Ableitung nach x^k und

$$()^* = ()_{,t} + ()|_k v^k \quad (2.1)$$

die materielle nach der formalen Zeit t . Der Geschwindigkeitsgradient

$$v_k|_l = d_{kl} + w_{kl} \quad (2.2)$$

zerfällt in die Verzerrungsgeschwindigkeit

$$d_{kl} = \frac{1}{2} (v_k|_l + v_l|_k) \quad (2.3)$$

und die Drehungsgeschwindigkeit

$$w_{kl} = \frac{1}{2} (v_k|_l - v_l|_k) \quad (2.4)$$

Wegen der Inkompressibilität des Materials gilt

$$v^k|_k = 0 \quad (2.5)$$

Die symmetrische wahre Spannung σ_1^k mit dem Deviator

$$s_1^k = \sigma_1^k + p \cdot \delta_1^k \quad (2.6)$$

$$p = -\frac{1}{3} \sigma_k^k$$

δ_1^k - Einheitstensor, erfüllt bei quasistatischer Deformation die Gleichgewichtsbedingungen und die Bedingung des fortgesetzten Gleichgewichtes [3].

$$\sigma_1^k|_k = 0 \quad (2.7)$$

$$(\sigma_1^k|_k)^* = (\sigma_1^k + \sigma_1^k v^n|_n - \sigma_1^n v^k|_n)|_k = 0 \quad (2.8)$$

Für das elastisch-plastische Material setzen wir kleine elastische Verzerrungen im Sinne von [4] voraus und stellen die Verzerrungsgeschwindigkeit als Summe eines elastischen Anteils d_e^k und eines plastischen Anteils d_p^k dar.

$$d_1^k = d_e^k + d_p^k \quad (2.9)$$

Unsere konstitutive Annahme für den ersteren besteht darin, daß wir von den verschiedenen möglichen objektiven Spannungsgeschwindigkeiten [5] die Jaumannsche

$$*s_1^k = s_1^k + s_n^k w_1^n - s_1^n w_n^k \quad (2.10)$$

benutzen und diese proportional zu d_e^k setzen.

$$d_e^k = \frac{1}{2G} *s_1^k \quad (2.11)$$

Der plastische Anteil wird nach von Mises gebildet [6]

$$d_p^k = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{E_t} - \frac{1}{3G} \right) \frac{s^{rs} s_{rs}}{s^{mn} s_{mn}} s_1^k \quad (2.12)$$

$$\frac{3}{2} s_1^k s_k = \sigma_F^2, \quad s^{mn} s_{mn} > 0$$

σ_F - Fließspannung. Der Schubmodul $G = E/3$ und der Tangentenmodul E_t sind aus dem als ideal vorausgesetzten Spannungsdehnungsdiagramm (Bild 1) zu bestimmen. Für dieses Diagramm muß angenommen werden, daß das Deformationsgesetz (2.9), ..., (2.12) auch noch oberhalb der im Zugversuch beginnenden Einschnürung gilt. Die experimentellen Werte sind dort aus Grundversuchen mit anderen Spannungszuständen zu ermitteln. (2.9), ..., (2.12) liefern mit der Invariantenbildung

$$s^{kl} d_{kl} = \frac{3}{2E_t} \cdot s^{kl} s_{kl}$$

in (2.9) das Deformationsgesetz in der Form

$$2G [d_1^k - (1 - \frac{E_t}{3G}) \frac{s^{pq} d_{qp}}{s^{mn} s_{mn}} s_1^k] = s_1^k + s_n^k w_1^n - s_1^n w_n^k \quad (2.13)$$

Im folgenden führen wir ein weiteres Koordinatensystem ein, das mit der momentanen Konfiguration als Bezugs-konfiguration verbunden ist. Der Unterschied der beiden Koordinatensysteme wird bei der materiellen Ableitung berücksichtigt. Anschließend benutzen wir gleiche Index-

bezeichnungen für beide Koordinatensysteme. Mit diesen Festlegungen gilt für die nominelle Spannung σ_R^{kl} [7] wegen (2.5)

$$\dot{\sigma}_R^{kl} = \dot{\sigma}^{kl} - \sigma^{ln} v^k |_{,n} . \quad (2.14)$$

Die Koordinate x^3 sei nun in Stabachsenrichtung und senkrecht zu x^2 und x^3 orientiert. Wir betrachten einen einfach ummandelten Stab. Zur Formulierung der Randbedingungen wird totale Haftung an der Grenzfläche G zwischen den beiden Komponenten vorausgesetzt. Dann ist dort die Geschwindigkeit stetig.

$$(v^k)_{G,1} = (v^k)_{G,2} . \quad (2.15)$$

Weiterhin erfolgt auch die Übertragung der Kraftänderung stetig.

$$(\dot{\sigma}_R^{kl} n_k)_{G,1} = (\dot{\sigma}_R^{kl} n_k)_{G,2} \quad (2.16)$$

(n_k – äußere Einheitsnormale des Flächenelementes).

Dagegen verschwindet die Kraftänderung am äußeren Mantel M für das Material 2

$$(\dot{\sigma}_R^{kl} n_k)_{M,2} = 0 . \quad (2.17)$$

Die schubfreien Stirnflächen S sollen als Ebenen in Richtung der Stabachse x^3 auseinander bewegt werden.

$$(v^3)_S = \pm w_0(t) \quad (2.18)$$

$$(\dot{\sigma}_R^{k1} n_k)_S = (\dot{\sigma}_R^{k2} n_k)_S = 0 . \quad (2.19)$$

Mit der Methode von [3] fragen wir jetzt nach der Eindeutigkeit des Geschwindigkeitsfeldes für den einachsigen Spannungszustand. Hierzu können nach Anwendung des Befreiungsprinzips für die beiden Komponenten des Verbundstabes getrennt folgende Oberflächenintegrale aufgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} & \int_{S,1} \Delta \dot{\sigma}_R^{l k} \Delta v^k n_l dS + \int_{G,1} \Delta \dot{\sigma}_R^{l k} \Delta v^k n_l dS - \\ & - \int_{G,2} \Delta \dot{\sigma}_R^{l k} \Delta v^k n_l dS + \int_{S,2} \Delta \dot{\sigma}_R^{l k} \Delta v^k n_l dS + \\ & + \int_{M,2} \Delta \dot{\sigma}_R^{l k} \Delta v^k n_l dS = 0 . \end{aligned} \quad (2.20)$$

Das Δ bezeichnet die Differenz zweier möglicher Lösungen. Der erste, vierte und fünfte Term in (2.20) verschwinden einzeln wegen (2.17), (2.18), (2.19). Die verbleibende Differenz liefert wegen (2.15), (2.16) Null. Die Anwendung des Green-Gauss-Theorem auf die ersten beiden und danach auf die restlichen Terme in (2.20) ergibt wegen (2.5), (2.8), (2.14)

$$\int_{V,1} \Delta \dot{\sigma}_R^{l k} (\Delta v^k) |_{,l} dV + \int_{V,2} \Delta \dot{\sigma}_R^{l k} (\Delta v^k) |_{,l} dV = 0 . \quad (2.21)$$

Die Integrale sind dabei mit (2.13) für die Integranden in den Volumina der Komponenten 1 und 2 zu berechnen. Wenn die linke Seite von (2.21) mit (2.13) für alle kinematisch zulässigen Geschwindigkeitsfelder v^k positiv ist, muß die Differenz zwischen den beiden möglichen Lösungen verschwinden. Dann bleiben die homogene Deformation und der einachsige Spannungszustand im Verbundkörper erhalten.

Einsetzen von (2.2), . . . , (2.6), (2.13), (2.14) in (2.21) liefert zunächst für die Gebiete A_1, A_2 Integranden $I_{1,2}$ von der Form (mit kartesischen Koordinaten z_k, z_3 in Stabachsenrichtung)

$$\begin{aligned} I_{1,2} = & \left\{ 2G [d_{k1} d_{k1} - \frac{3}{2} (1 - \frac{E_t}{3G}) d_{33}^2] + \right. \\ & + \sigma [-2(w_{31} d_{13} + w_{32} d_{23}) + w_{31}^2 + w_{32}^2 - \\ & \left. - d_{k3} d_{3k}] \right\}_{1,2} . \end{aligned} \quad (2.22)$$

Wegen

$$-2(w_{31} d_{13} + w_{32} d_{23}) + w_{31}^2 + w_{32}^2 \geq -d_{13}^2 - d_{23}^2 \quad (2.23)$$

(wie in [2] ist die rechte Seite von (2.23) das absolute Minimum der linken Seite) gilt

$$\begin{aligned} I_{1,2} \geq & \left\{ 2G [d_{k1} d_{k1} - \frac{3}{2} (1 - \frac{E_t}{3G}) d_{33}^2] - \right. \\ & \left. - \sigma (d_{13}^2 + d_{23}^2 + d_{k3} d_{3k}) \right\}_{1,2} \end{aligned}$$

bzw. mit $d_{kk} = 0$

$$\begin{aligned} I_{1,2} \geq & \left\{ (E_t - \sigma) d_{33}^2 + G(2d_{11} + d_{33})^2 + \right. \\ & \left. + 4G(d_{12}^2 + d_{23}^2 + d_{13}^2) - 2\sigma(d_{23}^2 + d_{13}^2) \right\}_{1,2} . \end{aligned} \quad (2.24)$$

Für $(G > \sigma)_{1,2}$ folgt aus (2.24)

$$I_{1,2} \geq [(E_t - \sigma) d_{33}^2]_{1,2} . \quad (2.25)$$

Mit (2.25) in (2.21) sieht man, daß es keine inhomogenen Deformationsmoden gibt, wenn die Dehnung im Verbundstab kleiner bleibt als der kleinere von den beiden Werten, die jeder einzeln den Einschnürungsbeginn der Komponenten nach dem klassischen Kriterium (1.7) anzeigen.

In den Voraussetzungen für diese Folgerung wurde keinerlei Bezug auf irgendwelche Symmetrien innerhalb des Verbundstabquerschnittes genommen. Die Aussagen bleiben erhalten, wenn anders zusammenhängende Querschnitte (z. B. mehrere Fasern in einem Matrixstab) betrachtet werden und lassen sich sinngemäß auf mehr als zwei Komponenten übertragen.

3. Lösung des Eigenwertproblems

Der im folgenden betrachtete Zugstab (vgl. Bild 2) bestehe aus einem Vollkreiszyylinder 1, der mit einem Hohlkreiszyylinder 2 gleicher Länge spannungsfrei fest ummantelt ist. Für einachsige Spannung und mit Beschränkung auf rotationssymmetrische Geschwindig-

keitsfelder liefern dann (2.5), ..., (2.8), (2.13) in Zylinderkoordinaten (r, φ, z statt x^1, x^2, x^3)

$$u'' + \frac{u'}{r} + u^{++} - \frac{u}{r^2} + \left(1 - \frac{E_t}{3G}\right) w^{+'} + \frac{\sigma}{2G} (u^{++} - w^{+'}) - 2q' = 0 \quad (3.1)$$

$$w'' + \frac{w'}{r} + w^{++} - 2\left(1 - \frac{E_t}{3G}\right) w^{++} - \frac{\sigma}{2G} (w'' + \frac{w'}{r} + w^{++}) - 2q^+ = 0 \quad (3.2)$$

$$u' + \frac{u}{r} + w^+ = 0 \quad (3.3)$$

$$w^+ > 0 \quad (3.4)$$

mit

$$q = \frac{\dot{P}}{2G}; \quad (\cdot)' = \partial(\cdot)/\partial r; \quad (\cdot)^+ = \partial(\cdot)/\partial z. \quad (3.5)$$

u, w sind die physikalischen Koordinaten von v^1, v^3 . Diese Gleichungen stimmen bis auf den Faktor 2 vor q' in (3.1) bzw. q^+ in (3.2) mit [8] überein. Die Randbedingungen lauten mit (2.13), ..., (2.19) unter Benutzung der physikalischen Koordinaten der wahren Spannung

$$\begin{aligned} z = L: \quad w = w_0, \quad u^+ = \dot{\sigma}_{zr} = 0 \\ z = 0: \quad w = -w_0, \quad u^+ = \dot{\sigma}_{zr} = 0 \\ r = 0: \quad \text{Endlichkeit der Lösung} \\ r = a: \quad \dot{\sigma}_{rr1} = \dot{\sigma}_{rr2}, \quad \dot{\sigma}_{rz1} - \dot{\sigma}_{rz2} = (\dot{\sigma}_1 - \dot{\sigma}_2) u^+, \\ u_1^+ = u_2^+ = u^+ \\ u_1 = u_2, \quad w_1 = w_2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$r = b: \quad \dot{\sigma}_{rr2} = 0, \quad \dot{\sigma}_{rz2} = \sigma_2 u_2^+.$$

Den Lösungsansatz, der (3.6) und die Belastungsbedingung (3.4) für hinreichend kleine Amplituden des Verzweigungslösungsanteils erfüllt, entnehmen wir [1,9]:

$$\begin{aligned} u &= -\frac{w_0}{L} r + f(r) \cos \nu z \\ w &= w_0 \left(2 \frac{z}{L} - 1\right) + g(r) \sin \nu z, \quad \nu = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \\ q &= -\frac{2w_0 E_t}{3L} + 2Gh(r) \cos \nu z, \end{aligned} \quad (3.8)$$

desgleichen die Lösungen der nach Zusammenfassung verbleibenden gewöhnlichen Differentialgleichungen für die Bereiche 1 und 2 in u

$$\begin{aligned} f_1 &= BJ_1(\gamma \rho_1 \zeta) + \bar{B}J_1(\gamma \bar{\rho}_1 \zeta) \\ f_2 &= CJ_1(\gamma \rho_2 \zeta) + \bar{C}J_1(\gamma \bar{\rho}_2 \zeta) + DN_1(\gamma \rho_2 \zeta) + \bar{D}N_1(\gamma \bar{\rho}_2 \zeta) \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\gamma = \frac{n\pi a}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad \zeta = \frac{r}{a}$$

($\bar{\cdot}$) – zu (\cdot) konjugiert komplexe Variable bzw. Konstante,

B, C, D – Integrationskonstanten,

J_1, N_1 – Besselfunktion, Neumannfunktion erster Ordnung,

$$\rho_i^2 = \frac{1 - E_{ti}(\epsilon)/G_i}{2 - \sigma_i(\epsilon)/G_i} + \sqrt{-1} \left[\frac{2 + \sigma_i(\epsilon)/G_i}{2 - \sigma_i(\epsilon)/G_i} - \left(\frac{1 - E_{ti}(\epsilon)/G_i}{2 - \sigma_i(\epsilon)/G_i} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad i = 1, 2. \quad (3.10)$$

In $f_1(\zeta)$ wurden die singulären Anteile bereits weggelassen. Die Erfüllung der restlichen Randbedingungen (3.7) liefert die Eigenwertgleichung in Form einer sechsreihigen Determinante für die logarithmische Dehnung ϵ . Folgende Abkürzungen werden dabei eingeführt:

$$\varphi_i = 1 - \frac{E_{ti}(\epsilon)}{G_i}, \quad \kappa_i = \frac{\sigma_i(\epsilon)}{2G_i}, \quad \beta = \frac{G_2}{G_1},$$

$$\lambda = \frac{b}{a}, \quad \delta = \frac{1 - \kappa_2}{1 - \kappa_1}$$

$$a_i = \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{\varphi_i}{1 - \kappa_i} + \left(\frac{1 + \kappa_i}{1 - \kappa_i} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$b_i = \frac{1}{2a_i} \left\{ \frac{1 + \kappa_i}{1 - \kappa_i} - \frac{1}{4} \left(\frac{\varphi_i}{1 - \kappa_i} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\rho_i = a_i + \sqrt{-1} b_i$$

(die negative Wurzel und die konjugiert komplexen der Gl. (3.10) entfallen)

$$J_0 = J_0(\gamma \rho_1), \quad \tilde{J}_0 = J_0(\gamma \rho_2), \quad \tilde{J}_{0\lambda} = J_0(\gamma \rho_2 \lambda),$$

$$\tilde{N}_0 = N_0(\gamma \rho_2), \quad \tilde{N}_{0\lambda} = N_0(\gamma \rho_2 \lambda)$$

$$J_1 = J_1(\gamma \rho_1), \quad \tilde{J}_1 = J_1(\gamma \rho_2), \quad \tilde{J}_{1\lambda} = J_1(\gamma \rho_2 \lambda),$$

$$\tilde{N}_1 = N_1(\gamma \rho_2), \quad \tilde{N}_{1\lambda} = N_1(\gamma \rho_2 \lambda)$$

$$P_i = \gamma a_i [(1 - \kappa_i)(1 + a_i^2 - 3b_i^2) - \varphi_i], \quad R_i = 1 - a_i^2 + b_i^2$$

$$Q_i = \gamma b_i [(1 - \kappa_i)(1 + 3a_i^2 - b_i^2) - \varphi_i], \quad S_i = 2a_i b_i$$

$$(3.11)$$

$P_1 \operatorname{Re} J_0$	$P_1 \operatorname{Im} J_0$	$-\beta(P_2 \operatorname{Re} J_0)$	$-\beta(P_2 \operatorname{Im} J_0)$	$-\beta(P_2 \operatorname{Re} N_0)$	$-\beta(P_2 \operatorname{Im} N_0)$	= 0.
$-Q_1 \operatorname{Im} J_0$	$+Q_1 \operatorname{Re} J_0$	$-Q_2 \operatorname{Im} J_0$	$+Q_2 \operatorname{Re} J_0$	$-Q_2 \operatorname{Im} N_0$	$+Q_2 \operatorname{Re} N_0$	
$-2 \operatorname{Re} J_1$	$-2 \operatorname{Im} J_1$	$-2 \operatorname{Re} J_1$	$-2 \operatorname{Im} J_1$	$-2 \operatorname{Re} N_1$	$-2 \operatorname{Im} N_1$	
$R_1 \operatorname{Re} J_1$	$R_1 \operatorname{Im} J_1$	$-\beta \delta (R_2 \operatorname{Re} J_1)$	$-\beta \delta (R_2 \operatorname{Im} J_1)$	$-\beta \delta (R_2 \operatorname{Re} N_1)$	$-\beta \delta (R_2 \operatorname{Im} N_1)$	
$+S_1 \operatorname{Im} J_1$	$-S_1 \operatorname{Re} J_1$	$+S_2 \operatorname{Im} J_1$	$-S_2 \operatorname{Re} J_1$	$+S_2 \operatorname{Im} N_1$	$-S_2 \operatorname{Re} N_1$	
$-\operatorname{Re} J_1$	$-\operatorname{Im} J_1$	$\operatorname{Re} J_1$	$\operatorname{Im} J_1$	$\operatorname{Re} N_1$	$\operatorname{Im} N_1$	
$-a_1 \operatorname{Re} J_0$	$-a_1 \operatorname{Im} J_0$	$a_2 \operatorname{Re} J_0$	$a_2 \operatorname{Im} J_0$	$a_2 \operatorname{Re} N_0$	$a_2 \operatorname{Im} N_0$	
$+b_1 \operatorname{Im} J_0$	$-b_1 \operatorname{Re} J_0$	$-b_2 \operatorname{Im} J_0$	$+b_2 \operatorname{Re} J_0$	$-b_2 \operatorname{Im} N_0$	$+b_2 \operatorname{Re} N_0$	
0	0	$\lambda(P_2 \operatorname{Re} J_0 \lambda$	$\lambda(P_2 \operatorname{Im} J_0 \lambda$	$\lambda(P_2 \operatorname{Re} N_0 \lambda$	$\lambda(P_2 \operatorname{Im} N_0 \lambda$	
		$-Q_2 \operatorname{Im} J_0 \lambda)$	$+Q_2 \operatorname{Re} J_0 \lambda)$	$-Q_2 \operatorname{Im} N_0 \lambda)$	$+Q_2 \operatorname{Re} N_0 \lambda)$	
		$-2 \operatorname{Re} J_1 \lambda$	$-2 \operatorname{Im} J_1 \lambda$	$-2 \operatorname{Re} N_1 \lambda$	$-2 \operatorname{Im} N_1 \lambda$	
0	0	$R_2 \operatorname{Re} J_1 \lambda$	$R_2 \operatorname{Im} J_1 \lambda$	$R_2 \operatorname{Re} N_1 \lambda$	$R_2 \operatorname{Im} N_1 \lambda$	
		$+S_2 \operatorname{Im} J_1 \lambda$	$-S_2 \operatorname{Re} J_1 \lambda$	$+S_2 \operatorname{Im} N_1 \lambda$	$-S_2 \operatorname{Re} N_1 \lambda$	

(3.12)

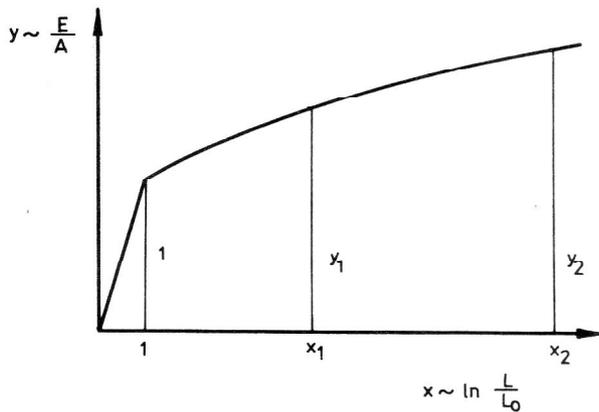


Bild 3

Zur Bestimmung der Verfestigungsparameter m, n

4. Numerische Ergebnisse

Zur Auswertung der Eigenwertgleichung (3.12) für die Axialdehnung ϵ wurden zwei verschiedenen idealisierte Spannungsdehnungsdiagramme [10] für die beiden Komponenten $i = 1, 2$ (Komponente 1 – Kern, Komponente 2 – Mantel) benutzt (vgl. Bild 1).

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_{yi}} = \frac{\sigma_i}{\sigma_{yi}}, \quad \sigma_{yi} = E_i \epsilon_{yi}, \quad 0 \leq \frac{\epsilon_i}{\epsilon_{yi}} \leq 1 \quad (4.1)$$

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_{yi}} = 1 - \frac{E_i}{E_{ti}} + \frac{E_i}{E_{ti}} \cdot \frac{\sigma_i}{\sigma_{yi}}$$

$$\text{oder} \quad 1 \leq \frac{\epsilon}{\epsilon_{yi}} \quad (4.2)$$

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_{yi}} = \frac{\sigma_i}{\sigma_{yi}} + m_1 \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_{yi}} \right)^{n_1} - m_1$$

Die Bestimmung der Parameter m, n erfolgte aus der Anpassung der theoretischen Kurve an zwei experimentelle Punkte (vgl. Bild 3) mittels der Gleichungen

$$(y_2^n - 1)(x_1 - y_1) - (y_1^n - 1)(x_2 - y_2) = 0$$

$$m = \frac{x_1 - y_1}{y_1^n - 1} \quad (4.3)$$

$$x = \frac{\sigma}{\epsilon_y}, \quad y = \frac{\sigma}{\sigma_y}$$

Das FORTRAN-Programm PR1 zur Ermittlung von m, n für zwei Komponenten [11] berechnet auch die Dehnungswerte ϵ_0 , bei denen die Kraft in den Zugstäben aus

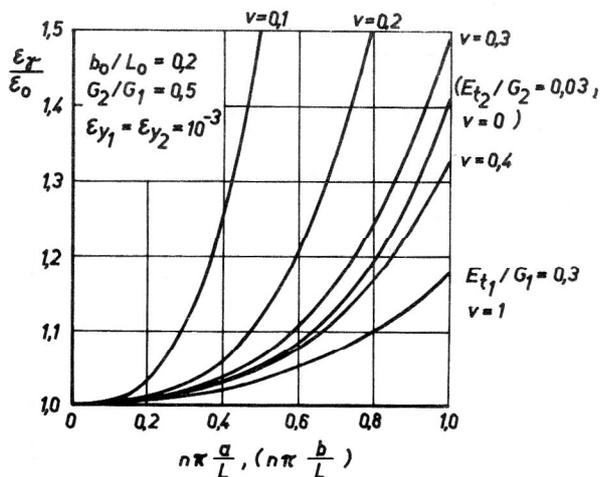


Bild 4
Kritische Dehnungswerte für lineare Verfestigung

Komponentenmaterial und im Verbundzugstab maximal ist. Letzteres entspricht der Gl. (1.5) oder Gl. (3.12) mit $\gamma = 0$.

Zur Auswertung der Eigenwertgleichung (3.12) im Falle $\gamma > 0$ diene das FORTRAN-Programm BIFU2 [12]. Bei Vorgabe der Materialparameter und Geometrieausgangswerte berechnet dieses Programm für die jeweilige Halbwellenzahl n (s. Gl. (3.8)) die komplexen Zylinderfunktionen (3.11) [13], [14], die Elemente der Matrix (3.12) und unter Anwendung des Gaußschen Algorithmus mit Spalten- und Zeilenvertauschung den Wert der Determinante, der mittels Müller-Iteration [15] zu Null iteriert wird.

In Bild 4 sind für ein theoretisches Beispiel die kritischen Dehnungswerte ϵ_γ , bezogen auf die Dehnungswerte beim Kraftmaximum ϵ_0 , aufgetragen, bei denen von der bezüglich der Verzerrungsgeschwindigkeit homogenen Grundlösung (vgl. Gl. (3.8)) periodische Lösungen abzweigen. Es wurden konstante Tangentenmoduln berücksichtigt.

Die Darstellung erfolgte für verschiedene Volumenanteile der Komponente 1 über dem Verhältnis von halbem Kernradius zu Wellenlänge in der aktuellen Konfiguration. Die Kurven $v = 0$, $v = 1$ stimmen mit den aus den kritischen Spannungswerten nach Tabelle 1 in [1] berechneten Dehnungen überein. Die Kurve $v = 0$ mußte wegen $a = 0$ über $n\pi b/L$ aufgetragen werden und fällt deshalb aus der Kurvenschar über $n\pi a/L$ heraus. Ihre Berechnung erfolgte mit $\lambda = 1$ in Gl. (3.12) für einen Kern aus Mantelmaterial (linke obere $2 \cdot 2$ -Untermatrix (3.12)).

Für $\beta = 0$ in Gl. (3.12) kann die Determinante in das Produkt zweier Determinanten der linken oberen $2 \cdot 2$ -Untermatrix und der rechten unteren $4 \cdot 4$ -Untermatrix sowie einer weiteren Determinante zerlegt werden. Erstere liefert die Eigenwerte des Kerns, die $4 \cdot 4$ -Determinante die des Mantels, jedoch mit starrem Innenrand. Ist der Mantelaußenradius von der Größenordnung der Wellenlänge, so wird die Wirkung des starren Innenrandes den gesamten Mantelbereich

betreffen und den Manteleigenwert unterdrücken. Die Vergrößerung des Mantelaußenradius über den Einflußbereich des starren Innenrandes hinaus führt andererseits zu einer Anhebung der Eigenwerte des freien Mantels (für $v = 0$ in Bild 4 zu sehen), so daß die Eigenwerte des Mantels mit starrem Innenrand unterdrückt bleiben.

Wenn dagegen in Gl. (3.12) $1/\beta = 0$ gesetzt wird, so entsteht nach Vertauschung der ersten beiden Zeilen mit der dritten und vierten eine linke obere $2 \cdot 2$ -Untermatrix für den Kern mit starrem Außenrand, eine rechte untere $4 \cdot 4$ -Untermatrix für den Mantel mit freiem Innenrand und eine weitere rechte obere $2 \cdot 4$ -Untermatrix. Im Programm BIFU2 ist allerdings $1/\beta = 0$ nur näherungsweise möglich.

Für $\beta \ll 1$ und $v \ll 1$ sollte der Ausdruck

$$K = \frac{G_2}{G_1} \cdot \frac{1-v}{v} \quad (4.4)$$

die Größe des Verbundeigenwertes charakterisieren¹⁾.

Bei $K \gg 1$ wird der Manteleigenwert erwartet und bei $K \ll 1$ der Kerneigenwert.

Die am Beispiel $n = 1$, $b_0/L_0 = 1$, $G_2/G_1 = 10^{-6}$, $E_{t1}/G_1 = E_{t2}/G_2 = 10^{-2}$ und $\epsilon_{y1} = \epsilon_{y2} = 10^{-3}$ für verschiedene Volumenanteile v berechneten kritischen Dehnungswerte ϵ_γ bestätigen diese Aussage (vgl. Tabelle 1).

Tabelle 1

Vergleich zwischen kritischen Dehnungswerten ϵ_γ von Kern, Mantel und Verbund für $n = 1$, $G_2/G_1 = 10^{-6}$, $E_{t1}/G_1 = E_{t2}/G_2 = 10^{-2}$, $\epsilon_{y1} = \epsilon_{y2} = 10^{-3}$

	$\frac{a_0}{L_0}$	$\frac{b_0}{a_0}$	$\frac{b_0}{L_0}$	v	$\frac{G_2}{G_1} \frac{1-v}{v}$	ϵ_γ
Kern	10^{-2}	1	10^{-2}	1	0	0,7010
Verbund	10^{-1}	10	1	10^{-2}	10^{-4}	0,7027
	10^{-2}	10^2	1	10^{-4}	10^{-2}	0,7080
	10^{-3}	10^3	1	10^{-6}	1	0,8769
	10^{-4}	10^4	1	10^{-8}	10^2	0,9574
	10^{-5}	10^5	1	10^{-10}	10^4	0,9587
Mantel	0	∞	1	0	∞	0,9588

Bild 5 gibt an einem praktischen Beispiel für verschiedene Wellenzahlen die kritischen Dehnungswerte auf den Spannungsdehnungskurven der Verbunde und Komponenten wieder. Die Spannungsdehnungskennlinien der Komponenten gem. Gl. (4.1), (4.2)₂ wurden nach [11] an die Kennlinien realer Materialien (Maragingstahlkern, Kupfermantel) angepaßt (vgl. Tabelle 2) und die Verbundkennlinien sowie die kritischen Dehnungswerte für $n = 0$ nach [11] und für $n > 0$ nach [12] berechnet. Die Fließspannungsverläufe der Komponenten für $\epsilon > \epsilon_0$ folgten dabei aus Zugversuchen an Proben mit verschiedenen Kaltumformgraden [16].

Aus Bild 5 ist ersichtlich, daß die kritischen Dehnungswerte für alle Volumenanteile bei kleinerem n sehr dicht

1) Für diesen Hinweis sei Herrn Dr. H.-J. Weiß gedankt.

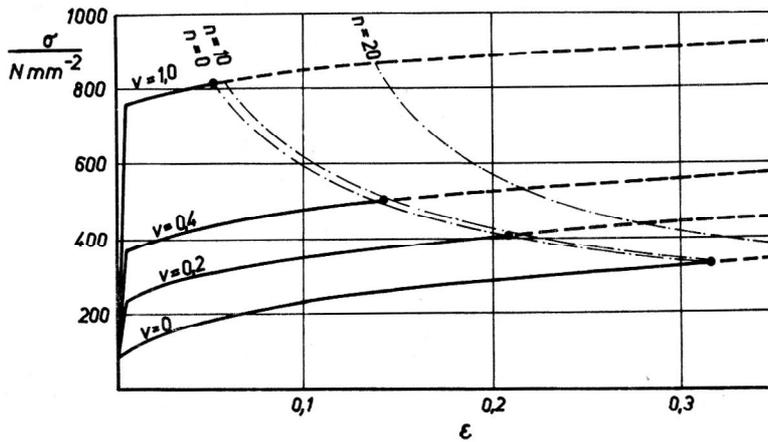


Bild 5
Spannungsdehnungsdiagramme sowie kritische Dehnungen und Spannungen für nichtlineare Verfestigung, $b_0/L_0 = 0,02$, Material nach Tabelle 2

bezüglich n liegen. In allen berechneten Beispielen sind die zu $n = 0$ gehörenden Dehnungswerte (und damit na-

Tabelle 2
-Approximierte Materialkennwerte nach Gl. (4.1), (4.2)

Komponente	E_i/Nmm^{-2}	ϵ_{yi}	m_i	n_i
1	163 000	0,004652	7,539	12,29
2	120 000	0,000708	6,483	3,145

türlich auch die Spannungen) kleiner als die für größere n . Es wurde in den obigen Beispielen auch kein Abfall der kritischen Dehnung bei steigendem n beobachtet, d. h. es liegt dieselbe Reihenfolge der Eigenwerte vor wie beim freien Stab. Wie weiterhin die Eigenfunktionen (3.8) zeigen, ist die axiale Ortsabhängigkeit der Verformungsgeschwindigkeit für den Verbundstab und den freien Stab die gleiche. Die Theorie liefert also innerhalb der hier benutzten Voraussetzungen gegenüber dem freien Stab [1] keine qualitativ neuen Effekte.

LITERATUR

- [1] Hutchinson, J.W., Miles, J.P.: Bifurcation analysis of the onset of necking in an elastic-plastic cylinder under uniaxial tension, *J. Mech. Phys. Solids* 22, 61 – 71 (1974).
- [2] Miles, J.P.: Bifurcation in plastic flow under uniaxial tension, *J. Mech. Phys. Solids* 19, 89 – 102 (1971).
- [3] Hill, R.: Some basic principles in the mechanics of solids without a natural time, *J. Mech. Phys. Solids* 7, 209 – 225 (1959).
- [4] Lee, E.H.: Elastic-plastic deformation at finite strains, *J. Appl. Mech.* 36, 1 – 6 (1969).
- [5] Spencer, A.J.M., Ferrier, J.E.: Some solutions for a class of plastic-elastic solids, enthalten in: Sawczuk, A., *Foundations of plasticity*, Leyden 1973.
- [6] Hill, R., *The mathematical theory of plasticity*, Oxford 1950.
- [7] Eringen, A.C.: *Nonlinear theory of continuous media*, New York 1962.
- [8] Bruhns, O., Thermann, K.: Stabilitätsprobleme elastisch-plastischer Kontinua, *ZAMM*, T 73 – T 75 (1974).
- [9] Cheng, S.Y., Ariaratnam, S.T., Dubey, R.N.: Axisymmetric bifurcation in an elastic-plastic cylinder under axial load and lateral hydrostatic pressure, *Quart. Appl. Math.* 29, 41 – 51 (1971).
- [10] Argyris, J.H., Chan, A.S.L.: Static and dynamic elasto-plastic analysis by the method of finite elements in space and time, enthalten in: Sawczuk, A., *Foundations of plasticity*, Leyden 1973.
- [11] Förster, W.: FORTRAN-Programm PR1, Ingenieurpraktikumsarbeit, ZFW Dresden, 1979.
- [12] Balke, H.: FORTRAN-Programm BIFU 2, ZFW Dresden, 1979.
- [13] Ryshik, I.M.; Gradstein, I.S.: *Tafeln*, Berlin 1957.
- [14] Völlmar, S.: FORTRAN-Programm für J_0, J_1, N_0, N_1 , ZFW Dresden, 1979.
- [15] FORTRAN-Programmbibliothek, ZFW Dresden, 1978.
- [16] Krumphold, R.: ZFW-interne Mitteilung, Dresden 1979.

Anschrift des Verfassers:
Dr.-Ing. Herbert Balke
Zentralinstitut für Festkörperphysik und Werkstoffforschung der Akademie der Wissenschaften der DDR,
8027 Dresden, Helmholtzstr. 20