

Nichtlinear-viskoelastisches Deformationsverhalten von PVC im ebenen Spannungszustand

Helge Bergander

Aus vorliegenden Versuchen [4] an dünnwandigen Rohren unter Innendruck und Längskraft wurden die Parameter eines isotropen viskoelastischen Deformationsgesetzes bestimmt. Der Einfluß der 2. Invarianten des Deviators wird als wesentlich für die Gestaltänderung betrachtet, der Einfluß der 1. Invarianten des Spannungstensors ist als korrigierender Faktor jedoch nicht vernachlässigbar. Die Approximationsqualität des Modells mit Berücksichtigung des Einflusses der 1. Invarianten ist bedeutend besser als die des Standardgesetzes, bei dem nur die 2. Invariante des Deviators die Größe der Nichtlinearität bestimmt.

1. Einleitung

Die mathematische Formulierung des Zusammenhanges zwischen Spannungen und Verzerrungen ist im wesentlichen die Beschreibung experimenteller Daten. Das Ziel besteht dabei darin, möglichst allgemeingültige Zusammenhänge sowohl in Hinblick auf den Spannungszustand als auch seinen zeitlichen Ablauf zu formulieren. Daher wird von einem *Deformationsgesetz* (oder oft nur einfach von einem *Stoffgesetz*) gesprochen. Aber diese Bezeichnung darf nicht darüber hinwegtäuschen, daß dieses Gesetz nur im Rahmen des experimentell belegten Bereiches gilt.

Allgemeine physikalische Gesetze, insbesondere die der Thermodynamik, müssen von den Deformationsgesetzen erfüllt sein. Aber nach deren Erfüllung bleibt noch ein weiter Spielraum, den nur die Anpassung an experimentelle Daten so einengt, daß diese Gesetze für Berechnungsprobleme bei Bauteilen Anwendung finden können

Bei der Anpassung an experimentelle Daten hat sich bewährt, zwei Grundprobleme – Einfluß der Art des Spannungszustandes und Einfluß der Belastungsreihenfolge – zumindest bei der ersten Annäherung an das Verhalten noch nicht umfassend untersuchter Werkstoffe zu trennen. Mit der vorliegenden Arbeit soll ein Beitrag zum ersten Grundproblem – dem Einfluß der Art des Spannungszustandes auf das Kriechverhalten isotroper Thermoplaste – geleistet werden.

Isotrope Thermoplaste – gleichwohl, ob es sich um teilkristalline wie PE und PP oder amorphe wie z. B. PVC und PMMA handelt – sind gekennzeichnet durch eine stark ausgeprägte Nichtlinearität insbesondere des Kriechanteils. Die einfachste Beschreibung des nichtlinearen Verhaltens bei Isotropie ist eine Erweiterung des linearen Ansatzes um eine Einflußfunktion, die nur von der zweiten Invarianten des Deviators abhängt.

Eine solche Erweiterung wurde von vielen Autoren bisher angewendet. Sie liegt besonders nahe, da sie übereinstimmt mit vielen anderen Deformationsgesetzen von Stoffen mit nichtlinearem und inelastischem Materialverhalten. Dazu gehören z. B. plastische Stoffe mit der Huber- v. Mises-Hencky-Fließbedingung oder die Metallkriechgesetze von Odqvist. In [1] wird eine derartige For-

mulierung als Standardgesetz vorgeschlagen, und die Vorzüge eines solchen Standards werden erläutert.

Aber die Anwendung einer solchen einfachen Formulierung der Nichtlinearität ist auf eine nicht zu große Abweichung vom Linearen beschränkt. Experimente zeigen bei größerer Nichtlinearität vor allem folgende Verhaltensweisen, die mit dem Standardgesetz nicht erklärbar sind:

Ist der Bezugzustand der einachsige Zug, so sind die wirklich auftretenden Schubverzerrungen kleiner und die Dehnungen unter zweiachsigem Gleichzug größer als durch die mathematische Formulierung vorausgesagt.

Der Druckversuch zeigt eine geringere Kriechneigung als der Zugversuch, während das Standardgesetz nur gleichgroßes Kriechen bei Zug und Druck zuläßt.

Eine Analyse von Versuchen aus der Literatur [2], [3] führte zu einer Erweiterung des Standardgesetzes, indem nun auch der Einfluß der 1. Invarianten des Spannungstensors (also des hydrostatischen Spannungszustandes oder der Mittelspannung) auf die Gestaltänderung berücksichtigt wurde. Die Untersuchung von Zug und Torsion aus der sowjetischen und amerikanischen Arbeiten an PVC, PMMA und PUR sowie von Zug und Druck aus der DDR- bzw. USA-Literatur für PVC und PE liefen die Aufstellung folgender Hypothesen zu:

Die Zunahme der 1. Invarianten des Spannungstensors hat auf das Kriechen einen qualitativ ähnlichen Einfluß wie die der 2. Invarianten des Spannungstensors.

Beim einachsigen Zug werden 10 bis 30 % des nichtlinearen Anteils der Dehnung durch die 1. Invariante erzeugt.

Negative 1. Invarianten (negative Mittelspannungen) wirken dem Einfluß der Vergleichsspannung im wesentlichen entgegen.

Diese Aussagen blieben Hypothesen, weil bislang kein Experiment zugänglich war, an dem alle Effekte gleichzeitig überprüft werden konnten. Die Rohrversuche erstreckten sich ausschließlich auf den Bereich zwischen reinem Zug und einfachen Schub, die Druckversuche fanden an anderen Probenformen statt als die zum Vergleich genutzten Zugversuche.

Nunmehr liegt jedoch eine Untersuchung vor, bei dem an einheitlichen Probenformen in einer Versuchsanlage mit hoher Meßgenauigkeit und präziser Steuerbarkeit der gesamte Bereich zwischen einfachen Schub über Zug bis zum ebenen Gleichzug sowie unter Druck ausgemessen wurde [4]. Dabei wurde PVC – S 6858 H der DDR-Produktion verwendet, und die Proben waren Spezialanfertigungen des Kombinats VEB Chemische Werke Buna. Die Analyse dieser Versuche bestätigt oben genannte Hypothesen für PVC vollständig. Im folgenden wird die theoretische Analyse für das erweiterte Deformationsgesetz vorgestellt.

2. Experimentelle Ergebnisse

Die Versuche wurden an Rohrproben mit 63 mm Außendurchmesser, 3 mm Wandstärke und 360 mm Länge des homogenen Bereiches durchgeführt. Es erfolgten ausschließlich Kriechversuche unter konstanter Last. Die Belastung wurde durch Innendruck und überlagerte Zug- oder Drucklängskräfte aufgebracht. Untersucht wurden vier verschiedene Belastungszustände. Wird das Koordinatensystem so orientiert, daß x_1 auf dem Rohrmantel in Achsrichtung, x_2 in Umfangsrichtung x_3 radial nach außen verläuft, so entsprachen die vier Lastzustände folgenden Spannungszuständen:

$$\begin{aligned} \text{Typ S (Schub):} & \quad \sigma_{11} = -\sigma, \quad \sigma_{22} = \sigma; \\ \text{Typ Z (Zug):} & \quad \sigma_{11} = \sigma, \quad \sigma_{22} = 0; \\ \text{Typ D (Druck):} & \quad \sigma_{11} = -\sigma, \quad \sigma_{22} = 0; \\ \text{Typ G (Gleichzug):} & \quad \sigma_{11} = \sigma, \quad \sigma_{22} = \sigma. \end{aligned}$$

Infolge der Dünnwandigkeit ist σ_{33} vernachlässigbar und der Spannungszustand fast homogen. Schubspannungen

treten nicht auf. Die Versuchsdaten sind in [4] und zugeordneten Forschungsberichten ausgewiesen. Zur präzisen Analyse war es notwendig, noch Alterungseffekte zu eliminieren. Die auf ein- und denselben Bezugszustand (15 Monate nach der Herstellung) gemäß [5] umgerechneten Daten sind in Tabelle 1 zusammengestellt. Jede Kriechkurve entspricht dem Mittel aus meistens drei Einzelversuchen unter jeweils gleichem Spannungszustand [4], [5].

3. Mittlere Kriechfunktion und ausgeglichene Kriechdehnung

Jede Kriechkurve gemäß Tabelle 1 läßt sich in folgender Weise in zwei Anteile zerlegen

$$\epsilon(t) = \epsilon^E + \bar{\epsilon}^K(t). \quad (1)$$

Hierin ist ϵ^E der zeitunabhängige elastische Anteil und $\bar{\epsilon}^K(t)$ der Kriechanteil, der sich erst im Laufe der Zeit, die vom Moment der Belastung an gezählt wird, herausbildet.

Die elastische Dehnung unterscheidet sich nicht von dem Wert des Kriechversuches 30 s nach vollständiger Lastaufbringung [4] S. 78. Zur Vereinfachung wird hier $t = 10^{-2} \text{ h} = 36 \text{ s}$ für die elastische Dehnung verwendet:

$$\epsilon^E = \epsilon(10^{-2} \text{ h}). \quad (2)$$

Damit lassen sich dann auch die Kriechdehnungen eindeutig aus den Meßdaten bestimmen

$$\bar{\epsilon}^K(t) = \epsilon(t) - \epsilon(10^{-2} \text{ h}). \quad (3)$$

Tabelle 1
Meßwerte, mittlere dimensionale Kriechfunktion $J(t)$ aller Versuche und damit bestimmte ausgeglichene Kriechdehnungen
 $\epsilon^K = \epsilon(10^2 \text{ h}) - \epsilon^E$

Typ	σ [N/mm ²]	ϵ^E					ϵ^K
		$t = 10^{-2} \text{ h}$	10^{-1} h	10^0 h	10^1 h	10^2 h	
$\epsilon_S = \frac{1}{2}(-\epsilon_{11} + \epsilon_{22})$ in %							
S	9.82	0.410	0.421	0.431	0.449	0.488	0.080
	14.88	0.684	0.701	0.743	0.833	—	0.312
	17.10	0.792	0.818	0.876	1.016	1.301	0.499
	19.60	0.956	1.043	1.228	1.586	—	1.350*
$\epsilon_Z = \epsilon_{11}$ in %							
Z	9.75	0.291	0.297	0.310	0.325	—	0.078
	14.65	0.469	0.476	0.486	0.509	0.582	0.108
	19.60	0.636	0.647	0.667	0.726	0.882	0.234
	24.46	0.815	0.846	0.896	1.011	—	0.422
	29.61	1.074	1.142	1.262	1.503	1.847	0.805
$\epsilon_D = -\epsilon_{11}$ in %							
D	9.82	0.272	0.272	0.278	0.298	—	0.051
	14.74	0.421	0.426	0.436	0.449	—	0.062
	19.65	0.587	0.599	0.618	0.654	—	0.145
	24.59	0.784	0.792	0.824	0.895	—	0.229
	29.56	0.945	0.987	1.056	1.208	—	0.559
$\epsilon_G = \frac{1}{2}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22})$ in %							
G	9.93	0.210	0.211	0.213	0.218	0.228	0.018
	14.77	0.320	0.321	0.326	0.328	0.362	0.037
	22.05	0.501	0.516	0.541	0.589	0.717	0.210
	29.42	0.719	0.790	0.952	1.209	1.823	1.119
$J(t) \pm \Delta J(t)$							
	0	0.068 ± 0.015	0.199 ± 0.032	0.467 ± 0.046	1.000 ± 0.068		

*) Diese Meßreihe bleibt bei der theoretischen Auswertung unberücksichtigt, vgl. Abschnitt 5.

Nun wird die Annahme getroffen, daß sich die Kriechdehnungen unabhängig vom Spannungszustand nach einer einzigen Kriechfunktion $J(t)$ entwickeln:

$$\bar{\epsilon}^K(t) \approx J(t) \epsilon^K. \quad (4)$$

Damit ist ϵ^K ein zeitunabhängiger Repräsentant aller Kriechdehnungswerte. Die Festlegung

$$J(10^2 \text{ h}) = 1 \quad (5)$$

hat nur normierenden Charakter und definiert die genaue Aufteilung zu multiplizierenden Größen in (4). Natürlich erfüllen die Meßwerte die Gleichung (4) nur näherungsweise. Daher werden $J(t)$ durch eine Mittelwertbildung und die ϵ^K durch Approximation bestimmt. Um die Mittelwertbildung für jeden Zeitpunkt t , für den Meßwert laut Tabelle 1 vorliegen, vornehmen zu können, werden alle Kriechdehnungen $\bar{\epsilon}^K(t_i)$ auf eine einheitliche Amplitude gebracht. Da die ϵ^K zunächst noch nicht bekannt sind, wird diese Amplitude aus der Stützstellensumme (als grobe Näherung für den Flächeninhalt der Kriechkurve) bestimmt:

$$p_j = \frac{\sum_{i=1}^N \bar{\epsilon}_j^K(t_i)}{\sum_{i=1}^N \bar{\epsilon}_1^K(t_i)}. \quad (6)$$

Hier ist j die Numerierung aller J Kriechkurven, mit 1 wird eine beliebige Bezugskriechkurve (im konkreten Fall die Zugkriechkurve bei $\sigma = 29,61 \text{ N/mm}^2$) ausgewählt. N erstreckt sich sowohl im Zähler als auch im Nenner auf die durch j bestimmte Anzahl vorliegender Meßwerte, ist also je nach Kriechkurve 3 oder 4, vgl. Tabelle 1.

Mit diesem Amplitudenfaktor p_j nach (6) gilt wegen (4)

$$\bar{\epsilon}_j^K(t_i) \approx J(t_i) \epsilon_j^K \approx p_j \bar{\epsilon}_1^K(t_i) \approx p_j J(t_i) \epsilon_o^K \quad (7)$$

oder

$$\tilde{J}(t_i) = J(t_i) \epsilon_1^K \approx \frac{1}{p_j} \bar{\epsilon}_j^K(t_i). \quad (8)$$

Für jedes t_i kann nun als Mittelwert aller Kriechkurven

$$\tilde{J}(t_i) = \sum_{j=1}^J \frac{1}{p_j} \bar{\epsilon}_j^K(t_i) \quad (9)$$

und als Streuung der quadratische Mittelwert

$$\Delta \tilde{J}(t_i) = \sqrt{\frac{1}{J-1} \sum_{j=1}^J \left(\tilde{J}(t_i) - \frac{1}{p_j} \bar{\epsilon}_j^K(t_i) \right)^2} \quad (10)$$

berechnet werden. Um den Einfluß der Streuung einzelner Proben zu bewerten, wurden (9) und (10) zweimal ausgewertet. Bei der ersten Berechnung wurden alle 18 Kriechkurven laut Tabelle 1 berücksichtigt. Außerhalb des Intervalls $\tilde{J}(t_i) \pm \Delta \tilde{J}(t_i)$ liegende Meßwerte

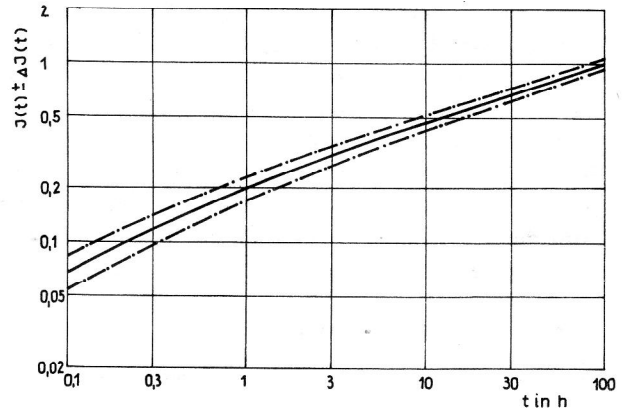


Bild 1
Mittlere dimensionslose Kriechfunktion $J(t)$

$\frac{1}{p_j} \bar{\epsilon}_j^K(t_i)$ wurden als grobe Streuungen bewertet. Kriech-

kurven mit 50 % oder mehr Meßwerten grober Streuung wurden dann aus der Berechnung des Mittelwertes herausgenommen. Das traf ausnahmslos auf die relativ ungenaueren Kurven bei kleinen Spannungen zu:

Typ S: $\sigma = 9,82 \text{ N/mm}^2$

Typ D: $\sigma = 9,82 \text{ N/mm}^2$

Typ G: $\sigma = 14,77 \text{ N/mm}^2$

Die Wiederholung der Berechnung ergab dann die endgültigen Mittelwerte und Streuungen, wobei die Mittelwerte sich kaum noch änderten. Mit (5) ergab sich aus (9) und (10)

$$J(t_i) \pm \Delta J(t_i) = \frac{\tilde{J}(t_i)}{\tilde{J}(10^2 \text{ h})} \pm \frac{\Delta \tilde{J}(t_i)}{\tilde{J}(10^2 \text{ h})}. \quad (11)$$

Die Ergebnisse sind in Tabelle 1 mit angegeben Bild 1 zeigt den Verlauf von $J(t)$. Nach Vorliegen der mittleren Kriechfunktion wurden nun alle Kriechkurven durch (4) nach der Methode der kleinsten Quadrate approximiert

$$Q = \sum_{i=1}^N (\bar{\epsilon}_j^K(t_i) - J(t_i) \epsilon_j^K)^2 \rightarrow \text{Min}. \quad (12)$$

Damit sind die ϵ^K für alle Kriechkurven j bestimmt. Die Zahlenwerte sind in Tabelle 1 ebenfalls angeführt.

Diese ϵ^K stellen also die Kriechdehnungswerte gemäß Ansatz (4) für $t = 10^2 \text{ h}$ dar. Für die Kurven, die bis $t = 10^2 \text{ h}$ ausgemessen wurden, stimmen sie in guter Näherung mit dem tatsächlichen Meßwert überein. Sie sind jedoch als genauer zu bewerten, da sie alle Kriechdehnwerte der Kriechkurve als Mittelwert repräsentieren. Für die früher abgebrochenen Versuche sind die ϵ^K Extrapolationen, die aber auch eine hohe Genauigkeit aufweisen, denn jede Analyse von ϵ^K bei $t = 10^2 \text{ h}$ ist gemäß (4) auch mit der für beliebige frühere Zeitpunkte völlig gleichwertig. Bild 2 zeigt den Vergleich zwischen den Meßwerten und den ausgeglichenen Kurven (4) für je eine Kriechkurve der 4 Spannungszustandstypen. Es

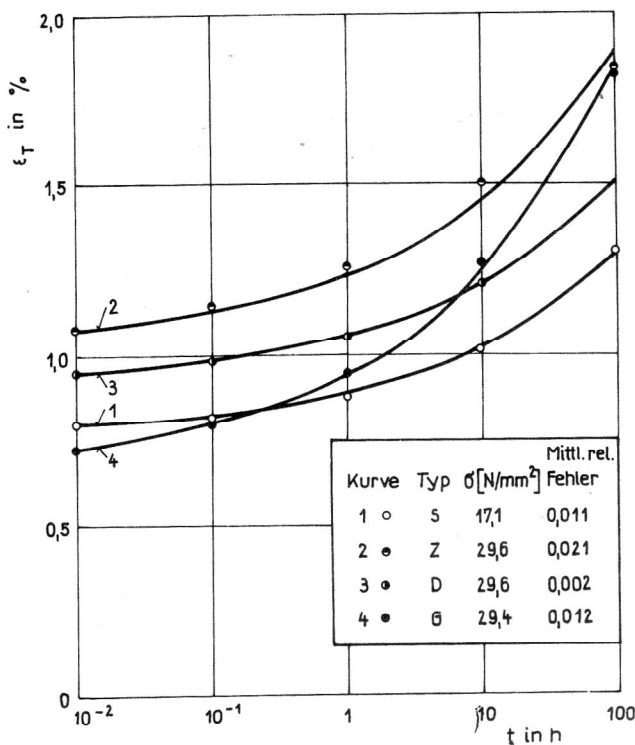


Bild 2
Auswahl einiger ausgeglichener Kriechkurven nach dem Ansatz $\epsilon(t) = \epsilon^E + J(t)\epsilon^K$ (Kurven —) und Vergleich mit den nichtausgegliehenen Meßwerten (o)

wurde immer eine Kurve mit hohem Kriechanteil und damit großem relativen Fehler ausgewählt. Die mittleren (quadratischen) Fehler weisen aus, daß der Ansatz (4) gerechtfertigt ist. Die Erfahrung, daß Ansätze des Typs (4) keine Einschränkung der Versuchsbeschreibung nichtlinearer viskoelastischer Stoffe darstellen, findet sich häufig auch in der Literatur. Auf eine sehr umfassende Zusammenstellung sei als Beispiel verwiesen [6] S. 190 – 198.

4. Das Deformationsgesetz des isotropen nicht-linear-viskoelastischen Stoffes

Der phänomenologischen Beschreibung (4) für die Kriechkurven (1) angepaßt ist das allgemeine Gesetz

$$\epsilon_{ij}(t) = \Gamma_{ij}(\sigma_{kl}(t)) + \int_{-\infty}^t J(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \Phi_{ij}(\sigma_{kl}(\tau)) d\tau. \quad (13)$$

Hierin sind die ϵ_{ij} die Verzerrungen, σ_{ij} die Spannungen, $\Gamma_{ij}(\sigma_{kl})$ und $\Phi_{ij}(\sigma_{kl})$ Tensorfunktionen und $J(t)$ die mittlere Kriechfunktion gemäß (4). Eine Begründung dafür, daß der Spezialfall (13) („Haupttheorie des Kriechens“ nach [7]) der allgemeinen Mehrfachintegraloperator – Theorie der Viskoelastizität eine ausreichende Approximation darstellt, wird in [2] ausführlich gegeben. Im Rahmen der Zielstellung dieser Arbeit ist

nur wesentlich, daß im Falle des Kriechens ($\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 = \text{konst. für } t > 0$) aus (13)

$$\epsilon_{ij}(t) = \Gamma_{ij}(\sigma_{kl}^0) + J(t)\Phi_{ij}(\sigma_{kl}^0) = \epsilon_{ij}^E + J(t)\epsilon_{ij}^K \quad (14)$$

folgt, so daß nur zwei Tensorfunktionen für den elastischen Anteil

$$\epsilon_{ij}^E = \Gamma_{ij}(\sigma_{kl}^0) \quad (15)$$

und den Kriechanteil zur Bezugszeit $J(t_B) = 1$

$$\epsilon_{ij}^K = \Phi_{ij}(\sigma_{kl}^0) \quad (16)$$

noch zu bestimmen sind. Da im weiteren ausschließlich Kriechversuche untersucht werden, wird der Index 0 von σ_{kl}^0 weggelassen. Für isotrope Tensorfunktionen gilt (vgl. [8]):

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij}^E = \Gamma_{ij}(\sigma_{kl}) = & A_E(s, I_2^s, I_3^s) \delta_{ij} + B_E(s, I_2^s, I_3^s) \sigma_{ij} + \\ & + C_E(s, I_2^s, I_3^s) \sigma_{ik} \sigma_{kj} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij}^K = \Phi_{ij}(\sigma_{kl}) = & A_K(s, I_2^s, I_3^s) \delta_{ij} + B_K(s, I_2^s, I_3^s) \sigma_{ij} + \\ & + C_K(s, I_2^s, I_3^s) \sigma_{ik} \sigma_{kj}. \end{aligned} \quad (18)$$

Die drei skalaren Faktoren sind Funktionen der 3 Grundinvarianten des Spannungstensors, die hier auf die Deviator-Kugeltensorzerlegung bezogen wurden

$$\sigma_{ij} = s_{ij} + \frac{1}{3} s \delta_{ij} \quad (19)$$

mit

$$s = \sigma_{kk}. \quad (20)$$

Die 2. und 3. Invariante des Deviators sind dann durch

$$I_2^s = -\frac{1}{2} s_{kl} s_{lk} \quad (21.1)$$

$$I_3^s = \det(s_{kl}) \quad (21.2)$$

definiert. Für isotrope Stoffe ist die zu (19) analoge Zerlegung des Verzerrungstensors zweckmäßig

$$\epsilon_{ij} = e_{ij} + \frac{1}{3} e \delta_{ij}, \quad e = \epsilon_{kk}. \quad (22)$$

Damit folgt aus (17)

$$e^E = \bar{A}_E(s, I_2^s, I_3^s). \quad (22.1)$$

$$e_{ij}^E = \bar{B}_E(s, I_2^s, I_3^s) s_{ij} + \bar{C}_E(s, I_2^s, I_3^s) (s_{ik} s_{kj} + \frac{2}{3} I_2^s \delta_{ij}). \quad (22.2)$$

Ganz analog läßt sich (18) umformen (ausführlich z. B. in [8] S. 257, [9]).

Da für den elastischen Anteil die spezifische Formänderungsarbeit unabhängig vom Verformungsweg sein muß,

folgen die skalaren Funktionen aus einem übergeordneten Potential $P_E(s, I_2^s, I_3^s)$

$$e^E = 3 \frac{\partial P_E}{\partial s} \quad (22.1)$$

$$e_{ij}^E = - \frac{\partial P_E}{\partial I_2^s} s_{ij} + \frac{\partial P_E}{\partial I_3^s} (s_{ik} s_{kj} + \frac{2}{3} I_2^s \delta_{ij}) \quad (22.2)$$

Für den Kriechanteil ist eine ähnliche Aussage möglich, allerdings ist der Zugang hier etwas komplizierter und nicht ohne Festlegungen zum Zustandsbegriff zu vollziehen [10]. Wird $J(t)$ durch eine Exponentialreihe

$$J(t) = J_0 \frac{t}{T_0} + \sum_{n=1}^N J_n (1 - e^{-\frac{t}{T_n}}) \quad (23)$$

approximiert, so geht (13) in einen Differentialoperator mit internen Zustandsvariablen über [2]. Balke [10] hat dieses Deformationsgesetz im Falle einer speziellen Funktion $\Phi(\sigma)$ einer thermodynamischen Analyse unterworfen. Wird die freie Energie pro Volumeneinheit als Funktion der Zustandsvariablen angesetzt, so folgt aus der Dissipationsgleichung auf dem gleichen Weg, wie er in [10] gewiesen wird, daß auch für (18) die durch eine übergeordnete Potentialfunktion $P_K(s, I_2^s, I_3^s)$ gültigen Einschränkungen gelten müssen:

$$e^K = 3 \frac{\partial P_K}{\partial s} \quad (24.1)$$

$$e_{ij}^K = - \frac{\partial P_K}{\partial I_2^s} s_{ij} + \frac{\partial P_K}{\partial I_3^s} (s_{ik} s_{kj} + \frac{2}{3} I_2^s \delta_{ij}) \quad (24.2)$$

Der einfachste Ansatz für nichtlineares Verhalten folgt aus (22) und (24) unter der Annahme, daß das Volumen infolge Kriechen konstant bleibt:

$$P_E = P_{1E}(I_2^s) + P_{2E}(s) \quad (25.1)$$

$$P_K = P_{1K}(I_2^s) \quad (25.2)$$

Zusätzlich mit der unbedeutenden Einschränkung auf linear-elastische Volumenänderung ($P_{2E} = a s^2$) entspricht der Ansatz (25) dem Standardgesetz [1]. Die Modifikation zum Einfluß der Mittelspannung wurde in [2], [3] vorgestellt. Die modifizierten Potentiale lauten (A steht für E und K):

$$P_{1A}(I_2^s, s) = \frac{\gamma_A}{3G} \int_0^{\sigma_V} f_A(x, \sigma_M) x dx \quad (26)$$

$$P_{2E}(s) = \frac{1}{18K} s^2 \quad (27)$$

Hierin ist σ_V die I_2^s zugeordnete Vergleichsspannung

$$\sigma_V = \sqrt{-3 I_2^s} = \sqrt{\frac{3}{2} s_{kl} s_{lk}} \quad (28)$$

die Spannung σ_M ist die analoge „Vergleichsspannung“ zu s

$$\sigma_M = s, \quad (29)$$

wobei in beiden Fällen einachsiger Zug den Vergleichszustand bildet. Die Konstanten G und K sind die des linear-elastischen Grenzfalls. Sie erfüllen die üblichen Beziehungen des linear-elastischen Materials:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (30.1)$$

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (30.2)$$

Die dimensionslose Zahl γ_K entspricht dem relativen Anteil der Kriechschubdeformation, bezogen auf die elastische Schubdeformation bei kleinen Spannungen und der Zeit, für die $J(t) = 1$ ist, in der folgenden Versuchsauswertung also bei $t = 10^2$ h. Die Konstante γ_E wird im allgemeinen $\gamma_E = 1$ gesetzt, damit G und K tatsächlich die elastischen Konstanten des linearen Grenzfalls sind. Bei der Untersuchung einfacherer Varianten als Sonderfälle wird jedoch auch $\gamma_E \gtrsim 1$ zugelassen, damit *formal* G und K ungeändert bleiben.

Die beiden noch willkürlichen Funktionen f_A in (26) sind durch

$$f_A(0,0) = 1 \quad (31)$$

normiert.

Mit den Konstanten

$$\gamma_E = 1; \gamma_K = \gamma; \omega_E = 1; \omega_K = 0 \quad (32)$$

lassen sich nun (22) und (24) unter Berücksichtigung von (26) und (27) einheitlich fassen:

$$e^A = \frac{\gamma_A}{G} \frac{\partial}{\partial \sigma_M} \int_0^{\sigma_V} f_A(x, \sigma_M) x dx + \frac{\omega_A}{3K} s \quad (33.1)$$

$$e_{ij}^A = \frac{\gamma_A}{2G} f_A(\sigma_V, \sigma_M) s_{ij} \quad (33.2)$$

Zum Aufbau von $f_A(\sigma_V, \sigma_M)$ sind zwei einfache Wege naheliegend. Im ersten Fall wird f_A in ein Polynom entwickelt. Dabei werden bestimmte Terme aus physikalischen Gründen ausgesondert und der Grad des Polynoms beschränkt [2], [3]. Der zweite Weg besteht in der Bildung einer neuen Invariantenkombination aus σ_V und σ_M und dem Aufbau einer Funktion einer einzigen Variablen. Dieser zweite Weg begrenzt von vornherein die Allgemeinheit, hat dabei aber den Vorzug, mit weniger Materialparametern auszukommen. Er wird hier weiter verfolgt.

Als Invariantenkombination wurde zuerst [2]

$$\sigma_V \alpha = \sqrt{(1-\alpha) \sigma_V^2 + \alpha \sigma_M^2} \quad (34)$$

mit dem Werkstoffparameter $0 \leq \alpha < 1$ gewählt. Diese modifizierte Vergleichsspannung nimmt bei einachsigem Zug den Wert der Zugspannung an und ist bei Zug-Schub-

Überlagerung kleiner, bei zweiachsigem Zug dagegen größer als σ_V . Der Parameter α kennzeichnet den Einfluß der Mittelspannung auf die Gestaltänderung. Dieser verschwindet für $\alpha = 0$, dann entsteht das Standardgesetz als Sonderfall.

Im Laufe der weiteren Untersuchungen [2], [3] zeigte es sich jedoch, daß die Erfassung von Zug-Druck-Unterschieden genauso bedeutsam ist wie der Einfluß der positiven Mittelspannung auf die Gestaltänderung. Daher wurde (34) zu

$$S = (1-\alpha) \sigma_V^2 + \alpha \frac{1+\lambda \operatorname{sgn} \sigma_M}{1+\lambda} \sigma_M^2 \quad (35)$$

modifiziert. Die Invariante S geht für $\sigma_M \geq 0$ in

$$S = \sigma_V^2 \quad (36)$$

über. Der zweite Werkstoffparameter λ beeinflusst die unsymmetrische Form der Zug-Druck-Kurven. Vom gesamten Einfluß der Mittelspannung auf S bewirkt der Anteil $\frac{1}{1+\lambda}$ eine antisymmetrische Zug-Druck-Kurve, wie sie sich auch infolge des stets antisymmetrischen Einflusses von σ_V ergibt. Der Anteil $\frac{\lambda}{1+\lambda}$ wirkt für negative σ_M dem von σ_V entgegen. Hieraus resultieren unterschiedliche Kurvenformen im Zug- und im Druckbereich. Für die Funktionen f_E und f_K in (32) und (33) soll also die Festlegung

$$f_A(\sigma_V, \sigma_M) = f_A^*(S_A) \quad (37.1)$$

$$f_A^*(0) = 1 \quad (37.2)$$

eingeführt werden.

Im einfachsten Fall gilt

$$f_A^* = 1 + b_A S_A = 1 + b_A \left[(1-\alpha_A) \sigma_V^2 + \alpha_A \frac{1+\lambda_A \operatorname{sgn} \sigma_M}{1+\lambda_A} \sigma_M^2 \right] \quad (38)$$

Dieser Ansatz führt auf Isochronen in Form kubischer Parabeln. Solche Parabeln reichen erfahrungsgemäß aus, bis etwa 100 % Abweichung vom linearen Fall Meßergebnisse gut anzunähern. Daher genügt im elastischen Bereich der Ansatz (38). Bei der Kriechdeformation treten jedoch für die obersten zwei Spannungsniveaus Abweichungen über 300 % bis zum Dreißigfachen auf.

Es zeigte sich, daß eine einfache Potenzreihe

$$f_K^* = 1 + b_K S_K + c_K S_K^2 \quad (39)$$

dem stark progressiven Verlauf der Kriechisochronen nicht gut folgen konnte. Besser bewährte sich die Modifikation

$$f_K^* = 1 + b_K S_K + c_K P_2(S_K) \quad (40)$$

mit

$$P_2(S_K) = \begin{cases} 0 & S_K < k^2 \\ \text{für} & \\ (S_K - k^2)^2 & S_K \geq k^2 \end{cases} \quad (41)$$

Während beim Ansatz (39) die Approximation bei kleinen Spannungen sehr ungünstig beeinflusst wird, nimmt das Polynom (41) auf den Bereich $S_K < k^2$ keinen Einfluß.

Mit der Vereinbarung $c_E = 0$ lassen sich nun folgende einheitliche Zusammenhänge für die Dehnungen mit den Bezeichnungen nach Tabelle 1 und die Spannungszustände nach Abschnitt 2. aus (33), (37), (40) und (41) berechnen:

$$\epsilon_s^A = \frac{\gamma_A}{2G} \left[\sigma + 3b_A (1-\alpha_A) \sigma^3 + c_A P_2(3(1-\alpha_A) \sigma^2) \right] \quad (42.1)$$

$$\epsilon_Z^A = \frac{\gamma_A}{3G} \left[\sigma + b_A (1+\alpha_A) \sigma^3 + c_A \frac{1}{1-\alpha_A} \left\{ P_2(\sigma^2) - \alpha_A P_2(\alpha_A \sigma^2) \right\} \sigma \right] + \frac{\omega_A}{9K} \sigma \quad (42.2)$$

$$\epsilon_D^A = \frac{\gamma_A}{3G} \left[\sigma + b_A (1+\alpha_A) \frac{1-3\lambda_A}{1+\lambda_A} \sigma^3 + c_A \frac{1}{1-\alpha_A} \left\{ \left(1 - \frac{2\alpha_A \lambda_A}{1+\lambda_A}\right) P_2\left(\left(1 - \frac{2\alpha_A \lambda_A}{1+\lambda_A}\right) \sigma^2\right) - \alpha_A \frac{1-\lambda_A}{1+\lambda_A} P_2\left(\alpha_A \frac{1-\lambda_A}{1+\lambda_A} \sigma^2\right) \right\} \sigma \right] + \frac{\omega_A}{9K} \sigma \quad (42.3)$$

$$\epsilon_G^A = \frac{\gamma_A}{6G} \left[\sigma + b_A (1+7\alpha_A) \sigma^3 + c_A \frac{1}{1-\alpha_A} \left\{ (1+3\alpha_A) P_2((1+3\alpha_A) \sigma^2) - 4\alpha_A P_2(4\alpha_A \sigma^2) \right\} \sigma \right] + \frac{2\omega_A}{9K} \sigma \quad (42.4)$$

Für die Zahlen γ_A und ω_A gilt (32). Ist die Konstante K bekannt, lassen sich aus (42) folgende normierten Dehnungen bestimmen, die nicht mehr von dem linear-elastischen Volumenänderungsverhalten abhängen:

$$\tilde{\epsilon}_T^A(\sigma_V) = \mu_T \left[\epsilon_T^A(\sigma) - \frac{\omega_A}{9K} \sigma \right] \quad (43)$$

In (43) steht der Index T für S, Z, D, G (vgl. auch Abschnitt 2.). Die Normierungszahlen μ_T sind

$$\mu_S = \frac{2}{\sqrt{3}}; \quad \mu_Z = \mu_D = 1; \quad \mu_G = 2 \quad (44)$$

und die Spannung σ wird durch die zugeordnete Vergleichsspannung nach (28) ersetzt

$$S: \sigma_V = \sqrt{3} \sigma; \quad Z, D, G: \sigma_V = \sigma. \quad (45)$$

Die Normierung nach (44) wurde so gewählt, daß für das Standardgesetz ($\alpha_A = 0$) aus allen 4 Versuchstypen einheitlich aus (42)

$$\tilde{\epsilon}_T^A = \tilde{\epsilon}^A = \frac{\gamma_A}{3G} \left[\sigma_V + b_A \sigma_V^2 + c_A P_2(\sigma_V^2) \sigma_V \right] \quad (46)$$

folgt. Das entspricht dem vom Spannungszustand unabhängigen Zusammenhang zwischen der 2. Invarianten des Verzerrungsdeviators (Vergleichsdehnung $\epsilon_V = \tilde{\epsilon}$, vgl. [3]) und der 2. Invarianten des Spannungsdeviators (Vergleichsspannung σ_V) bei Gesetzen des Standardtyps. Diese Unabhängigkeit vom Spannungszustand ist für alle nur auf I_2^s aufgebaute Gesetze typisch (z. B. auch in der Plastizitätstheorie bei Anwendung der Huber-Mises-Hencky-Fließbedingung oder in der Theorie des Metallkriechens nach dem Norton-Gesetz oder der einfachen Dehnungsverfestigungstheorie).

Im linearen Fall ergibt sich aus (42) bzw. (46) natürlich ebenfalls eine Formulierung, die für alle Spannungszustände gleich ist

$$\tilde{\epsilon}_T^A = \tilde{\epsilon}^A = \frac{\gamma_A}{3G} \sigma_V. \quad (47)$$

5. Bestimmung der Parameter des Deformationsgesetzes

Die Bestimmung der 5 Parameter des elastischen Deformationsanteils G , K , b_E , α_E und λ_E sowie der 6 Parameter der Kriechdeformation γ_k , b_K , c_K , α_K , λ_K und k erfolgt durch Anpassung an je 17 Meßwerte gemäß Tabelle 1. Dabei wird der Meßwert $\sigma = 19,60 \text{ N/mm}^2$ beim Versuchstyp S nicht verwertet da er mit $\sigma_V = 33,9 \text{ N/mm}^2$ beträchtlich oberhalb des obersten Beanspruchungsniveaus der übrigen liegt.

Die Anpassung wird prinzipiell nach der Methode der kleinsten Quadrate vorgenommen. Allerdings wurden die Parameter nicht simultan optimiert, sondern nacheinander. Dieser Weg ist bei der Sammlung von Erfahrungen über Ansatzformen effektiver, ergibt aber natürlich etwas schlechtere Optima als bei gleichzeitiger Optimierung aller Parameter.

Es sei vermerkt, daß für eine simultane Optimierung die Ansätze der elastischen Deformation durch Einführung von Abkürzungen linear in diesen Variablen sind und damit das Optimum ohne Schwierigkeiten bestimmt werden kann. Mit dem Ansatz (40) wird dies zweite Optimierungsproblem (für die Kriechdeformation) nicht-linear in den Parametern. Hier sprechen alle Erfahrungen dafür, daß es günstiger ist, die Linearität für $s_K < k^2$ auszunützen und die Lösung des linearen Gleichungssystems zumindest als Startpunkt für die Suche des Minimums der simultanen Optimierung zu nutzen.

Der hier beschrittene Weg der nacheinander vorgenommenen Parameterbestimmung sei kurz angegeben:

Zuerst werden die elastischen Dehnungen aller vier Versuchsgruppen durch die kubischen Polynome

$$\epsilon_T^E = a_{1T} \sigma + a_{3T} \sigma^3 \quad (48)$$

unabhängig voneinander approximiert. Für den Zug- und den Druckversuch wurden auch die gemessenen Querdehnungen [5] nach dem Ansatz (48) ausgeglichen ($T = Zq, Dq$). Aus der Bedingung der minimalen quadratischen Abweichung zum theoretischen Zusammenhang zwischen den linear-elastischen Konstanten folgen die Mittelwertformeln

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{6} \left[a_{1Z} + a_{1D} + 2(a_{1S} + a_{1G}) \right] \quad (49.1)$$

$$\frac{\nu}{E} = \frac{1}{6} \left[a_{1Zq} + a_{1Dq} + 2(a_{1S} - a_{1G}) \right] \quad (49.2)$$

für die Bestimmung von

$$E = 3345 \text{ N/mm}^2$$

$$\nu = 0,343.$$

Mit (30) ergeben sich Schub- und Kompressionsmodul zu

$$G = 1245 \text{ N/mm}^2$$

$$K = 3558 \text{ N/mm}^2.$$

Mit bekanntem Kompressionsmodul K können aus den Meßwerten (Tabelle 1) über (43) die normierten Dehnungen $\tilde{\epsilon}_T^A$ (der Stern kennzeichnet die Meßwerte im Gegensatz zu den theoretischen Werten nach (42)) bestimmt werden. Allen weiteren Approximationen liegt nun die Fehlerquadratsumme

$$Q = \sum \left[\tilde{\epsilon}_T^{*A} - \tilde{\epsilon}_T^A(\sigma_V) \right]^2 \longrightarrow \text{Min} \quad (50)$$

zugrunde, wobei die Summe über alle 17 Meßwerte der Tabelle 1 zu erstrecken ist. Die normierten Dehnungen wurden gewählt, da hier keiner der vier Typen S, Z, D, G gegenüber einem anderen durch einen Gewichtungsfaktor bevorzugt wird.

Mit den bereits ermittelten elastischen Konstanten wurden nun nochmals die elastischen Dehnungen nach (50) mit dem Ansatz (48) ausgeglichen. Das Ergebnis dieses Ausgleiches sind die a_{3S} , a_{3Z} , a_{3D} und a_{3G} , die gemäß (42) jedoch nicht linear unabhängig sind. Der Vergleich von (48) mit (42) für $A = E$ unter Beachtung von $c_E = 0$ ergibt

$$\frac{a_{3Z}}{a_{3S}} = \frac{1 + \alpha_E}{1 - \alpha_E} = \varphi_1(\alpha_E) \quad (52.1)$$

$$\frac{a_{3G}}{a_{3S}} = \frac{1 + 7\alpha_E}{1 - \alpha_E} = \varphi_2(\alpha_E). \quad (52.2)$$

Durch die Approximation lassen sich φ_1 und φ_2 berechnen, aus beiden folgt ein etwas unterschiedliches α_E (im konkreten Fall aus φ_1 : $\alpha_E = 0,163$, aus φ_2 : $\alpha_E = 0,139$), so daß der Mittelwert $\alpha_E = 0,151$ in die weitere Rechnung eingeführt wurde. Aus

$$\frac{a_{3D}}{a_{3S}} = \frac{1 + \lambda_E + \alpha_E(1 - 3\lambda_E)}{(1 + \lambda_E)(1 - \alpha_E)} = \varphi_3(\alpha_E, \lambda_E) \quad (53)$$

läßt sich mit dem bekannten α_E der Parameter λ_E berechnen. Allerdings ergab sich im konkreten Fall $\varphi_3 = 0,478$. Nach [3] ist für $\varphi_3 = \eta/\eta^S = 0,478$ bei $\kappa = \sigma_2/\sigma_1 = 0$ ab $\kappa = 0,325$ zu erwarten, daß die Nichtlinearität der linearen Dehnungszunahme entgegenwirkt. Eine solche Erscheinung ist aber bislang nur bei allseitigem Druck beobachtet worden [11]. Der zu kleine φ_3 -Wert wird daher als Meßfehler interpretiert und auf $\varphi_3 = 0,75$ festgelegt. Dieser Wert ist nach [3] die Grenze, bei der auch bei ebenem Gleichdruck noch keine Abminderung der linearen Dehnung auftritt. Aus (53) folgt dann λ_E . Mit bekanntem und festgehaltenem G , α_E und λ_E wird (50) nochmals herangezogen, um b_E endgültig zu bestimmen.

Die Bestimmung von α_K und λ_K erfolgt im wesentlichen aus den Meßwerten für die Kriechdehnungen nach dem eben beschriebenen Algorithmus, d. h., es wird zunächst ein kubischer Ausgleich vorgenommen. Das ist mit guter Annäherung möglich, wenn jeweils der Meßwert mit der höchsten Spannung aus jedem Versuchstyp ausgeklammert wird, so daß für den kubischen Ausgleich

$$\bar{\epsilon}_T^K = \bar{a}_1 \sigma_V + \bar{a}_{3T} \sigma_V^3 \quad (54)$$

gemäß (50) nur 13 Meßwerte mit $\sigma_V < 26 \text{ N/mm}^2$ herangezogen werden. Die Minimierung von (50) liefert die 5 Konstanten $\bar{a}_1, \bar{a}_{3S}, \bar{a}_{3Z}, \bar{a}_{3D}, \bar{a}_{3G}$. Aus dem Vergleich mit (42) folgen aus \bar{a}_1 der Parameter $\gamma_K = \gamma$ und wieder $\varphi_1(\alpha_K), \varphi_2(\alpha_K)$ und $\varphi_3(\alpha_K, \lambda_K)$. Auch hier differiert α_K aus φ_1 und φ_2 , und zwar zwischen 0,182 und 0,097. Die Mittelung ergibt $\alpha_K = 0,140$. Der Quotient $\varphi_3 = 0,833$ liegt im zulässigen Bereich und wird der λ_K -Berechnung direkt zugrunde gelegt. Mit festgehaltenem γ, α_K und λ_K wird über (50) b_K endgültig bestimmt.

Tabelle 2

Materialparameter und mittlere Fehler des Ausgleiches
In allen Fällen gilt $G = 1245 \text{ N/mm}^2$ und $K = 3558 \text{ N/mm}^2$

	Elastischer Anteil (A = E)			Kriechanteil (A = K)		
	Lineares Gesetz	Standardgesetz	Gesetz mit Mitteldruck-einfl.	Lineares Gesetz	Standardgesetz	Gesetz mit Mitteldruck-einfl.
γ_A [1]	1.146	1	1	0.819	0.101	0.0742
α_A [1]	0	0	0.152	0	0	0.140
λ_A [1]	—	—	5.730	—	—	3.100
b_A [$10^{-3} \text{ mm}^4 \text{ N}^{-2}$]	0	0.231	0.213	0	7.006	9.685
c_A [$10^{-5} \text{ mm}^8 \text{ N}^{-4}$]	0	0	0	0	3.331	3.336
k [N/mm^2]	—	—	—	—	21.50	24.81
$\Delta \bar{\epsilon}$ [10^{-2}]	0.061	0.050	0.018	0.433	0.352	0.047
\bar{f} [%]	9.5	7.4	3.3	86.6	46.9	16.4

Die Approximation aller 17 Meßwerte durch

$$\bar{\epsilon}_T^K = \bar{a}_1 \sigma_V + \bar{a}_{3T} \sigma_V^3 + \bar{a}_{5T} \sigma_V^5 \quad (55)$$

mit festgehaltenem α_K und λ_K aus der vorherigen Rechnung mit (54) führt durch den Vergleich mit (33), (37) und (39) auf andere Werte für γ, b_K und \bar{c}_K . Dabei zeigte es sich, daß b_K negativ wurde und der mittlere quadratische Fehler durch eine im Mittel schlechtere Annäherung der 13 Meßwerte unterhalb $\sigma_V = 26 \text{ N/mm}^2$ um etwa 30 % zunahm.

Daher lag nahe, den Ansatz (40) zu wählen, bei dem die Approximation (54) bis zu der Grenze

$$s_K < k^2 \quad (56)$$

unverändert gilt. Die Bestimmung der Grenze k erfolgte aus dem Ansatz

$$f_K^* = 1 + \bar{c}_K S_K^2, \quad (57)$$

dessen freier Parameter \bar{c}_K bei festgelegtem γ, α_K und λ_K , deren Werte aus der kubischen Approximation der 13 Meßwerte gemäß (54) übernommen wurde. Der mittlere Fehler von (57) ist nur unwesentlich größer als der von (55). Die Kurve (57) schneidet im Approximationsintervall die zu (54) gehörende Funktion (38). Unterhalb des Schnittpunktes ist (38) besser zur Annäherung geeignet, oberhalb sind Polynome höheren Grades erforderlich. Daher wird der Schnittpunkt von (38) (Konstanten $\gamma, \alpha_K, \lambda_K, b_K$ aus den 13 Meßwerten mit $\sigma_V < 26 \text{ N/mm}^2$ bestimmt) mit (57) (Parameter \bar{c}_K aus allen 17 Meßwerten ermittelt) als die Spannung k des Ansatzes (40) definiert:

$$k = \sqrt{\frac{b_K}{\bar{c}_K}} \quad (58)$$

Mit den nunmehr festgelegten Parametern $\gamma, \alpha_K, \lambda_K, b_K$ und k können die Meßwerte bestimmt werden, für die $s_K \geq k^2$ gilt. Aus diesen Meßwerten und Gleichung (50) mit (42), (43) folgt die lineare Bestimmungsgleichung für den Parameter c_K .

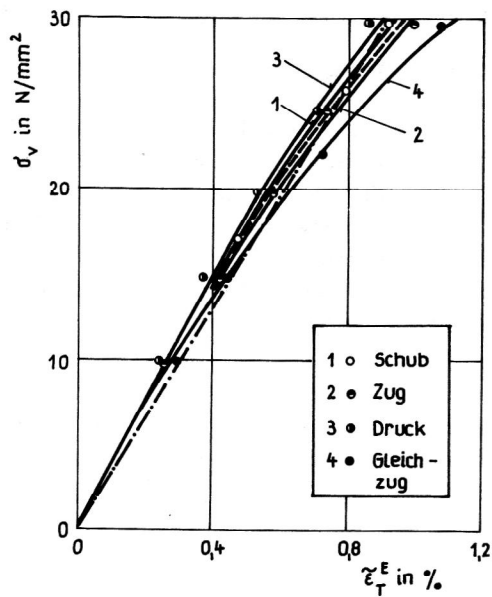


Bild 3
Normierte elastische Dehnungen $\tilde{\epsilon}^E$ (— Gesetz mit Mittel-
druckeinfluß, --- Standardgesetz, -.- lineares Gesetz)

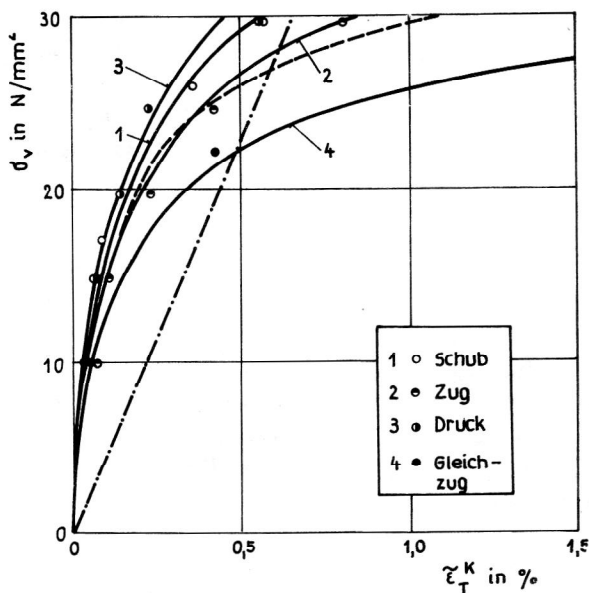


Bild 4
Normierte Kriechdehnungen $\tilde{\epsilon}^K$ bei $t = 10^2$ h (— Gesetz mit
Mitteldruckeinfluß, --- Standardgesetz, -.- lineares Gesetz)

Nach dem gleichen Algorithmus wurden mit $\alpha_A = 0$, $\lambda_A = 0$ die Konstanten γ , b_A , k und c_A im Falle des Standardgesetzes und mit zusätzlich $b_A = 0$, $c_A = 0$ die Konstanten γ_A des linearen Ansatzes bestimmt. Die Ergebnisse sind in Tabelle 2 zusammengestellt.

Mit den Parametern nach Tabelle 2 lassen sich nach (42) die Dehnungen der speziellen Spannungszustände und nach (33), (35), (37), (40), (41) die Verzerrungen beliebiger Spannungszustände bestimmen. Bei einer Auftragung der normierten Dehnung nach (43) als Funktion von σ_v nach (45) fächern sich die Kurven

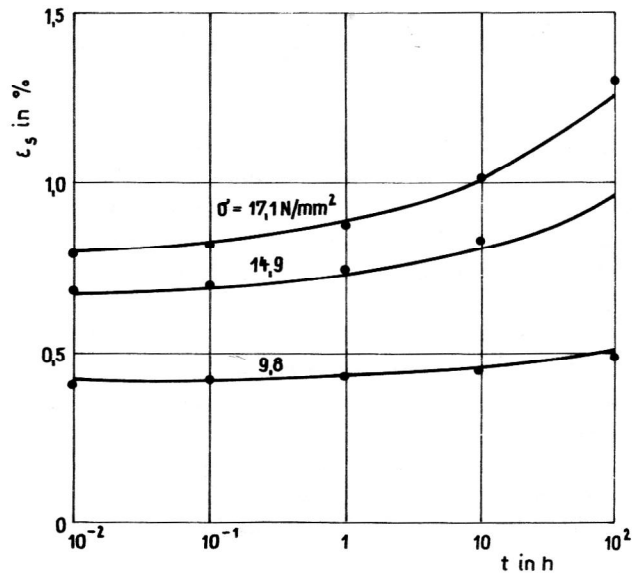


Bild 5
Kriechkurven des Spannungszustandes Schub (S)

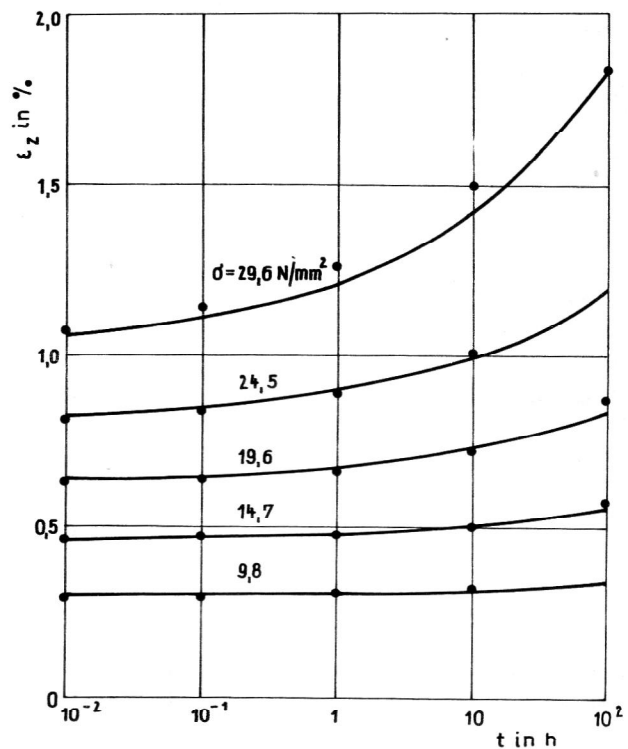


Bild 6
Kriechkurven des Spannungszustandes Zug (Z)

erst für $\alpha_A \neq 0$ von einer Einheitskurve, die sowohl bei einer rein linearen Beschreibung entsteht als auch für das nichtlineare Standardgesetz typisch ist, ausgehend auf. Das zeigen die Bilder 3 und 4 für die elastische und die Kriechdehnung.

Die Gesamtdéhnung wird im Falle des Kriechens nach (14) mit $J(t)$ nach Tabelle 1 und bei zeitlich veränderlichen Spannungen nach (13) berechnet. Die Gesamtdéhnungen nach (14) und (42) für das vollständige Gesetz mit Einfluß der 1. Invarianten sind in den Bildern 5 bis 8 aufgetragen und mit den Meßwerten nach Tabelle 1 verglichen.

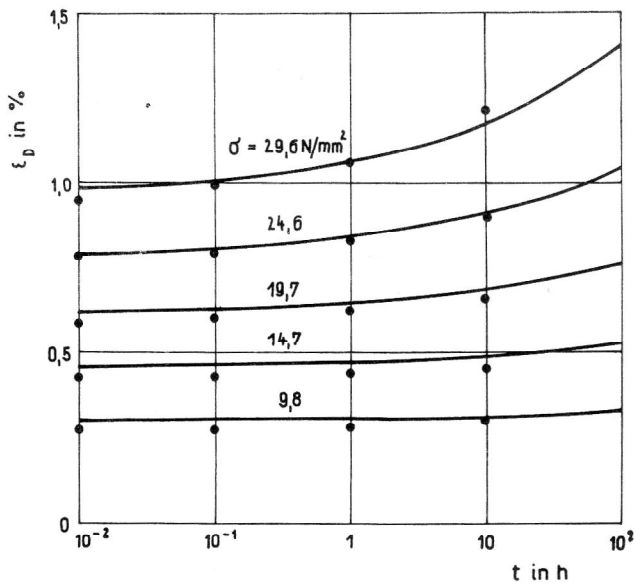


Bild 7
Kriechkurven des Spannungszustandes Druck (D)

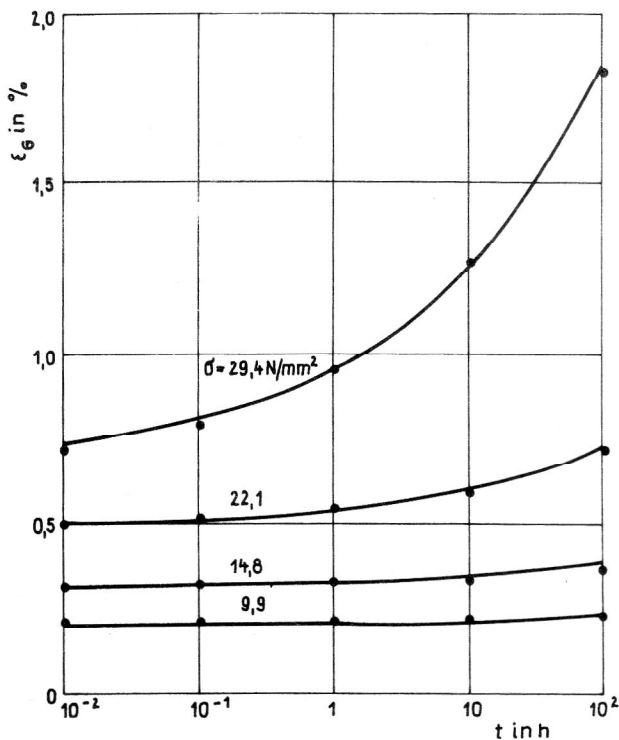


Bild 8
Kriechkurven des Spannungszustandes ebener Gleichzug (G)

6. Diskussion der Ergebnisse

Da der Bestimmung der Parameter (50) zugrunde lag, ist der durchschnittliche quadratische Absolutfehler

$$\Delta \tilde{\epsilon} = \sqrt{\frac{1}{N} Q} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left[\tilde{\epsilon}_{Tn}^{*A} - \tilde{\epsilon}_T^A(\sigma_{Vn}) \right]^2} \quad (59)$$

das Maß zur Bewertung der Approximationsqualität. Mit (59) lassen sich unterschiedliche Modelle untereinander vergleichen. Als relatives Genauigkeitsmaß ist der mittlere quadratische relative Fehler ungeeignet, da die relativen Fehler bei kleinen σ_V infolge der Optimierungsbedingung (50) große Werte annehmen und das Ergebnis in einer falschen Bewertung widerspiegeln. Daher wird ein gewichteter relativer Fehler bestimmt, der bei niedrigen $\tilde{\epsilon}$ bzw. σ_V den Einfluß des Fehlers abmindert. Als Gewichtungsfaktoren bieten sich die Dehnungen selbst an:

$$f = \frac{\sum_{n=1}^N P_n \left[\frac{\tilde{\epsilon}_{Tn}^{*A}}{\tilde{\epsilon}_T^A(\sigma_{Vn})} - 1 \right]^2}{\sum_{n=1}^N P_n} \quad (60)$$

$$\text{mit } P_n = \tilde{\epsilon}_T^A(\sigma_{Vn}).$$

Die Fehler aller Meßwerte im Vergleich zur Approximation sind ebenfalls in Tabelle 2 zusammengestellt.

Es wird deutlich, daß beim Übergang vom Standardgesetz zum Gesetz mit Mitteldruckeinfluß der absolute Fehler wesentlich stärker sinkt als beim Übergang von der linearen zur nichtlinearen Theorie (im einfachsten Fall, dem Standardgesetz).

Der Fehler des Mitteldruckmodells beträgt für die Kriechdeformation nur noch 13 % vom Fehler des Standardgesetzes bei einer Zunahme der verfügbaren Parameter um 50 %. Dabei ist der wesentliche Parameter α_K . Der Parameter λ_K bewirkt, daß sich im Falle des Kriechens 24 % der ersten Invariante sich gleich der zweiten Invariante antimetrisch auf das Zug-Druck-Verhalten auswirken, 76 % dagegen wirken im Druckbereich verkleinernd auf den nichtlinearen Anteil. Da der Gesamteinfluß der ersten Invarianten aber bei ebenen Spannungszuständen klein gegenüber dem der zweiten bleibt, ist es sicher zulässig, den Parameter λ_K als sehr groß aufzufassen und die Invariantenkombination (35) durch

$$S_K \approx (1 - \alpha_K) \sigma_V^2 + \alpha_K \sigma_M^2 \operatorname{sgn} \sigma_M \quad (61)$$

anzunähern. Dann ist nur noch ein Parameter gegenüber dem Standardmodell zusätzlich einzuführen. Im Zugbereich ändert sich dabei nichts, nur im Druckbereich werden die Dehnungen geringfügig kleiner.

Es ist interessant, daß bei Versuchen aus Zug und Torsion bei allen bislang untersuchten Experimenten sich der α_K -Wert in ähnlicher Größenordnung einstellt (Tabelle 3). Der Mittelwert aller bisher ausgewerteten Versuche beträgt $\alpha_K = 0.16 \pm 0.05$.

Beim elastischen Deformationsanteil reicht infolge der geringen Nichtlinearität das Standardmodell aus. Die Zunahme der Fehler der Kriechdeformation gegenüber dem elastischen Anteil beruht im wesentlichen auf der auch experimentell zu beobachtenden Zunahme der Streuung der Versuchswerte aus mehreren Versuchen gleichen Spannungszustandes im Verlaufe des Kriechens.

Tabelle 3

Parameter α_K von unterschiedlichen Thermoplasten

Material	Rohrprobenabmaße in mm			Beanspruchung	Versuche in	Auswertung in	α_K
	D_m	s	L				
PVC	23,9	1,6	103	Z, T	[14]	[2]	0,09
PUR	23,9	1,53	103	Z, T	[12]	[2]	0,20
PMMA	14,0	1,0	75	Z, T	[13]	[2]	0,16
PVC	21,8	1,0	120	Z, T	[15]	[16]	0,14
PVC	21,8	1,0	120	Z, T	[17]	[2]	0,23
PVC	60,0	3,0	360	ZD, P	[4]	—	0,14

(Z – Zug, ZD – beliebige Längskraft, T – Torsion, P – Innendruck)

Tabelle 4

Mittlerer absoluter und mittlerer gewichteter Fehler der Gesamtdehnungen

	Lineares Gesetz	Standardgesetz	Gesetz mit Mittel- druckeinfluß (vereinfacht)	Gesetz mit Mittel- druckeinfluß (vollständig)
$\alpha_E; \alpha_K$ [1]	0; 0	0; 0	0; 0,140	0,151; 0,140
$\lambda_E; \lambda_K$ [1]	—; —	—; —	—; ∞	5,73; 3,10
$\Delta\epsilon$ [10^{-2}]	0,149	0,125	0,036	0,021
f [%]	19,7	14,3	5,0	3,1

In der Tabelle 4 sind die mittleren Gesamtfehler aller 77 Meßwerte nach Tabelle 1 (ausschließlich Schub bei $\sigma = 19,6 \text{ N/mm}^2 = \sigma_V$ $\sigma_V = 33,9 \text{ N/mm}^2$, vgl. Abschnitt 5.) durch sinngemäße Anwendung von (59) und (60) auf ϵ nach (14), (42) zusammengestellt. Zusätzlich wurde das eben erörterte vereinfachte Gesetz mit Mitteldruckeinfluß (nur ein zusätzlicher Materialparameter α_K statt der vier Werte $\alpha_E, \lambda_E, \alpha_K, \lambda_K$) angenommen, dessen Parameter γ_K, b_K und c_K bei übernommenen Werten α_K und k durch nochmalige Approximation neu optimiert wurden.

Es ist zu erkennen, daß beide Mitteldruckmodelle nahezu gleichwertig sind, den Genauigkeitsansprüchen eines Berechnungsverfahrens entsprechen und deutlich das Standardmodell übertreffen, wohingegen letzteres das größte Modell nicht wesentlich verbessert. Diese Aussagen bestätigen voll den in [2] und [3] entwickelten phänomenologischen Vorschlag zur Weiterentwicklung des Standardgesetzes.

LITERATUR

- [1] Bergander, H., Balke, H., Hartmann, D., Lehmann, H.; Röhle, H., Tränkner, M., Ulbricht, V.: Berechnung von Bauteilen aus Thermoplasten im nichtlinearen Bereich der Deformation. *Plaste und Kautschuk* 21 (1974), 8, S. 606 – 611.
- [2] Bergander, H.: Die Aufbereitung der Grundgleichungen der nichtlinearen Viskoelastizitätstheorie für die numerische Lösung von Anfangs-Randwertproblemen. Diss. B, TH Dresden 1976.
- [3] Bergander, H.: Der Einfluß der Mittelspannung auf das Kriechverhalten isotroper Plastwerkstoffe. *IFL-Mitt.* 16 (1977), 4, S. 118 – 127.
- [4] Lehmann, B.: Beitrag zum Spannungs-Deformationsverhalten von PVC S – 68, Diss., TH Otto von Guericke Magdeburg 1976.
- [5] Bergander, H.: Elimination des Alterungseinflusses bei Kriechversuchen mit PVC. *IFL-Mitt.* 19 (1980), 6, S. 217 – 222.
- [6] Findley, W.N., Lai, J.S., Onaran, K.: *Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Materials*. Amsterdam, New York, Oxford 1976.
- [7] Ильюшин, А. А., Победря, Б. Е.: *Основы математической теории термовязкоупругости* Москва 1970.
- [8] Freudenthal, A.M., Geiringer, H.: *The Mathematical Theories of the Inelastic Continuum*. In: Flügge, S.: *Handbuch der Physik*, Band VI, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1958.

- [9] Bergander, H.: Das Modellstruktursystem als eine Klasse anschaulicher nichtlinear-viskoelastischer Stoffgesetze. *Wiss. Z. TU Dresden* 17 (1968) 5, S. 1287 – 1298.
- [10] Balke, H.: Thermodynamische Analyse von Deformationsgesetzen des Modellstruktursystems. *ZAMM* 54 (1974), S. 233 – 240.
- [11] Findley, W.N., Reed, R.M., Stern, P.: Hydrostatic Creep of Solids Plastics. *J. appl. mechanics* 34 (1967), Series E, S. 895 – 904.
- [12] Lai, J.S.Y., Findley, W.N.: Behavior of Nonlinear Viscoelastic Material Under Simultaneous Stress Relaxation in Tension and Creep in Torsion. *J. appl. mechanics* 36 (1969), Series E, 1, S. 22 – 27.
- [13] Баев, Л. В., Малинин, Н. И.: Исследование ползучести органического стекла (полиметилметакрилата) при совместном действии растяжения с кручением. *Механика Полимеров* (1966), 5 стр. 671 – 677.
- [14] Onaran, K.; Findley, W.N.: Combined Stress – Creep Experiments on a Nonlinear Viscoelastic Material to Determine the Kernel Functions for a Multiple Integral Representation of Creep. *Trans. Soc. of Rheology* 9 (1965), Teil 2, 299 – 327.
- [15] Steffan, E.: Deformationsverhalten von PVC unter veränderlicher Langzeitbeanspruchung auf Zug und Torsion. Diplomarbeit TU Dresden, Sektion Grundlagen des Maschinenwesens, Dresden 1973.
- [16] Hamburger, G.: Anwendung von nichtlinear-viskoelastischen Deformationsgesetzen mit Beeinflussung der Nichtlinearität durch die Mittelspannung auf PVC. Diplomarbeit TU Dresden, Sektion Grundlagen des Maschinenwesens, Dresden 1974.
- [17] Lehmann, H.: Überlagerung von Zug- und Torsionsbelastungen. In: Jahresbericht 1973 zur F und E-Arbeit „Nichtlineares Materialverhalten“, TU Dresden, Sektion Grundlagen des Maschinenwesens, Dresden 1973.

Anschrift des Verfassers:

Prof. Dr. sc. techn. Helge Bergander
 Technische Hochschule Karl-Marx-Stadt
 Sektion Maschinen-Bauelemente
 9010 Karl-Marx-Stadt
 PSF 964