

Anwendung unstetiger Wirbelschichten zur Berechnung ebener Grenzschichtströmungen

Tibor Czibere

Das Geschwindigkeitsfeld der Grenzschicht wird als induziertes Geschwindigkeitsfeld einer unstetigen Wirbelschicht, deren Ausdehnung gleich der Grenzschichtdicke ist, betrachtet. Durch geeignete Wahl der Wirbeldichtefunktionen wird für ausgewählte Beispiele die Übereinstimmung der berechneten mit den experimentellen Ergebnissen nachgewiesen.

1. Einleitung

In [10] wurde gezeigt, daß ebene Grenzschichtströmungen mittels unstetiger Wirbelschichten berechnet werden können. Hierbei wird die Grenzschichtströmung ersetzt durch ein Geschwindigkeitsfeld, das von Wirbelschichten induziert wird, die sich in der Grenzschicht ausbilden.

Nachdem in [10] die Grundlagen des Berechnungsverfahrens dargelegt wurden, soll im folgenden an einzelnen Beispielen die Anwendung des Verfahrens gezeigt werden.

2. Die laminare Grenzschicht entlang der ebenen Platte

Die Rechnungen für dieses Beispiel wurden mit der Annahme durchgeführt, daß der Anstellwinkel der ebenen Platte zur parallelen Anströmung gleich Null ist. In diesem Fall sind die Geschwindigkeiten auf den beiden Seiten der ebenen Platte gleich. Auf die Platte wirkt keine zur Richtung der Anströmung senkrechte Auftriebskraft. Daraus folgt, daß das Integral

$$\Gamma = \int_{(T)} 2\omega(x, y) \, dA \quad (1)$$

der Wirbeldichtefunktion $2\omega(x, y)$, bezogen auf das Gebiet T der entstehenden Wirbelschicht, verschwindet. Der Druck entlang der Platte ist konstant, so daß sich für die Dicke der Grenzschicht δ , die gleich der Dicke der Wirbelschicht ist, nach [10] Gl. (19) ergibt:

$$\frac{\delta(x)}{L} = \frac{5}{\sqrt{Re}} \cdot \sqrt{\frac{x}{L}} \quad (2)$$

(L Länge der Platte, x laufende Koordinate)

Da eine ebene Platte angenommen wurde, gilt für die Koordinaten der Skelettlinie $y_G(x) = 0$, für die Zirkulation $\Gamma = 0$ und für die Grenzschichtdicke auf der Saugseite δ_S und auf der Druckseite δ_D $\delta_S = \delta_D = \delta(x)$. Für die Wirbeldichtefunktion der Wirbelschichten auf beiden Seiten der Platte erhält man aus [10] Gl. 21 und 22 für den Fall einer laminaren Grenzschicht:

$$2\omega(x, y) = \begin{cases} \frac{U_\infty}{\delta} \cdot C \left(1 - \frac{y}{\delta}\right); & 0 < y < \delta \\ -\frac{U_\infty}{\delta} \cdot C \left(1 + \frac{y}{\delta}\right); & -\delta < y < 0 \end{cases} \quad (3)$$

(U_∞ bedeutet die Anströmgeschwindigkeit weit vor der Platte, C eine Konstante)

Bild 1 zeigt die Ergebnisse eines Rechenbeispiels. Für eine Reynoldszahl $Re = 10^5$ und für $C = 2,1$ ist das berechnete Geschwindigkeitsprofil der Grenzschichtströmung an der ebenen Platte für mehrere Stellen x/L dargestellt und mit dem Geschwindigkeitsprofil nach Blasius verglichen.

Die Übereinstimmung ist gut. Das bedeutet, daß die laminare Grenzschicht entlang der ebenen Platte schon mit einer Wirbeldichtefunktion ganz einfacher Form angenähert werden kann.

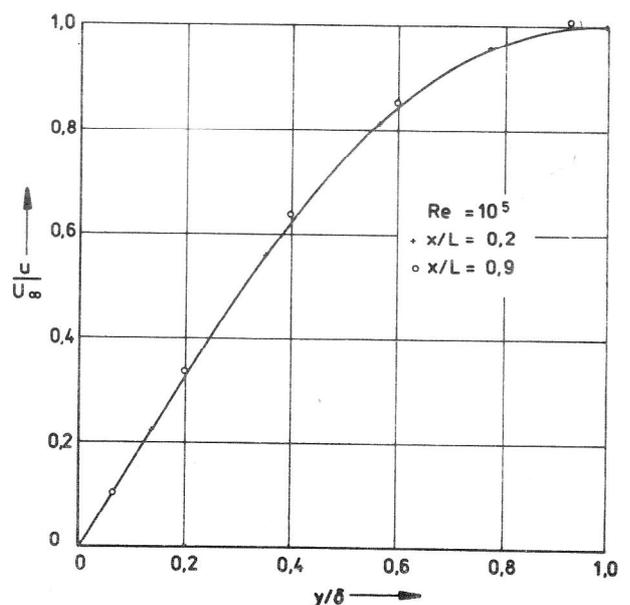


Bild 1

3. Die turbulente Grenzschicht entlang der ebenen Platte

Es sei der Anstellwinkel der ebenen Platte in der parallelen Strömung gleich Null. So wirkt keine Auftriebskraft auf die Platte. Das Integral der Wirbeldichte verschwindet. Für die Dicke der turbulenten Grenzschicht erhält man nach [10] Gl. 19 den folgenden Zusammenhang:

$$\frac{\delta(x)}{L} = \frac{0,37}{\sqrt[5]{Re}} \left(\frac{x}{L}\right)^{\frac{4}{5}} \quad (4)$$

Aus der Gl. (22) in [10] für die Wirbelbelegung:

$$\gamma(x) = \int_{y_G - \delta_D}^{y_G + \delta_S} 2\omega(x,y) dy = U_\infty \cdot A\left(\frac{x}{L}\right) + U_\infty \cdot C \cdot \ln \frac{\delta_S}{\delta_D} \quad (5)$$

erhält man unter Beachtung, daß für die ebene Platte ohne Anstellwinkel $\gamma(x) = 0$ und $A\left(\frac{x}{L}\right) = 0$ sein muß, für die Wirbeldichtefunktion:

$$2\omega(x,y) = U_\infty \cdot \frac{C}{y}; \quad -\delta < y < \delta. \quad (6)$$

Im Bild 2 sind die Ergebnisse eines Rechenbeispiels angeführt. Das Beispiel wurde für $Re = 10^7$ und für $C = 0,125$ in der Wirbeldichtefunktion Gl. (6) berechnet. An mehreren Stellen der ebenen Platte wurde das Geschwindigkeitsprofil bestimmt. Diese Punkte sind im Bild 2 dargestellt und mit dem universellen, turbulenten Geschwindigkeitsprofil, das auf Grund der Messungen im glatten Rohr und an der ebenen Platte gewonnen wurde, verglichen worden [8], [9]. Die Übereinstimmung der Ergebnisse ist auch hier gut.

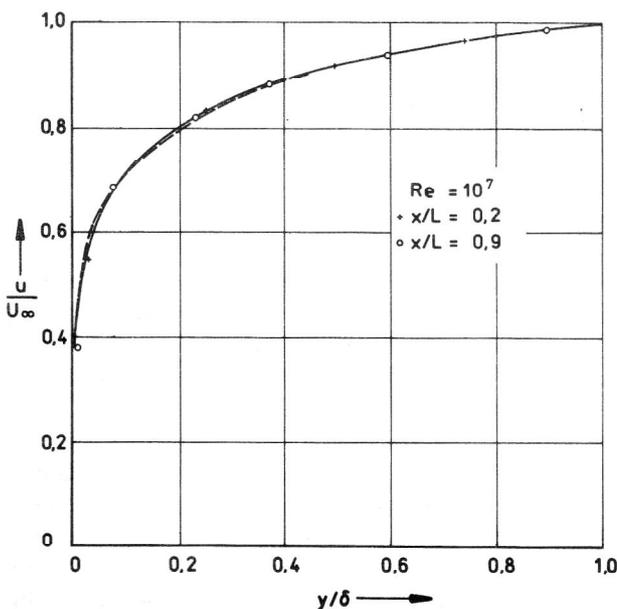


Bild 2

4. Turbulente Grenzschicht entlang der gewölbten Platte

Als nächstes Beispiel wurde die Grenzschichtströmung, die entlang der leicht gewölbten Platte entsteht, untersucht. Die Wölbung der Platte beträgt 4%. Das ist ein kleiner Wert, gering genug, um von der turbulenten Grenzschicht annehmen zu können, daß sie sich von der Platte nicht ablöst. Die gewölbte Platte wird in die parallele Strömung mit der Geschwindigkeit U_∞ so gelegt, daß die Sehne ihrer Skelettlinie zur Strömung parallel ist (Anstellwinkel gleich Null).

Die Skelettlinie der Platte sei eine Parabel zweiten Grades. Wie aus der Tragflügelprofiltheorie bekannt ist, ist die Wirbelbelegung $\gamma_{id}(x)$ in diesem Falle ellipsenförmig:

$$\gamma_{id}(x) = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\Gamma_{id}}{L} \cdot \sqrt{1 - \left(1 - 2 \cdot \frac{x}{L}\right)^2} \quad (7)$$

Wenn dieser Ausdruck in die aus der Tragflügeltheorie bekannte Gleichung (siehe auch [10])

$$V(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^L \gamma_{id}(x') \frac{dx'}{x-x'} \quad (8)$$

eingesetzt wird, erhält man für die Geschwindigkeitskomponente $V(x)$ senkrecht zur Anströmrichtung für reibungsfreie Strömung entlang der Platte:

$$V(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\Gamma_{id}}{L} \left(1 - 2 \cdot \frac{x}{L}\right) \quad (9)$$

Mit Hilfe der kinematischen Strömungsbedingung

$$\frac{dy_G}{dx} = \frac{V(x)}{U_\infty} \quad (10)$$

erhält man nach der Integration für die Skelettlinie der Platte $y_G(x)$:

$$\frac{y_G(x)}{L} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\Gamma_{id}}{U_\infty L} \cdot \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad (11)$$

Für die Bestimmung der Dicke der Wirbelschicht muß die Verteilung $\frac{U}{U_\infty}$ bekannt sein. Auf Grund der aus der Tragflügelprofiltheorie bekannten Beziehung (siehe auch [10])

$$U(x) = U_\infty \pm \frac{1}{2} \gamma_{id}(x) \quad (12)$$

erhält man:

$$\frac{U}{U_\infty} = 1 \pm \frac{2}{\pi} \frac{\Gamma_{id}}{U_\infty L} \sqrt{1 - \left(1 - 2 \cdot \frac{x}{L}\right)^2} \quad (13)$$

Das positive Vorzeichen gilt für die Saugseite, das negative für die Druckseite. Die Dicke der Wirbelschicht auf der Saug- bzw. Druckseite δ_S bzw. δ_D wird nun mit Hilfe der in [10] veröffentlichten Beziehung (19) berechnet. Im Bild 3 sind die sich aus den Gleichungen (7) bis (13) bestimmten Verteilungen dargestellt, wobei für $\Gamma_{id}/U_\infty L = 0,25$ gesetzt wurde (entspricht einer Platte mit der Wölbung von 4%).

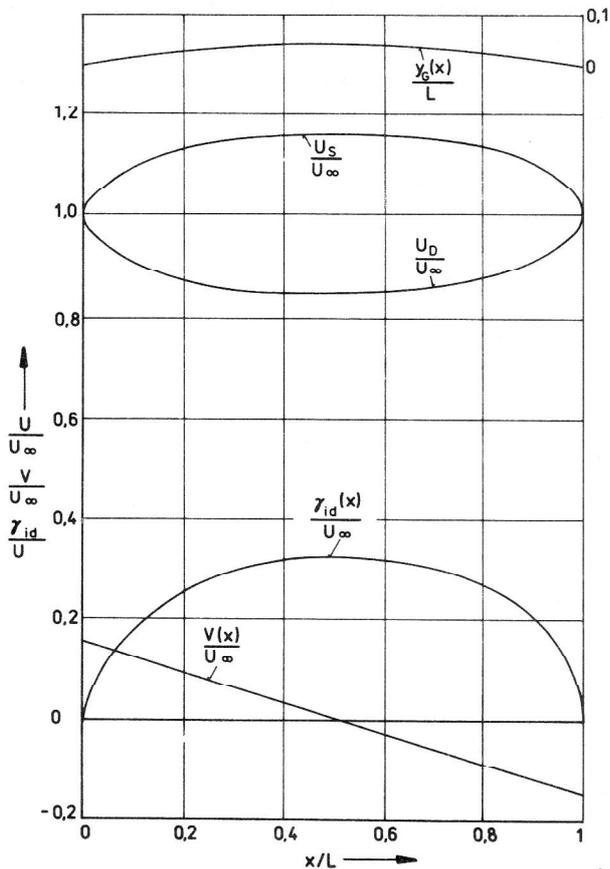


Bild 3

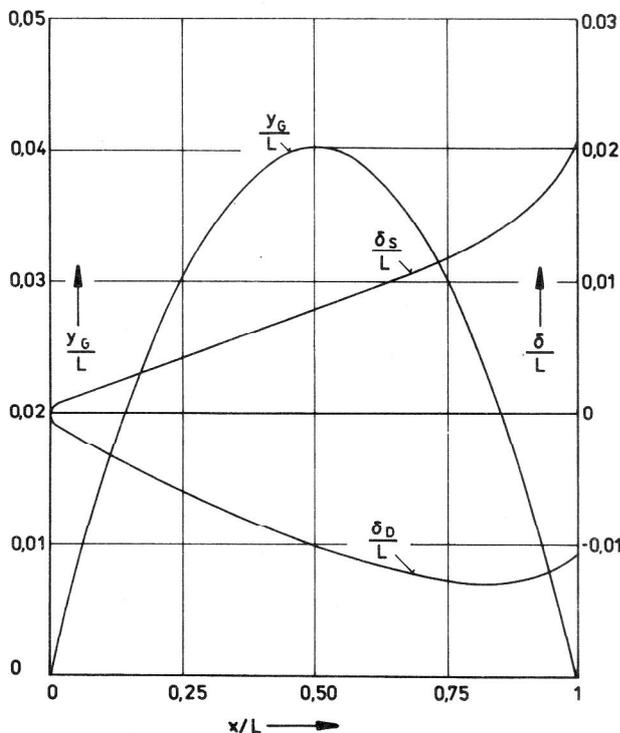


Bild 4

Im Bild 4 ist die Funktion für die Skelettlinie $y_G(x)$ und die Verteilung der Dicke der Wirbelschicht bei $Re = 10^7$ dargestellt worden. Der Maßstab in y -Richtung ist im Vergleich zur x -Richtung um den Faktor 25 größer gewählt worden.

Die Funktion $A(x/L)$ in der Wirbel dichtefunktion hat die Form

$$A\left(\frac{x}{L}\right) = \frac{\gamma_{id}(x)}{U_\infty} - \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\Gamma_{id}}{U_\infty \cdot L} \cdot \sqrt{1 - \left(1 - 2 \frac{x}{L}\right)^2} \quad (14)$$

Mit Gl. (14) und einen Wert $C = 0,125$ können die induzierten Geschwindigkeiten der Grenzschichtströmung, die entlang der gewölbten Platte entstehen, aus den in [10] veröffentlichten Beziehungen (29) bis (34) bestimmt werden. Wenn sie bekannt sind, können die Geschwindigkeitskomponenten in einem beliebigen Punkt der Ebene x, y mit Hilfe der Gleichungen

$$u(x, y) = u_{id}(x, y) + u_H(x, y) + U_\infty \quad (15)$$

$$v(x, y) = v_{id}(x, y) + v_H(x, y) \quad (16)$$

berechnet werden.

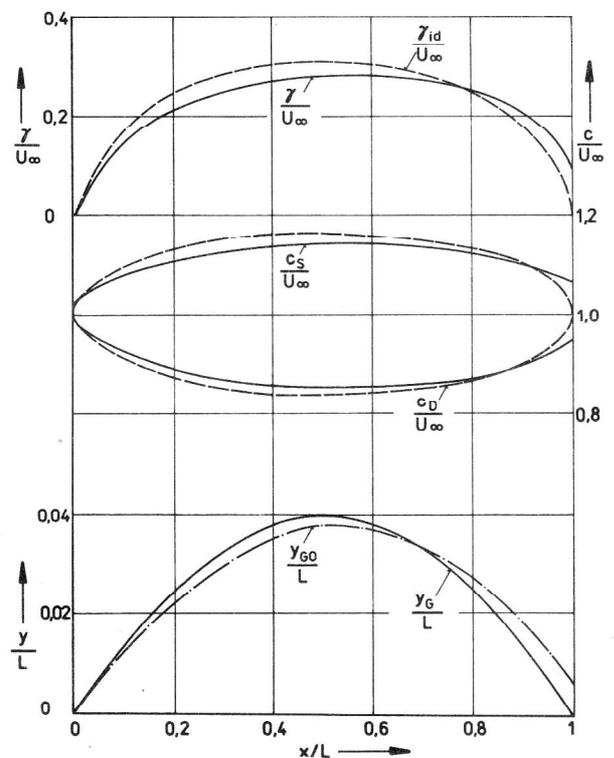


Bild 5

Im Bild 5 sind die Wirbelbelegungen für die Potentialströmung $\gamma_{id}(x)$ und die für den Fall der reibungsbehafteten Strömung korrigierte Wirbelbelegung $\gamma(x)$ dargestellt. Infolge der Reibung verändert sich die Wirbelbelegung entlang der Platte nach Gl. (5). Im Bild 5 sind weiterhin die Veränderungen der Geschwindigkeiten, die sich auf der Saug- und Druckseite der Platte an den Grenzen der Wirbelschicht ergeben, dargestellt worden. Diese Geschwindigkeitsverteilung an der Grenze zwischen Grenzschicht und Potentialströmung bestimmt nun die Druckverteilung in der Grenzschicht. Es ist interessant, die zur Wirbelbelegung $\gamma(x)$ gehörende „reibungsfreie“ Skelettlinie $y_{GO}(x)$ zu bestimmen. Der Vergleich zwischen den Linien $y_G(x)$ und $y_{GO}(x)$

zeigt uns, in welchem Maße die Platte wegen der Reibung verändert werden muß, damit eine entsprechende Auftriebskraft auf die gewölbte Platte wirkt.

5. Die turbulente Grenzschicht entlang eines Tragflügelprofils

Als ein weiteres Beispiel soll die Bestimmung der Grenzschichtströmung dienen, die entlang eines schwach gewölbten, dünnen Tragflügelprofils entsteht. Die Wölbung der Skelettlinie des Flügelprofils sei 4%. Die relative maximale Dicke des Profils senkrecht zur Skelettlinie sei 8%. Die dazugehörige Quell-Senken-Verteilung q wird in der folgenden Form angenommen:

$$q^*(x) = 0,0989 \left(\frac{x}{L}\right)^{1/2} - 0,0344 - 0,4491 \frac{x}{L} - 0,0125 \left(\frac{x}{L}\right)^2 + 0,2850 \left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad (17)$$

Die Wirbelbelegung γ_{id} wird entsprechend der Gl. (7) angenommen, weil die Wölbung der Skelettlinie des Profils auch 4% ist. Von den Rechendetails der geometrischen Form des Tragflügelprofils sehen wir ab, weil diese in der dazugehörigen Literatur gefunden werden können [2], [5]. Wir zeigen nur die Bestimmung der Grenzschicht. Das Tragflügelprofil wurde mit den erwähnten Belegungen maßstäblich im Bild 6 dargestellt. Die Dicken der Wirbelschichten δ_S und δ_D , die entlang der Kontur des Tragflügelprofils entstehen, sind mit Hilfe der Gleichung 19 in [10] berechnet worden, wobei U/U_∞ die folgende Form hat:

$$\frac{U}{U_\infty} = 1 + \frac{u_q}{U_\infty} \pm \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\Gamma_{id}}{U_\infty \cdot L} \cdot \sqrt{1 - \left(1 - 2 \frac{x}{L}\right)^2} \quad (18)$$

Die Reynoldszahl beträgt $Re = 10^7$. Bei der Berechnung der durch die Quellbelegung induzierten Geschwindigkeit u_q nach [10] Gl. 35 wurde die Näherung $y_G - y'_G = 0$ verwendet, weil ein leicht gewölbtes Profil angenommen wurde:

$$\frac{u_q}{U_\infty} = \frac{1}{2\pi} \int_0^L q^*(x') \frac{dx'}{x-x'} \quad (19)$$

(Einzelheiten der Rechnung siehe [2], [5], [10]).

Die Wirbeldichtefunktion der Wirbelschicht wurde mit Hilfe der Beziehungen 20 und 21 in [10] bestimmt. Die Funktion $A\left(\frac{x}{L}\right)$ ist durch Gl. 14 gegeben, wobei $\Gamma_{id}/(U_\infty \cdot L) = 0,25$ gilt. Die Konstante in der Wirbeldichtefunktion wurde $C = 0,125$ gesetzt. Die Geschwindigkeitskomponenten entlang des Tragflügelprofils, die durch die Wirbelschicht induziert werden, können mit den Gleichungen 21 bis 34 in [10] berechnet werden. Hierbei müßte für $y_G(x)$ streng genommen die Konturlinie des Tragflügelprofils eingesetzt werden. Man kann aber statt der Konturlinie die Skelettlinie des Profils nehmen, weil der Fehler bei schwach gewölbten Profilen sehr gering ist. Die Geschwindigkeitskomponenten in einem beliebigen Punkt der x, y -Ebene werden mit Hilfe der Gleichungen

$$u(x, y) = u_{id}(x, y) + u_H(x, y) + u_q(x, y) + U_\infty \quad (20)$$

$$v(x, y) = v_{id}(x, y) + v_H(x, y) + v_q(x, y) \quad (21)$$

berechnet.

Im Bild 6 wird die Geschwindigkeitsverteilung c/U_∞ innerhalb der Grenzschicht an insgesamt 12 Stellen entlang der Konturlinie des Tragflügels gezeigt.

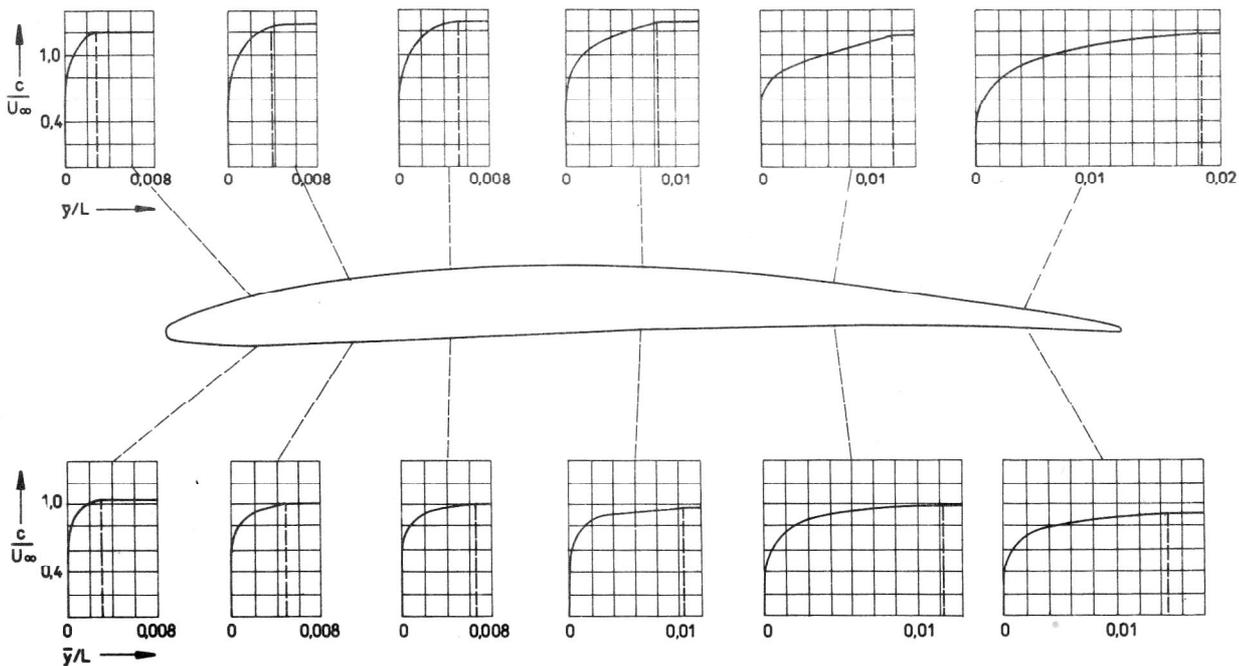


Bild 6

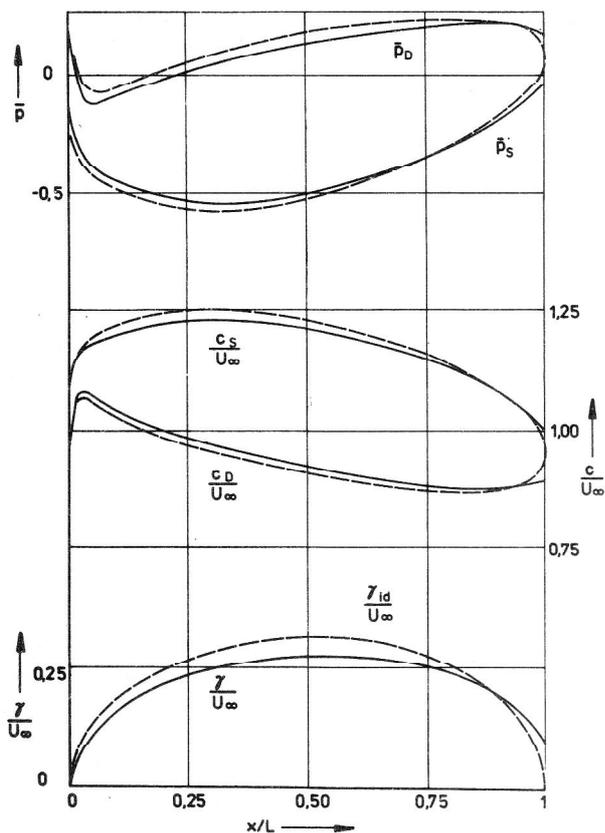


Bild 7

Die gestrichelte Linie in den Diagrammen der Geschwindigkeitsverteilung bedeutet die Dicke der Wirbelschicht. Im Bild 7 sind die Wirbelbelegung γ_{id} für den reibungsfreien Fall und die γ -Belegung für den Fall der realen, reibungsbehafteten Umströmung des Tragflügelprofils dargestellt. Weiterhin sind die Geschwindigkeitsverteilungen außerhalb der Grenzschicht entlang der Konturlinie des Tragflügelprofils und die dimensionslose Druckverteilung, die mit der Gleichung

$$\bar{p} = \frac{p - p_\infty}{\frac{\rho}{2} \cdot U_\infty^2} = 1 - \left(\frac{c}{U_\infty}\right)^2 \quad (22)$$

bestimmt wurden, aufgetragen. Auch hier wurden die Geschwindigkeits- und Druckverteilungen zum Vergleich sowohl für die reibungsbehaftete als auch für die reibungsfreie Umströmung berechnet und dargestellt. Die berechneten Auftriebs- und Widerstandsbeiwerte betragen $c_A = 0,46$ und $c_W = 0,0086$.

LITERATUR

- [1] Birnbaum, W.: Die tragende Wirbelfläche als Hilfsmittel zur Behandlung des ebenen Problems der Tragflügeltheorie. ZAMM 3 (1923), 290.
- [2] Scholz, N.: Aerodynamik der Schaufelgitter Bd. I, G. Braun Karlsruhe 1965, 157 – 177.
- [3] Frank, PH.; Mises, R.: Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik Bd. I, Dover Publ. New York – F. Vieweg Braunschweig 1961, 592 – 597.
- [4] Korn, A.: Lehrbuch der Potentialtheorie Bd. II, F. Vieweg Verlag, Berlin 1901, 41 – 68.
- [5] Czibere, T.: A hidrodinamikai recselmelet ket föfeladatanak potencielemeleti megoldasa, Akademiai doktori ertekezese 1965.
- [6] Truckenbrodt, E.: Ein Quadraturverfahren zur Berechnung der laminaren und turbulenten Reibungsschicht bei ebener und rotationssymmetrischer Strömung, Ing. Arch. 20 1952, 211.
- [7] Schlichting, H.: Grenzschicht-Theorie, G. Braun Karlsruhe 1965, 699 – 709.
- [8] Tietjens, O.: Strömungslehre, Springer Berlin – Heidelberg – New York 1970, 223
- [9] Szablewski, W.: Turbulente Scherströmungen, Akademie-Verlag Berlin 1976, 70
- [10] Czibere, T.: Berechnung ebener Grenzschichtströmungen mit Hilfe unstetiger Wirbelschichten. Technische Mechanik 2 (1981) 1.

Anschrift des Verfassers:
 Prof. Dr. sc. techn. Tibor Czibere
 Technische Universität Miskolc, UVR