

# Bahnsteuerung von Manipulatoren

Wolfgang Denk, Peter Maßer, Hendrik Rothe

In der Arbeit werden allgemeine Algorithmen zur Realisierung einer Bahnsteuerung von Manipulatoren beschrieben und ihre rechen-technische Erprobung an einem konkreten Beispiel demonstriert. Insbesondere werden Steuersignale für eine zeitoptimale Greiferführung bei vorgegebener Trajektorie und die dafür erforderlichen Antriebsmomente bzw. -leistungen berechnet.

## 0. Einleitung

In bezug auf die Steuerung von Manipulatoren lassen sich zwei Grundaufgaben formulieren. In der Grundaufgabe A werden die für die Führung des Greifers auf einer vorgegebenen Trajektorie erforderlichen Steuersignale ermittelt (Bahnsteuerung). In der Grundaufgabe B werden bei zwei voneinander verschiedenen vorgegebenen Lagen des Greifers (im Anschauungsraum!) Steuersignale derart ermittelt, daß der Greifer – in wohldefiniertem Sinne – optimal aus der einen Lage in die andere übergeführt wird (Punkt-zu-Punkt-Steuerung). Die Feinpositionierung des Greifers eines Manipulators erfolgt i.a. im Rahmen einer speziellen regelungstechnischen Aufgabe.

Algorithmen zur Lösung der Grundaufgabe A werden z. B. in [6], [7] angegeben. Die Grundaufgabe B kann zwar mit der nötigen mathematischen Strenge formuliert werden, ihre Lösung bereitet jedoch aus unterschiedlichen Gründen erhebliche Schwierigkeiten. Literaturhinweise finden sich in [6], [7]. Die regelungstechnische Aufgabe wird z. B. in [7], [9] behandelt.

Ziel vorliegender Arbeit ist es, die numerische Realisierung bereits aus der Literatur bekannter Algorithmen zur Lösung der Grundaufgabe A mittels Rechnerprogrammen darzustellen und dabei Kompatibilität mit dem Programmsystem LAGRANGE [1], das die Lagrange-schen Bewegungsdifferentialgleichungen eines Manipulators automatisch aufzustellen gestattet, zu erreichen.

Im einzelnen werden Algorithmen beschrieben und an einem konkreten Beispiel erprobt zur

- automatischen Aufstellung der geometrischen Zwangsbedingungen für die Greiferführung,
- Berechnung der Konfigurationenmannigfaltigkeiten des Manipulators in diskreten Stützstellen einer vorgegebenen Greifertrajektorie,
- Auswahl einer Optimalfolge möglicher Konfigurationen des Manipulators (nach [6]),
- Berechnung der zeitoptimalen Durchlaufung einer vorgegebenen Greifertrajektorie (nach [6]),
- Berechnung der für d) erforderlichen Antriebsmomente.

## 1. Kinematik

Voraussetzungen: Im folgenden werden ausschließlich solche Manipulatoren betrachtet, für die ein mechanisches Modell in Form eines holonomen Starrkörper-

systems mit kinematischer Baumstruktur ([2] bis [4]) existiert. (Andernfalls sind für Aa gewisse Modifikationen vorzunehmen.) Die starren Körper des Manipulators werden in bestimmter Weise von 1 bis K ( $K > 1$ ) nummeriert. Ein Bezugskörper mit der Nummer Null diene als Inertialsystem. Der Körper mit der Nummer K trage das eigentliche Greiferelement, dessen Kinematik und Dynamik im folgenden nicht betrachtet werden. Deshalb wird der Körper K mit dem Greiferelement identifiziert und auch selbst als Greifer bezeichnet (Greifer und Körper K sind hier ein und derselbe starre Körper!). Die als ideal und skleronom vorausgesetzten geometrischen Bindungen je zweier benachbarter Körper werden durch genau ein Gelenk (i.a. Dreh-Schubgelenk) definiert, wobei der Freiheitsgrad des Schub-Teilgelenks nicht größer als 2, der des Dreh-Teilgelenks maximal, d. h. 3, sein darf.

$\{0, e_{(i)}\}$  sei ein Inertialsystem mit orthonormierter Basis,  $S_k$  bezeichne den Massenmittelpunkt,  $\{S_k, E_{k,i}\}$  eine körperfeste orthonormierte Basis des Körpers k,  $\xi^i$  seien körperfeste Koordinaten bzgl. dieser Basis. Die Lage eines Systems freier starrer Körper im Inertialsystem wird beschrieben durch

$$\vec{OP}_k = r_k = R_k + \xi^i (P_k)_i E_i, \quad \vec{OS}_k = R_k = X_k^{(i)} e_{(i)}$$

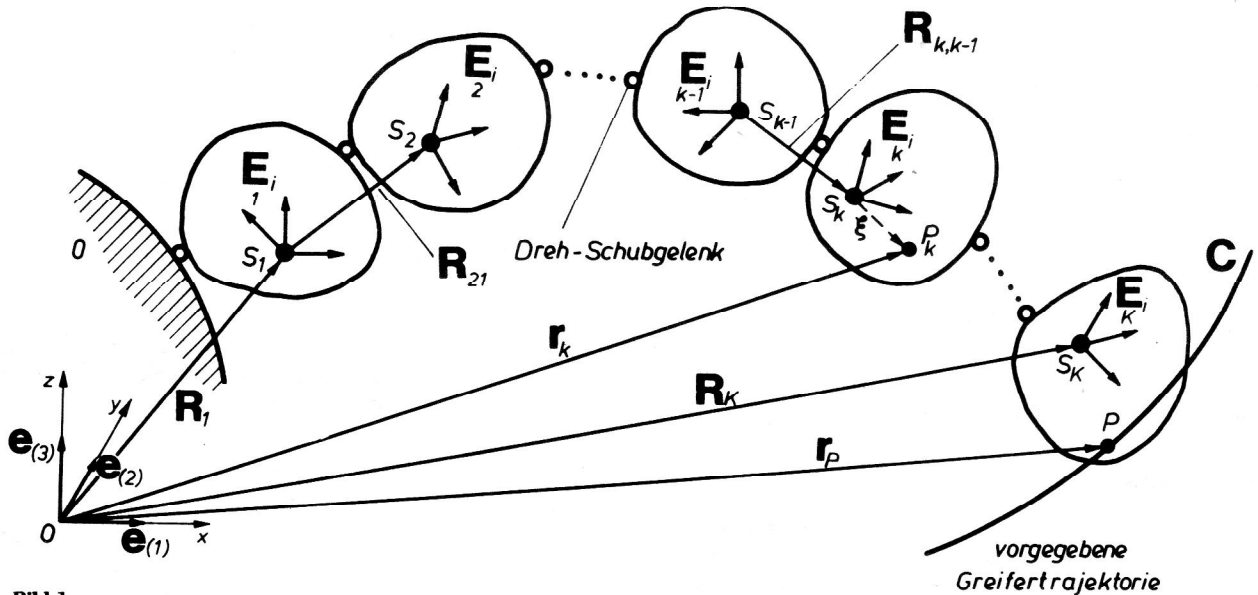
$$E_i = E_{k,i}^{(i)} e_{(i)}, \quad k = 1, \dots, K.$$

(Summationsvereinbarung: Über doppelt auftretende Indizes wird stets über die entsprechende Indexmenge summiert.) Dabei ist  $P_k$  ein beliebiger Punkt des Körpers k,  $E_{k,i}^{(i)}$  sind orthonormierte Drehmatrizen; geklammerte Indizes verweisen auf die Inertialbasis. Für jeden freien starren Körper k hängen die  $X_k^{(i)}, E_{k,i}^{(i)}$  von 6 Parametern  $x_k^1, \dots, x_k^6$  ab:

$$X_k^{(i)} = X_k^{(i)}(x_k^1, x_k^2, x_k^3), \quad E_{k,i}^{(i)} = E_{k,i}^{(i)}(x_k^4, x_k^5, x_k^6),$$

$$k = 1, \dots, K. \quad (1.1)$$

( $x_k^1, x_k^2, x_k^3$ : z. B. Zylinder- oder sphärische Koordinaten;  $x_k^4, x_k^5, x_k^6$ : z. B. Euler- oder Cardan-Winkel.) Die geome-



**Bild 1**  
Mechanisches Modell eines Manipulators

trischen Bindungen aller Körper (einschließlich des Bezugskörpers) untereinander in der Form

$$Z^m(x_k^1, x_k^2, x_k^3, x_k^4, x_k^5, x_k^6) = 0, \quad m = 1, \dots, M < 6K, \quad (1.2)$$

$$\text{rang} \left( \frac{\partial Z^m}{\partial x^s} \right) = M, \quad s = 1, \dots, 6$$

(holonome Zwangsbedingungen!) werden mittels generalisierter Koordinaten  $q^a$ ,  $a = 1, \dots, n$  ( $n = \text{Freiheitsgrad des Starrkörpersystems}$ ) durch

$$x_k^s = x_k^s(q), \quad s = 1, \dots, 6; \quad k = 1, \dots, K \quad (1.3)$$

befriedigt ( $q = (q^a) \equiv (q^1, q^2, \dots, q^n)$ ). Mit (1.3) folgt aus (1.1) die Darstellung der Lage eines Manipulators

a) im 3-dimensionalen Euklidischen Anschauungsraum  $E^3$ :

$$R_k = X_k^{(i)}(q) e_{(i)}: \text{Lagen der Massenmittelpunkte aller Körper,}$$

$$E_{k i} = E_{k i}^{(i)}(q) e_{(i)}: \text{Lagen der körperfesten orthonormierten Dreibeine (= Orientierung) aller Körper,}$$

$$\text{Kurz: } \left\{ X_k^{(i)}(q); E_{k i}^{(i)}(q) \right\},$$

b) im  $n$ -dimensionalen Konfigurationsraum  $R^n$ :

$$\left\{ q^a \mid x_k^s = x_k^s(q), \quad s = 1, \dots, 6; \quad k = 1, \dots, K \right\},$$

$$\text{kurz: } q = \{q^a\}.$$

$q$  heißt repräsentierender Punkt des Manipulators. Damit kann die Bewegung des Manipulators dargestellt werden als die Bewegung seines repräsentierenden Punktes im  $n$ -dimensionalen Konfigurationsraum  $R^n$ . Bahnsteuerung soll im folgenden heißen: Ein im Körper

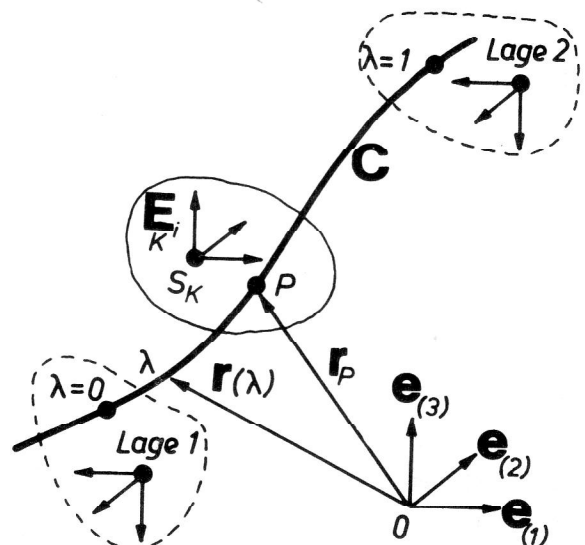
$K$  (Greifer) beliebig fixierter Punkt  $P$  durchläuft eine vorgegebene (i. a. stetige, stückweise glatte) Kurve  $C: \{X^{(i)}(\lambda) \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$ , wobei die Orientierung des Körpers  $K$  ebenfalls längs  $C$  vorgegeben ist, d. h.,  $E_{K i} = E_{K i}(\lambda)$ .

Die Parameterwerte  $\lambda = 0$  bzw.  $\lambda = 1$  sollen den Lagen 1 bzw. 2 entsprechen (vgl. Bild 2). Daraus resultieren für die generalisierten Koordinaten  $q^a$  geometrische Zwangsbedingungen, die auch mittels Rechner nach folgendem Algorithmus – formalanalytisch – ermittelt werden können. Es ist (vgl. Bild 1)

$$\ddot{R}_K = \sum_{k=1}^K \ddot{R}_{k,k-1} = X_K^{(i)} e_{(i)}$$

mit

$$R_{1,0} := R_1, \quad R_{k,k-1} = X_{k,k-1}^1 \quad E_{k-1} = X_{k,k-1}^1 \quad E_{k-1}^{(j)} e_{(j)}, \quad (1.4)$$



**Bild 2**  
Überführung des Greifers aus der Lage 1 in die Lage 2 längs einer vorgegebenen Kurve

$$k = 1, \dots, K, \text{ falls } X_k^i = X_1^{(i)} \text{ und } E_{0,i} = e_{(i)} E_{0,i}^{(i)} = \delta_i^{(i)}$$

gesetzt wird. Für die cartesischen Koordinaten des Ortsvektors  $r_p = R_K + \xi^i(P) E_i$  gilt, mit

$$X_K^{(i)} = \sum_{k=1}^K X_{k,k-1}^i E_{k-1}^{(i)} \text{ aus (1.4),}$$

$$X_P^{(i)} = X_K^{(i)} + \xi^i E_i^{(i)} = \sum_{k=1}^{K+1} X_{k,k-1}^i E_{k-1}^{(i)} =: f^{(i)}(q),$$

falls  $X_{K+1,K}^i = \xi^i$  gesetzt wird. Für die absolute Drehmatrix des Greifers gilt mit  $E_i = E_{k,k-1}^j E_{k-1}^j$  eine analoge

Beziehung:

$$E_1^{(i)} = E_{K,K-1}^j \dots E_{1,1}^j E_1^{(i)} =: f_1^{(i)}(q).$$

Damit lassen sich die geometrischen Zwangsbedingungen für die Greiferführung

$$r_p(q) = r(\lambda) \equiv X^{(i)}(\lambda) e_{(i)}, E_i(q) = E_i(\lambda) \equiv E_i^{(i)}(\lambda) e_{(i)}$$

in der Form

$$\Phi^{(i)}(q, \lambda) := X^{(i)}(\lambda) - f^{(i)}(q) = 0, \quad (1.5)$$

$$\Phi_1^{(i)}(q, \lambda) := E_1^{(i)}(\lambda) - f_1^{(i)}(q) = 0$$

schreiben. Sind die Funktionen  $X^{(i)}(\lambda), E_1^{(i)}(\lambda)$  mittelbar durch

$$X^{(i)} = X^{(i)}(x^1(\lambda), x^2(\lambda), x^3(\lambda)),$$

$$E_1^{(i)} = E_1^{(i)}(x^4(\lambda), x^5(\lambda), x^6(\lambda))$$

gegeben, so folgt mit den (lokal eindeutig bestimmten) Umkehrfunktionen

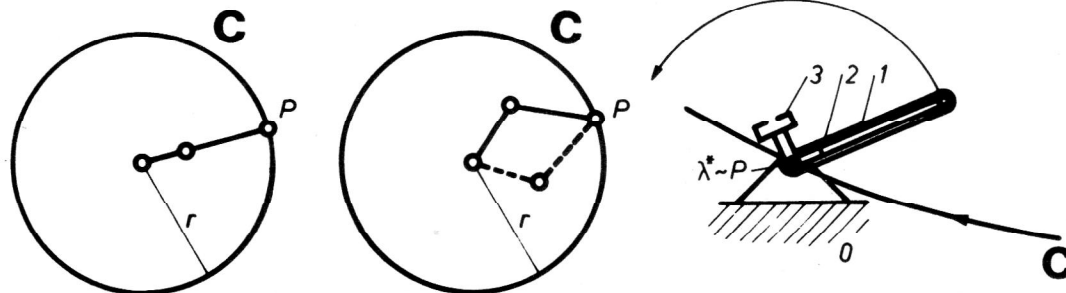
$$x^s = h^s(X), \quad s = 1, 2, 3 \quad x^s = h^s(E), \quad s = 4, 5, 6$$

und

$$f^s(q) := \begin{cases} h^s(f^{(i)}(q)), & s = 1, 2, 3 \\ h^s(f_1^{(i)}(q)), & s = 4, 5, 6 \end{cases}$$

**Bild 3**

Dimension von Konfigurationenmannigfaltigkeiten  $L_\lambda$



a)  $\dim L_\lambda = 1$  für alle  $\lambda$

b)  $\dim L_\lambda = 2$  für alle  $\lambda$

c)  $\dim L_\lambda = \infty$

eine in der Literatur oft zitierte Form der Zwangsbedingungen:

$$x^s = f^s(q), \quad s = 1, \dots, 6, \text{ bzw. } x = f(q). \quad (1.6)$$

(1.5) bzw. (1.6) bilden die Grundlage für die Berechnung möglicher Konfigurationen  $q(\lambda)$  eines Manipulators, wenn die Lage des Körpers  $K$  (Greifer) längs  $C$  gemäß  $x = x(\lambda)$  vorgeschrieben ist.

Ist umgekehrt die Menge aller möglichen Konfigurationen eines Manipulators bekannt (z. B.:  $q_{\min}^a \leq q^a \leq q_{\max}^a$ ), so dient (1.6) zur Ermittlung des Arbeitsraumes des Manipulators.

Durch (1.6) wird eine (global i. a. nicht umkehrbar) eindeutige Abbildung

$$f: D_q \rightarrow D_x$$

eines gewissen Gebietes  $D_q \subset R^n$  auf ein gewisses Gebiet  $D_x \subset R^6$  definiert, falls für den Definitionsbereich  $D_q$  und Wertebereich  $D_x$  gilt:  $D(f) = D_q$  und  $W(f) = D_x$  ( $f(D_q) = D_x$ ). D. h., jedem  $q \in D_q$  ist vermöge  $f$  genau ein  $x \in D_x$  zugeordnet („Direkte Aufgabe“ in [6]). Umgekehrt besitzt die Gleichung (1.6) bei vorgegebenem  $x$  eine Lösung

$$q = f^{-1}(x)$$

nur dann, wenn  $x \in D(f^{-1})$ ; („Umkehraufgabe“ in [6]). In diesem Fall ist  $q$  wegen des nichtlinearen Charakters der Abbildung  $f$  global i. a. nicht eindeutig bestimmt (auch für  $\text{rang}(\partial_q f) = \text{maximal}$  folgt nur die lokal-eindeutige Auflösbarkeit von (1.6)).

**Definition:** Sei  $x(\lambda) \in D(f^{-1})$  für alle  $\lambda \in [0, 1]$ . Dann heißt für jedes feste  $\lambda, \lambda \in [0, 1]$  die Lösungsmenge von (1.6)

$$L_\lambda := \{q(\lambda) \mid x(\lambda) = f(q)\}$$

**Konfigurationenmannigfaltigkeit** des Manipulators (= Menge aller möglichen Lagen).

$L_\lambda$  kann leer sein ( $x(\lambda) \notin D(f^{-1})$ ), endlich viele, aber auch unendlich viele (sogar überabzählbar unendlich viele) Elemente enthalten (vgl. Bild 3). Die Dimension von  $L_\lambda$  hängt bei festem  $f$  von  $x(\lambda)$ , also von  $C$  ab. Punkte  $(q, \lambda)$ , in denen sich die Lösungen der nichtlinearen Gleichungen (1.5) bzw. (1.6) verzweigen (Dimensionsänderung von  $L_\lambda$ ), heißen Verzweigungs- oder Bifurkationspunkte. Ihre Kenntnis ist für die Betrachtungen in Abschnitt 2 wesentlich; auf eine analytische Untersuchung dieser Frage muß hier jedoch verzichtet werden.

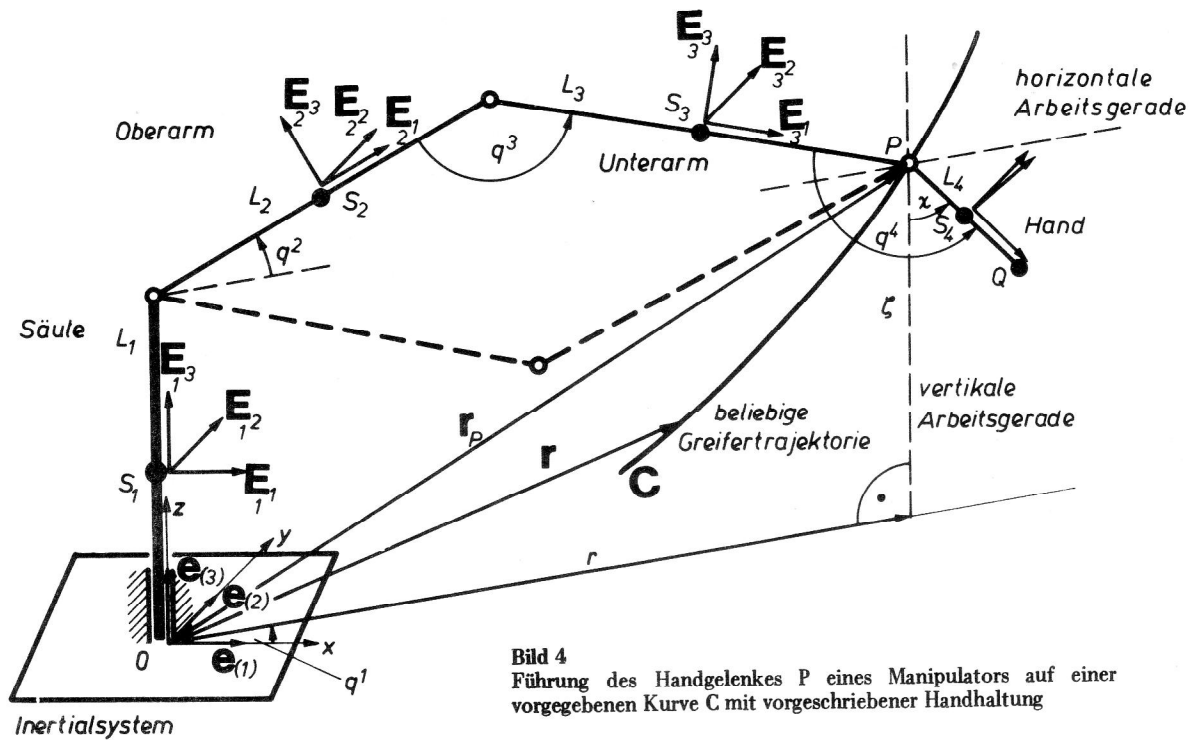


Bild 4 Führung des Handgelenkes P eines Manipulators auf einer vorgegebenen Kurve C mit vorgeschriebener Handhaltung

Beispiel: Für den in Bild 4 dargestellten Manipulator werden unter Benutzung von Zylinderkoordinaten die geometrischen Zwangsbedingungen (1.6) für die Greiferführung auf C und die Konfigurationenmannigfaltigkeiten  $L_\lambda$  ermittelt.

Die Zwangsbedingungen des Starrkörpersystems „Manipulator“ sind:

$$X_1^{(i)} e_{(i)} - \frac{L_1}{2} E_1^3 = 0,$$

$$X_1^{(i)} e_{(i)} + \frac{L_1}{2} E_1^3 = X_2^{(i)} e_{(i)} - \frac{L_2}{2} E_2^1,$$

$$X_2^{(i)} e_{(i)} + \frac{L_2}{2} E_2^1 = X_3^{(i)} e_{(i)} - \frac{L_3}{2} E_3^1,$$

$$X_3^{(i)} e_{(i)} + \frac{L_3}{2} E_3^1 = X_4^{(i)} e_{(i)} - \frac{L_4}{2} E_4^1,$$

$$E_1^3 X e_{(3)} = 0, \quad E_2^k \cdot E_2^k = 0 \quad \text{für } k = 2, 3, 4.$$

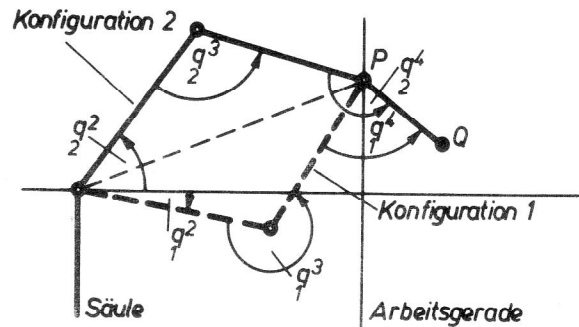


Bild 5 Konfigurationen 1 und 2 des Manipulators von Bild 4

Aus diesen 20 Bedingungen für die 24 Unbekannten

$X_k^{(i)}, \psi, \varphi, \vartheta$  (z. B. Euler-Winkel) folgt

$$R_{1,0} = X_{1,0}^{(i)} e_{(i)} = (X_1^{(i)} - X_0^{(i)}) e_{(i)} = \frac{L_1}{2} E_1^3 = X_{1,0}^i E_{1,0}^i, \quad E_{1,1}^{(i)} = E_{1,1}^{(i)}(q^1),$$

$$R_{2,1} = X_{2,1}^{(i)} e_{(i)} = (X_2^{(i)} - X_1^{(i)}) e_{(i)} = \frac{L_1}{2} E_1^3 + \frac{L_2}{2} E_2^1 = X_{2,1}^i E_{2,1}^i, \quad E_{2,1}^j = E_{2,1}^j(q^2),$$

$$R_{3,2} = X_{3,2}^{(i)} e_{(i)} = (X_3^{(i)} - X_2^{(i)}) e_{(i)} = \frac{L_2}{2} E_2^1 + \frac{L_3}{2} E_3^1 = X_{3,2}^i E_{3,2}^i, \quad E_{3,2}^j = E_{3,2}^j(q^3),$$

$$R_{4,3} = X_{4,3}^{(i)} e_{(i)} = (X_4^{(i)} - X_3^{(i)}) e_{(i)} = \frac{L_3}{2} E_3^1 + \frac{L_4}{2} E_4^1 = X_{4,3}^i E_{4,3}^i, \quad E_{4,3}^j = E_{4,3}^j(q^4),$$

$$q^1 = \alpha(E_{1,1}, e_{(1)}), \quad q^2 = \alpha(E_{2,1}, E_{1,1}), \quad q^3 = \alpha(E_{3,1}, E_{2,1}), \quad q^4 = \alpha(E_{4,1}, E_{3,1}).$$

Damit sind zugleich gewisse Eingabedaten für den Rechner (vgl. Abschnitt 4) ermittelt. Der Freiheitsgrad des Manipulators ist  $n = 4$ , als generalisierte Koordinaten  $q^a$  werden – gemäß Bild 4 – gewählt:

$$q^1 = \angle (E_{11}, e_{(1)}), \quad q^2 = \angle (E_{21}, E_{11}),$$

$$q^3 = \angle (E_{31}, E_{21}) + \pi, \quad q^4 = \angle (E_{41}, E_{31}) + \pi,$$

$$\text{und es sei } D_q = \left\{ q \mid 0 \leq q^1 \leq 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq q^2 \leq \frac{\pi}{2}, \right. \\ \left. 0 \leq q^3 \leq 2\pi, 0 \leq q^4 \leq 2\pi \right\}.$$

Darstellung der Kurve C in Zylinderkoordinaten

$$x^1 := \vartheta, \quad x^2 := r, \quad x^3 := \zeta:$$

$$C: r(x) = x^2 e_2(x^1) + x^3 e_3,$$

$$e_2 = e_r = \cos x^1 e_{(1)} + \sin x^1 e_{(2)}.$$

(Damit ist keineswegs eine zeitliche Durchlaufung von C vorgeschrieben!). Mit  $r(x) = r_p(q)$  folgen die Zwangsbedingungen  $x = f(q)$  für die Greiferführung:

$$x^1 \equiv \vartheta = q^1$$

„Drehbewegung der Säule“ (1.7a)

$$x^2 \equiv r = L_2 \cos q^2 - L_3 \cos(q^2 + q^3)$$

„Radialbewegung von P“ (1.7b)

$$x^3 \equiv \zeta = L_1 + L_2 \sin q^2 - L_3 \sin(q^2 + q^3),$$

„Vertikalbewegung von P“ (1.7c)

$$x^4 \equiv \chi = q^2 + q^3 + q^4 - \frac{3}{2}\pi$$

„Drehbewegung der Hand“ (1.7d)

Die Jacobi-Matrix ist wegen  $|\partial_q f| = -L_2 L_3 \sin q^3$  regulär für alle  $q^3 \neq 0, \pi, 2\pi$ , folglich sind die Gleichungen (1.7) nach den  $q$  auflösbar (lokal eindeutig, global u. U. mehrdeutig). Die Singularitäten  $q^3 = 0, \pi, 2\pi$  der Jacobi-Matrix stellen *entartete* Konfigurationen des Manipulators dar. Aus (1.7b, c) folgen mit

$$A := \sqrt{r^2 + (L_1 - \zeta)^2}, \quad \alpha = \begin{cases} \arctan \frac{r}{\zeta - L_1}, & \zeta > L_1 \\ \arctan \frac{r}{\zeta - L_1} + \pi, & \zeta < L_1 \\ \frac{\pi}{2}, & \zeta = L_1 \end{cases} \quad (0 < \alpha < \pi),$$

$$H_1 := \frac{1}{2L_2 A} \{L_2^2 - L_3^2 + A^2\}, \quad H_2 := \frac{1}{2L_3 A} \{L_2^2 - L_3^2 - A^2\}$$

die beiden Gleichungen

$$\sin(q^2 + \alpha) = H_1, \quad \sin(q^2 + q^3 + \alpha) = H_2. \quad (1.8a-b)$$

Für  $|H_1| \leq 1$  und  $\frac{\pi}{2} - \arcsin H_1 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} + \arcsin H_1$  besitzt (1.8a) im Intervall  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  die beiden reellen Lösungen

$$q_1^2 = \arcsin H_1 - \alpha, \quad q_2^2 = \pi - \alpha - \arcsin H_1 (\geq q_1^2).$$

Sei  $|H_2| \leq 1$ . Dann ist mit  $\alpha + q^2 = \begin{cases} \arcsin H_1 \\ \pi - \arcsin H_1 \end{cases}$

$$\arcsin H_2 \leq \alpha + q^2 \leq \pi - \arcsin H_2,$$

da stets  $H_1 \geq H_2$  ist. Deshalb besitzt (1.8b) für jedes feste  $q^2 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  im Intervall  $[0, 2\pi]$  genau die beiden reellen Lösungen

$$q_1^3 = 2\pi + \arcsin H_2 - \arcsin H_1,$$

$$q_2^3 = \arcsin H_1 - \arcsin H_2 (\leq q_1^3).$$

Damit ergeben sich die beiden möglichen Konfigurationen des Manipulators:

$$\text{Konfiguration 1: } \left\{ q_1^1, q_1^2, q_1^3, q_1^4 \right\},$$

$$\text{Konfiguration 2: } \left\{ q_2^1, q_2^2, q_2^3, q_2^4 \right\},$$

$$q_i^4 := \frac{3}{2}\pi + \chi - q_i^2 - q_i^3, \quad i = 1, 2, \text{ und } \chi \text{ so, daß}$$

$0 \leq q^4 \leq 2\pi$ , vgl. Bild 5.  $\chi = 0, \pi$  bzw.  $\chi = \pm \frac{1}{2}\pi$  bedeutet vertikale bzw. horizontale Handhaltung. Soll der Punkt Q der Hand auf einer vorgegebenen Kurve C geführt werden, so ist in (1.7b, c)

$$r = L_2 \cos q^2 - L_3 \cos(q^2 + q^3) + L_4 \cos(q^2 + q^3 + q^4),$$

$$\zeta = L_1 + L_2 \sin q^2 - L_3 \sin(q^2 + q^3) + L_4 \sin(q^2 + q^3 + q^4)$$

zu setzen.

**Bemerkungen:**

- Gelegentlich sind cartesische Koordinaten für die Parameterdarstellung der Greifertrajektorie anderen Koordinaten vorzuziehen. Dann ist  $x^s = X(s)$ ,  $s = 1, 2, 3$  zu setzen.
- Erfolgt die Überführung der Lage 1 des Körpers K (Greifer) in die Lage 2 längs eines Geradenstückes, das die Punkte  $X_1^{(i)}$  und  $X_2^{(i)}$  verbindet, so ist  $X^{(i)}(\lambda) := (1-\lambda)X_1^{(i)} + \lambda X_2^{(i)}$ ,  $0 \leq \lambda \leq 1$  zu setzen, falls  $\lambda = 0$  der Lage 1 und  $\lambda = 1$  der Lage 2 entspricht.

Praktische Lösung der Umkehraufgabe:

Nicht in jedem Falle lassen sich die Gleichungen (1.5) bzw. (1.6) in der im Beispiel demonstrierten Weise nach den  $q$  auflösen. Die Lösung der Umkehraufgabe kann praktisch mittels eines zugeordneten Optimierungsproblems erfolgen. Denn die Lösung des Systems nichtlinearer Gleichungen (1.5) ist äquivalent mit der Minimierungsaufgabe

$$\begin{aligned} \text{Min } F(q, \lambda), \quad F(q, \lambda) &:= \sum_{(i)=1}^3 [X^{(i)}(\lambda) - f^{(i)}(q)]^2 + \\ q \in D_q & \\ \lambda \text{ fix} & \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$+ \sum_{\substack{i=1 \\ (j)=1}}^3 [E_i^{(i)}(\lambda) - f_i^{(i)}(q)]^2.$$

Die Zielfunktion  $F(q, \lambda)$  wird bei vorgegebener Kinematik des Manipulators mittels Rechner formalanalytisch bestimmt (PL/1-FORMAC, [1]) und der Parameter  $\lambda$  gemäß  $\lambda_k = \lambda(k) = \frac{k}{M}$ ,  $k = 0, 1, \dots, M$ ,  $M$  beliebig, äquidistant diskretisiert, so daß  $M+1$  Optimierungsaufgaben zu lösen sind.  $k$  fungiert hierbei als diskrete Variable und bezeichnet die Stützstelle  $\lambda_k$  auf  $C$ , ist also nicht mit der Nummer eines Körpers des Manipulators zu verwechseln. Die Optimierungsaufgaben werden zweckmäßigerweise wie folgt gelöst: Ausgehend von einer zulässigen Lösung  $q^{(0)}(\lambda_k) \in D_q$ ,  $\lambda_k$  fix, als „Startpunkt“ (Auswahl mittels Monte-Carlo-Methode) werden sukzessive neue zulässige Lösungen  $q^{(p)}(\lambda_k) \in D_q$ ,  $p = 1, 2, \dots$  bestimmt derart, daß die Folge  $\{F(q^{(p)}(\lambda_k), \lambda_k)\}$  für  $p = 0, 1, 2, \dots$  streng monoton fallend ist. Dabei können diverse Suchverfahren (z. B. Fibonacci-Methode, achsenparallele Suche, Gradientenverfahren, Rosenbrock-, Newton-Raphson-, Fletcher-Powell-Verfahren) zur Erhöhung der Konvergenzgeschwindigkeit gekoppelt werden. Um zu vermeiden, daß die Folge  $\{F(q^{(p)}(\lambda_k), \lambda_k)\}$  nur gegen ein lokales Minimum konvergiert, wird der Suchprozeß von mehreren, nach der Monte-Carlo-Methode bestimmten, Startpunkten aus wiederholt. Geschieht dies hinreichend oft, so können mit großer Wahrscheinlichkeit alle Nullstellen der Funktion  $F(q, \lambda_k)$  gefunden werden, vorausgesetzt, es existieren höchstens endlich viele. Die Suche wird abgebrochen, wenn  $F(q^{(p^*)}(\lambda_k), \lambda_k) < \epsilon$ ,  $\epsilon > 0$  und hinreichend klein. In dem Fall endlich vieler Nullstellen werden die Elemente der Menge  $\{q^{(p^*)}(\lambda_k) \mid \lambda_k \text{ fix}\}$  numeriert:  $q(\lambda_k), j = 1, 2, \dots$

Wegen der Stetigkeit von  $F(q, \lambda)$  bzgl. beider Argumente können die  $q(\lambda_k)$  als „Startlösung“ des Problems  $\text{Min } F(q, \lambda_{k+1})$  dienen. Dadurch kann eine beträchtliche Rechenzeitverkürzung erzielt werden. Unter Ausnutzung der Beziehung (1.6) sowie der daraus folgenden,  $dx = \partial_q f dq$ , ergibt sich bei Regularität der Jacobi-Matrix eine Zeit für die Berechnung einer Lage von weniger als 0,9 ms (vgl. [7], real-time-control). Verzweigungen und damit verbundene Änderungen der Dimension von Konfigurationenmannigfaltigkeiten bleiben bei dieser Betrachtungsweise allerdings unberücksichtigt.

## 2. Optimalfolgen möglicher Konfigurationen

Mit der Diskretisierung des Parameters  $\lambda$  resultiert aus der Optimierungsaufgabe (1.9) eine Folge von Mengen möglicher Konfigurationen eines Manipulators:

$$\{L_k\}, \quad k = 0, 1, \dots, M;$$

$$L_k := \left\{ q^a(k) \mid x(\lambda_k) - f(q(k)), \quad q(k) \in D_q \right\}_j$$

mit  $D_q := \left\{ q \mid q_{\min}^a \leq q^a \leq q_{\max}^a \right\}$ .

Diese bilden die Grundlage für die Auswahl einer optimalen Folge möglicher Konfigurationen.  $s_k := \dim L_k = |L_k|$  bezeichne die Dimension der Konfigurationenmannigfaltigkeit  $L_k$  und  $J_k$  die Menge aller Indizes möglicher Konfigurationen in der  $k$ -ten Stützstelle  $\lambda_k$  von  $C$ . Dann ist  $s_k = |J_k|$ . Die durch die längs  $C$  vorgegebene Folge  $\{x(\lambda_k)\}$  induzierten möglichen Bewegungen eines Manipulators heißen *Elementarbewegungen* (elementary motions, Abkürzung: ELMO).  $[(k, j), (k+1, m)]$  bezeichne die Elementarbewegung aus der Stützkonfiguration  $(k, j)$  in die Stützkonfiguration  $(k+1, m)$ ,  $j \in J_k$ ,  $m \in J_{k+1}$ ,  $k = 0, 1, \dots, M-1$ . Dann entsprechen einer Folge von Stützintervallen  $\{[\lambda_k, \lambda_{k+1}]\}$  auf  $C$  endlich viele Folgen von Elementarbewegungen  $\{[(k, j), (k+1, m)]\}$ , und es kann ein Optimalitätskriterium mit *additivem* Zielfunktional formuliert werden:

$$\text{Min } \left[ \sum_{k=0}^{M-1} r_{jm}(k) \right], \quad j \in J_k, m \in J_{k+1}, k = 0, 1, \dots, M-1, \quad (2.1)$$

wobei  $r_{jm}(k) := r_k [q(k), q(k+1)]$  ein der Elementarbewegung  $[(k, j), (k+1, m)]$  eindeutig zugeordneter Wert (reelle Zahl) ist, der nur von den Stützkonfigurationen der beiden benachbarten Stützstufen  $k$  und  $k+1$  abhängt.

Beispiele für  $r_{jm}(k)$  sind:

$$r_{jm}(k) = \begin{cases} \tau_{jm}(k) = \text{Max}_{a \in \{1, \dots, n, j\}} |q^a(k) - q^a(k+1)| / v_{\max}^a \\ \rho_{jm}(k) = \sum_{a=1}^n |q^a(k) - q^a(k+1)| / d^a \end{cases}$$

mit

$$v_{\max}^a = \text{Max} |\dot{q}^a(t)| = \text{dem Betrage nach größte Geschwindigkeit des } a\text{-ten Antriebes,}$$

$$d^a = \text{Koeffizient des spezifischen Energieverbrauchs des } a\text{-ten Antriebes.}$$

Dabei bedeutet  $\tau_{jm}(k)$  die kürzestmögliche Arbeitszeit des Manipulators, die für die Elementarbewegung  $[(k,j), (k+1,m)]$  erforderlich ist (Quasioptimalität bzgl. der Zeit).  $\rho_{jm}(k)$  charakterisiert den für die Elementarbewegung  $[(k,j), (k+1,m)]$  erforderlichen Energieverbrauch aller Antriebe des Manipulators (Quasioptimalität bzgl. der Energie).

Stützkonfigurationen, die die Optimierungsaufgabe (2.1) lösen, heißen *optimale* Stützkonfigurationen. Sie können mittels dynamischer Optimierung (Bellmansches Optimalitätsprinzip) berechnet werden. Die prinzipielle Vorgehensweise wird an einer geometrischen Darstellung erläutert, vgl. Bild 6. Dazu sei ein Koordinatensystem der diskreten Variablen  $k, j$  ( $k = 0, 1, \dots, M; j = 1, \dots, S = \text{Max } s_k$ ) konstruiert und jeder möglichen Konfiguration

$q_j(k) = (q_j^a(k))$  genau ein Punkt  $(k, j)$  dieses Koordinatensystems zugeordnet. Die Elementarbewegung  $[(k, j), (k+1, m)]$  aus der Stützkonfiguration  $q_j(k)$  in die Stütz-

konfiguration  $q_m(k+1)$  wird durch eine Verbindung der Punkte  $(k, j), j \in J_k$  und  $(k+1, m), m \in J_{k+1}$  mittels genau eines stetigen Kurvenstücks (z. B. Geradenstück) symbolisiert. In der Sprache der Graphentheorie heißt das:

Jeder Kante (Verbindung)  $u[(k, j), (k+1, m)], j \in J_k, m \in J_{k+1}, k = 0, 1, \dots, M-1$  ist genau ein geordnetes Paar  $((k, j), (k+1, m))$  von Knoten zugeordnet. Der so definierte Graph  $\Gamma_L$  heißt Graph der möglichen Konfigurationsfolgen.

Jeder Kante  $u[(k, j), (k+1, m)] \in \Gamma_L$  wird die „Länge“  $r_{jm}(k)$  zugeordnet:  $r_{jm}(k) := \|u[(k, j), (k+1, m)]\|$  (Bewertung der Kanten des Graphen  $\Gamma_L$ ).

Dabei hat die „Länge“  $r_{jm}(k)$  i. a. nichts mit der Euklidischen Länge des die Knoten  $(k, j)$  und  $(k+1, m)$  verbindenden Geradenstücks zu tun. (2.1) bedeutet dann, einen Weg in  $\Gamma_L$  mit minimaler Länge aus einer Anfangskonfiguration  $(0, l), l \in J_0$ , in die Endkonfigurationenmannigfaltigkeit  $L_M$  zu ermitteln (MINPATH). Im Sinne der Variationsrechnung liegt also eine Variationsaufgabe mit freiem rechten Rand vor.

Sei  $P(k, j)$  die Länge des kürzesten Weges aus  $(0, l)$  in  $(k, j)$ . Dann lautet die Bellman-Gleichung für  $P(k, j)$ :

$$P(k+1, m) = \text{Min}_{j \in J_k} \{ r_{jm}(k) + P(k, j) \}, \quad (2.2)$$

$$k = 0, 1, \dots, M-1, P(0, l) = 0.$$

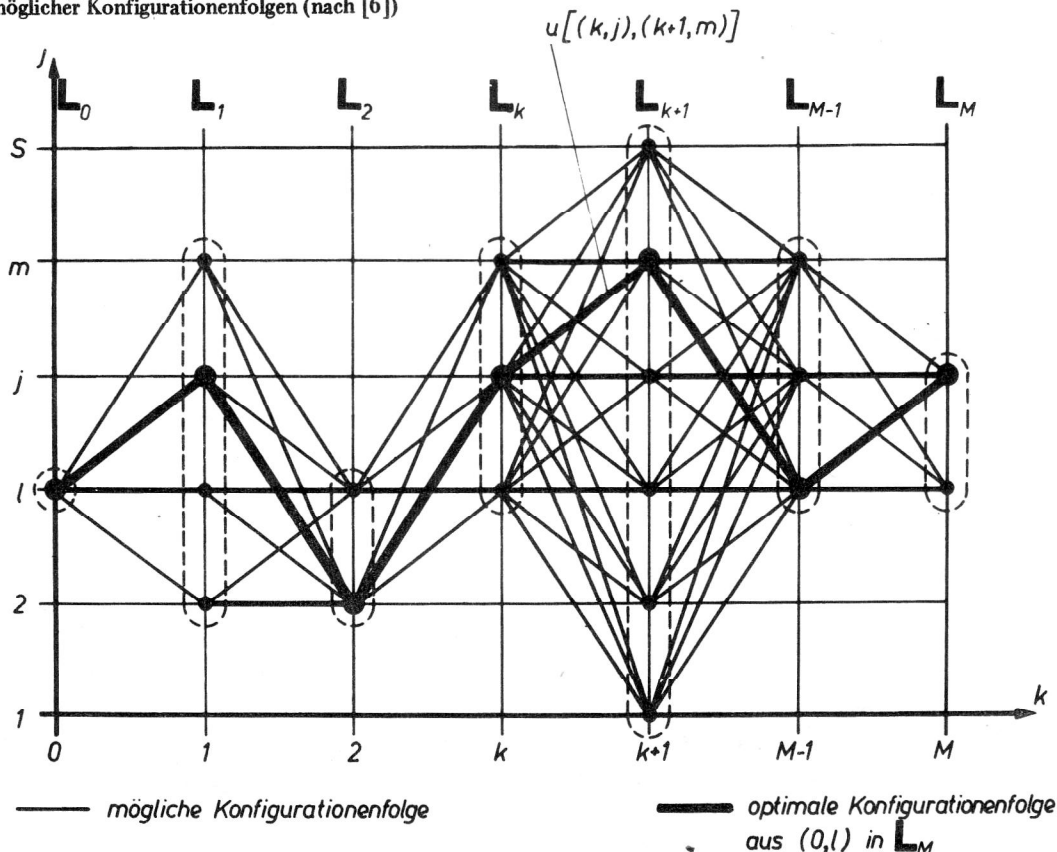
Die Lösung von (2.2) liefert

1.  $P(k+1, m)$  für jedes  $m \in J_{k+1}, k = 0, 1, \dots, M-1$ ,
2. ganze Zahlen  $h(k+1, m)$ , wobei  $h(k+1, m)$  genau die Nummer des Knotens aus  $J_k$  ist, durch den der kürzeste Weg in den Knoten  $(k+1, m)$  führt.

Es ist also

$$r_{hm}(k) + P(k, h) = \text{Min}_{j \in J_k} \{ r_{jm}(k) + P(k, j) \}.$$

Bild 6  
Graph  $\Gamma_L$  möglicher Konfigurationsfolgen (nach [6])



Die Länge  $P(M)$  des kürzesten Weges aus  $(0,1)$  in  $L_M$  und die Nummer  $j^*(M)$  des Zielknotens dieses Weges folgen aus

$$P(M) \equiv P(M, j^*(M)) := \min_{j \in J_M} P(M, j). \quad (2.3)$$

Die Nummern  $j^*(k)$  der restlichen Knoten des optimalen Weges werden rekursiv aus

$$j^*(k) := h(k+1, j^*(k+1)), \quad k = M-1, \dots, 1, \quad (2.4)$$

$h(k+1, m):$	$m$						
	$k+1$		1	2	3	4	5 . . . S
1			2	1	3	5	4 . . . .
2			3	1	4	2	5 . . . .
3			1	5	3	2	4 . . . .
4			1	2	4	3	5 . . . .
.			.	.	.	.	. . . . .
.			.	.	.	.	. . . . .
$M-1$			2	4	1	3	5 . . . .
...			5	4	1	3	2 . . . .

mit  $l = 4$  und  $j^*(M) = 3$ . Dann ist nach (2.4):

$$j^*(M-1) = h(M, 3) = 1$$

$$j^*(M-2) = h(M-1, 1) = 2$$

$$j^*(3) = h(4, 2) = 2, \text{ falls } j^*(4) = 2$$

$$j^*(2) = h(3, 2) = 5$$

$$j^*(1) = h(2, 5) = 5.$$

### 3. Splineapproximation

Ein Algorithmus für die Bildung von Steuersignalen (für die Antriebe eines Manipulators) muß unter Berücksichtigung der MINPATH-Ergebnisse 2 Teilaufgaben lösen:

- Bestimmung der den Stützstellen  $\lambda_k, k = 0, 1, \dots, M$  entsprechenden zeitlichen Stützstellen  $t_k$  (d. h. also der zeitlichen Durchlaufung von  $C$ , kurz: Zeitskala),
- Bestimmung der Steuerung als stetige und hinreichend oft stetig differenzierbare Funktion der Zeit mittels Interpolation, d. h., Ermittlung des Bewegungsgesetzes  $q^a = q^a(t), 0 \leq t \leq T$  mit  $q^a(t_k) = q^a(k)$  für  $k = 0, 1, \dots, M, a = 1, \dots, n$  und  $t_0 = 0, t_M = T$ .

Beide Teilaufgaben sind nicht unabhängig voneinander zu lösen.

1. Teilaufgabe: Die Bestimmung der Zeitskala erfolgt mittels sukzessiver Approximation. Eine Anfangsnäherung wird durch die Rekursionsformel 1. Ordnung

$$t_{k+1} := t_k + \max_{a \in \{1, \dots, n\}} |q^a(k+1) - q^a(k)| / v_{\max}^a, \quad k = 0, 1, \dots, M-1, t_0 = 0, \quad (3.1)$$

definiert. Die aus (3.1) folgende Prozeßdauer  $T := t_M$  ist die denkbar kürzeste, da die Zeitskala mit  $v_{\max}^a$  berechnet wird.

berechnet. Die durch  $q(k) := q(k), k = 0, 1, \dots, M,$  definierte Folge  $\{q(k)\}_*$  heißt *Optimalfolge* möglicher

Konfigurationen. (Für  $s_0 = |J_0| > 1$  ist noch eine Minimierung bzgl.  $l \in J_0$  möglich.)

Beispiel: Sei  $h(k+1, m) \in J_k, m \in J_{k+1}$  für alle  $k = 0, 1, \dots, M-1$  gemäß (2.2) und  $j^*(M)$  gemäß (2.3) gegeben:

2. Teilaufgabe: Die Interpolation erfolgt mittels Approximation durch kubische Spline-Funktionen

$$q(t) := P_k^3(t) \equiv a_{k0} + a_{k1}t + a_{k2}t^2 + a_{k3}t^3,$$

$$t_{k-1} \leq t \leq t_k, \quad k = 1, \dots, M.$$

Die  $4M$  Parameter  $a_{ki}, i = 0, 1, 2, 3, k = 1, \dots, M$ , sollen dabei folgenden  $4M$  Bedingungen genügen:

$$P_1^3(t_0) = q(0), \quad P_k^3(t_k) = q(k), \quad k = 1, \dots, M, \quad (3.2a)$$

$$P_k^3(t_k) = P_{k+1}^3(t_k) \quad (3.2b)$$

$$\dot{P}_k^3(t_k) = \dot{P}_{k+1}^3(t_k) \quad (3.2c)$$

$$\ddot{P}_k^3(t_k) = \ddot{P}_{k+1}^3(t_k) \quad (3.2d)$$

$$\dot{P}_1^3(t_0) = \dot{P}_M^3(T) = 0. \quad (3.2e)$$

Die zusätzlichen, praktisch sinnvollen, Forderungen  $\ddot{q}(t_0) = \ddot{q}(T) = 0$  können mittels Spline-Funktionen 5. Ordnung

$$P_1^5(t) := P_1^3(t) - \ddot{P}_1^3(t_0) \cdot (t-t_0)^2 \cdot (t_1-t)^3 / 2(t_1-t_0)^3, \quad t_0 \leq t \leq t_1$$

$$P_M^5(t) := P_M^3(t) - \ddot{P}_M^3(T) \cdot (T-t)^2 \cdot (t-t_{M-1})^3 / 2(T-t_{M-1})^3, \quad t_{M-1} \leq t \leq T$$

befriedigt werden (vergleiche Abschnitt 5, Bild 13). Aus (3.2a, b, d) resultiert folgende Darstellung der Spline's:



$$P_k^3(t) = M_{k-1} \frac{(t_k - t)^3}{6h_k} + M_k \frac{(t - t_{k-1})^3}{6h_k} + [q(k-1) - M_{k-1} \frac{h_k^2}{6}] \frac{t_k - t}{h_k} + [q(k) - M_k \frac{h_k^2}{6}] \frac{t - t_{k-1}}{h_k}$$

mit noch  $M+1$  frei verfügbaren Parametern  $M_0, M_1, \dots, M_M$  und  $t_{k-1} \leq t \leq t_k$ ,  $h_k := t_k - t_{k-1}$ ,  $k=1, \dots, M$ . Dabei gilt

$$\ddot{q}(t_k) = \ddot{P}_k^3(t_k) = M_k, \quad k=1, \dots, M \quad \text{und} \quad \ddot{q}(t_0) = \ddot{P}_1^3(t_0) = M_0,$$

d. h., die  $M_k$  sind genau die Beschleunigungswerte in den Stützstellen  $t_k$ .

(3.2c,e) liefert für die  $M+1$  Spline-Parameter  $M_k$  ein lineares Gleichungssystem mit einer tridiagonalen Koeffizientenmatrix, das als Rekursionsformel 2. Ordnung zur Bestimmung der  $M_k$  geschrieben werden kann:

$$\lambda_k M_{k+1} + 2M_k + \mu_k M_{k-1} = d_k, \quad k=0, 1, \dots, M. \quad (3.3)$$

Dabei ist  $M_{-1} = M_{M+1} = 0$  zu setzen (Randwertproblem für eine Differenzgleichung!), und es gilt

$$\lambda_0 = \mu_M = 1, \quad d_0 := \frac{6(q(1) - q(0))}{h_1^2},$$

$$d_M := \frac{6(q(M-1) - q(M))}{h_M^2},$$

$$\mu_k := \frac{h_k}{h_k + h_{k+1}}, \quad \lambda_k := 1 - \mu_k,$$

$$d_k := 6 \left[ \frac{q(k+1) - q(k)}{h_{k+1}} - \frac{q(k) - q(k-1)}{h_k} \right] / (h_k + h_{k+1}), \quad k=1, \dots, M-1,$$

( $\lambda_k$  ist hier nicht mit der Stützstelle  $\lambda_k$  zu verwechseln!)

Die Rekursionsformel (3.3) wird mittels Faktorisierung (d. h., äquivalente Ersetzung einer Rekursionsformel 2. Ordnung durch zwei Rekursionsformeln 1. Ordnung) gelöst. Infolge des Charakters der Aufgabe (3.3) als Randwertproblem handelt es sich bei den Rekursionsformeln 1. Ordnung um eine Vorwärts- und eine Rückwärtsrekursion. Die Lösung von (3.3) kann mittels zweier Hilfsformeln 1. Ordnung

$$a_k := -\frac{\lambda_k}{2 + \mu_k a_{k-1}}, \quad b_k := \frac{d_k - \mu_k b_{k-1}}{2 + \mu_k a_{k-1}},$$

$$k=0, 1, \dots, M, \quad a_{-1} = b_{-1} = 0$$

in der Form

$$M_k = a_k M_{k+1} + b_k, \quad k=M-1, \dots, 0, \quad M_M := b_M,$$

dargestellt werden. Dabei ist der Wert von  $a_M$  mit  $\lambda_M$  unbestimmt, wird aber wegen  $M_{M+1} = 0$  auch nicht benötigt. In dem hierfür entwickelten Rechenprogramm wurde o.B.d.A.  $\lambda_M = 0$  gesetzt, so daß  $a_M = 0$  folgt und die Randbedingung  $M_{M+1} = 0$  überflüssig wird. Selbstverständlich sind alle Rechnungen für jede Koordinate  $q^a$ ,  $a=1, \dots, n$ , getrennt durchzuführen. Ist nun für mindestens einen Index  $a$  im  $k$ -ten Intervall ( $k=1, \dots, M$ )

$$\text{Max}_{t_{k-1} \leq t \leq t_k} |{}^a \dot{P}_k^3(t)| > v_{\text{max}}^a, \quad (3.4)$$

so wird das  $k$ -te Intervall gemäß  $h_k := h_k \cdot \alpha_k$  ( $\alpha_k > 1$ ) gedehnt und die beschriebene Spline-Approximation so oft wiederholt, bis erstmalig für alle  $a$  und  $k$  die Ungleichung (3.4) nicht mehr erfüllt ist. Die so ermittelte Zeitdauer  $T$  der Steuerung ist (näherungsweise) minimal (vgl. Abschnitt 5).

#### 4. Berechnung von Antriebsmomenten

Zur Bestimmung von Antriebsmomenten dienen die expliziten Lagrangeschen Bewegungsdifferentialgleichungen eines Manipulators:

$$g_{ab}(q) \ddot{q}^b + \Gamma_{abc}(q) \dot{q}^b \dot{q}^c = Q_a(\dot{q}, q, t). \quad (4.1)$$

Dabei bedeuten:  $g_{ab}(q)$  – Metrik des Konfigurationsraumes  $R^n$ ,  $\Gamma_{abc}(q)$  – Christoffel-Symbole 1. Art,  $Q_a(\dot{q}, q, t)$  – generalisierte Kräfte. Diese Größen werden mit dem Programm LAGRANGE [1] nach folgenden Formeln (formal-analytisch) berechnet:

$$g_{ab}(q) := \sum_{k=1}^K [m_k \partial_a X_k^{(i)} \partial_b X_k^{(i)} + \delta^{ij} \partial_a E_k^{(r)} \partial_b E_k^{(r)}],$$

$$\Gamma_{abc}(q) := \frac{1}{2} (\partial_b g_{ac} + \partial_c g_{ab} - \partial_a g_{bc}),$$

$$Q_a(\dot{q}, q, t) := \sum_{k=1}^K [\partial_a X_k^{(i)} K_k^{(i)} + M_k^i \Omega_{k ia}],$$

$$\Omega_{k ia} := \frac{1}{2} \epsilon_i^{js} \partial_a F_k^{(r)} F_k^{(r)}.$$

( $\epsilon_i^{js} = +1, -1, 0$ , falls  $(ijs)$  beziehentlich eine gerade, ungerade Permutation ist bzw. wenigstens 2 Indizes einander gleich sind.)

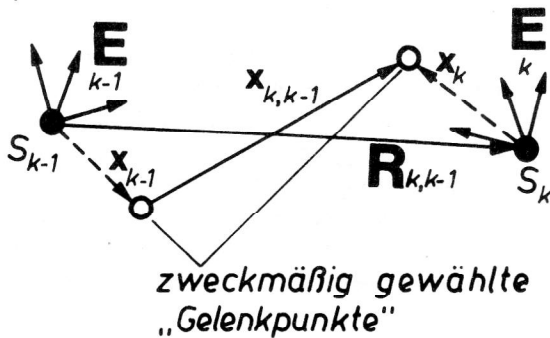
Eingabedaten für den Rechner sind (für jeden Körper  $k$ ,  $k=1, \dots, K$ ):

*Kinematik* (bei Eingabe der Relativbewegung):

$X_k^i$  – Relativkoordinaten des Massenmittelpunktes  $S_{k,k-1}$

in bezug auf die Basis  $\{S_{k-1}, E_i\}$ ,  $k=1, \dots, K$ ,

dargestellt mittels dreier Hilfsvektoren (vgl. Bild 7):



**Bild 7**  
Ermittlung der Relativbewegung

$$R_{k,k-1} := x_{k-1} - x_k + x_{k,k-1},$$

$x_{k,k-1} = \xi_{k,k-1}^i E_i$  (relativer Abstandsvektor der „Gelenkpunkte“),

$$x_k = \xi_k^i E_i, \quad x_{k-1} = \xi_{k-1}^i E_i \quad (\xi^i = \xi^i(q)),$$

$E_i^j(q)$  – relative Drehmatrix des Körpers  $k$  bzgl.  $\{E_i\}_{k-1}$ :

Für allgemeine Starrkörpersysteme erfolgt – aus Zweckmäßigkeitsgründen – die Eingabe einer als Funktion der Zeit  $t$  vorgeschriebenen Bewegung  $X_{0i}^{(i)}(t), E_{0i}^{(i)}(t)$  eines

Bezugskörpers Null. Da dieser bei Manipulatoren gemäß Voraussetzung (vgl. Abschnitt 1) mit dem Inertialsystem identisch sein soll, ist  $X_{0i}^{(i)} \equiv 0$  und  $E_{0i}^{(i)} \equiv \delta_{ij}^{(i)}$  zu setzen.

#### Massengeometrie:

$m_k$  – Masse des Körpers  $k$ ,

$\vartheta_{ij}^{ij}$  – Koordinaten des Binetschen Trägheitstensors, berechnet aus den Koordinaten des gewöhnlichen Trägheitstensors  $\Theta_{ij}$  nach:

$$\vartheta_{ij}^{ij} := \frac{1}{2} \Theta_{ij}^r \delta^{ij} - \frac{\Theta_{ij}^r}{k} \left( \Theta_{ij}^r = \Theta_{ij}^{11} + \Theta_{ij}^{22} + \Theta_{ij}^{33} \right) k.$$

#### aftgesetzt:

i)  $(K_k^i)$  – raumfeste (körperfeste) Koordinaten der am Körper  $k$  resultierenden eingepprägten Kraft  $(K_k^{(i)} := K_k^i E_i^{(i)})$ ,

(Mi) – raumfeste (körperfeste) Koordinaten des am Körper  $k$  resultierenden eingepprägten Momentes bzgl.  $S_k$   $(M_k^{(i)} := M_k^i E_i^{(i)})$ .

Für lineare Kraftgesetze ist eine vereinfachte Eingabe möglich, indem nur die Nummern der Körper zu benennen sind, zwischen denen sich Federn oder Dämpfer befinden.

Alle formalen Parameter können beliebig und beliebig oft, getrennt für Kinematik  $\{g_{ab}, \Gamma_{abc}\}$  und Kraftgesetze  $\{Q_a\}$ , spezifiziert werden. Ist gemäß den Abschnitten 1,2,3 eine optimale Bahnsteuerung

$q^b(t) = {}^b P_k(t), t_{k-1} \leq t \leq t_k, k = 1, \dots, M$  ermittelt worden, so folgt mit

$$q^0(t_k) = q^b(t_k), \quad \dot{q}^b(t_k) = \frac{q^{b(k)} - q^{b(k-1)}}{h_k} + \frac{h_k}{6} (2M_k^b + M_{k-1}^b), \quad \ddot{q}^b(t_k) = M_k^b$$

aus (4.1) der Wert der Eulerableitung zur Zeit  $t_k$

$$g_{ab}(q(k)) M_k^b + \Gamma_{abc}(q(k)) \dot{q}^b(t_k) \dot{q}^c(t_k) =: E_a(t_k), \quad k = 0, 1, \dots, M, \quad (4.2)$$

und für die generalisierten Kräfte  $Q_a$  ergibt sich – als formal-analytischer Ausdruck – eine Linearkombination in den gesuchten Antriebsmomenten  $M^s$

$$Q_a(t_k, M^s) := y_a(t_k) + z_{as}(t_k) M^s, \quad (4.3)$$

mit quadratischer Koeffizientenmatrix  $z_{as}$ , sofern vorausgesetzt wird, daß die Anzahl der Antriebsmomente gleich ist dem Freiheitsgrad  $n$  des Manipulators. Ist  $z_{as}(t_k)$  regulär für jedes  $t_k$ , so folgen aus (4.2) und (4.3) eindeutig die Werte der Antriebsmomente in den Stützstellen  $t_k$ :

$$M^s(t_k) := z^{sa}(t_k) [E_a(t_k) - y_a(t_k)],$$

$$z^{sa} z_{ar} = \delta_{rs}, \quad k = 0, 1, \dots, M.$$

## 5. Beispiel

### 5.1. Vorbemerkungen

Unabdingbare Voraussetzung für die erfolgreiche Automatisierung eines Fertigungsprozesses mit Hilfe eines Manipulators ist eine gründliche Einsatzvorbereitung. Bei Nutzung der oben beschriebenen Algorithmen ergeben sich in der Phase der technologischen Fertigungsvorbereitung folgende auszuführende Arbeitsschritte:

- Ermittlung der für den Fertigungsprozeß notwendigen Anzahl von  $C$ -Stützpunkten im Arbeitsraum des Manipulators und Bestimmung der Koordinaten dieser Stützpunkte im Inertialsystem,
- Berechnung der Zielfunktion (1.9) in analytisch geschlossener Form,
- Lösung der Umkehraufgabe für alle  $C$ -Stützpunkte  $P_k$  (ELMO),
- Festlegung eines Optimalitätskriteriums und Suche des kürzesten Weges im Graphen  $\Gamma_L$  aller möglichen Konfigurationenfolgen (MINPATH),
- Berechnung der zeitoptimalen Durchlaufung der vorgegebenen Greifertrajektorie  $C$  (SOTOS),<sup>1)</sup>
- Ermittlung der erforderlichen Antriebsmomente,
- Ausgabe der Ergebnisse in einer für die Weiterverarbeitung im Steuerrechner des Manipulators geeigneten Form.

Im folgenden wird anhand eines einfachen Beispiels (vgl. Bild 8) die Nutzung der Programme LAGRANGE,

1) Selection of optimal trajectory and optimal time scaling

ELMO und SOTOS demonstriert. Der Manipulator habe die in Bild 4 dargestellte Struktur. Die Greifertrajektorie C wird in Zylinderkoordinaten dargestellt (vgl. ebenfalls Bild 4).

### 5.2. Positionierungsaufgabe

Ein Werkstück soll im Punkt  $P_1 = (0.4, 0.2, \frac{\pi}{3})$  in einer Ablage der eingezeichneten Form vom Greifer des Manipulators mit der Handhaltung  $\chi = 0$  aufgenommen und um ein Hindernis in kürzester Zeit zum Punkt  $P_{11} =$

$(0.4, 0.6, \frac{3\pi}{2})$  transportiert und dort mit der Handhaltung  $\chi = \frac{\pi}{2}$  abgelegt werden.  $P_1, P_2, P_4, P_8, P_{10}$

und  $P_{11}$  sind die für die Realisierung dieser Bahn notwendigen Stützpunkte.  $P_3, P_5, P_6, P_7$  und  $P_9$  sind eingefügt worden, damit die zwischen den Stützstellen auftretenden „Abweichungen“ der Greiferspitze Q von der vorgeschriebenen Bahn C hinreichend klein bleiben. Wegen möglicher Kollisionen des Greifers mit dem Hindernis ist keine Veränderung der Greiferlage ( $\chi$ ) vor dem Stützpunkt  $P_8$  möglich. Daraus folgen die in der Tabelle 1 angegebenen Zylinderkoordinaten der Stützpunkte  $P_k$ .

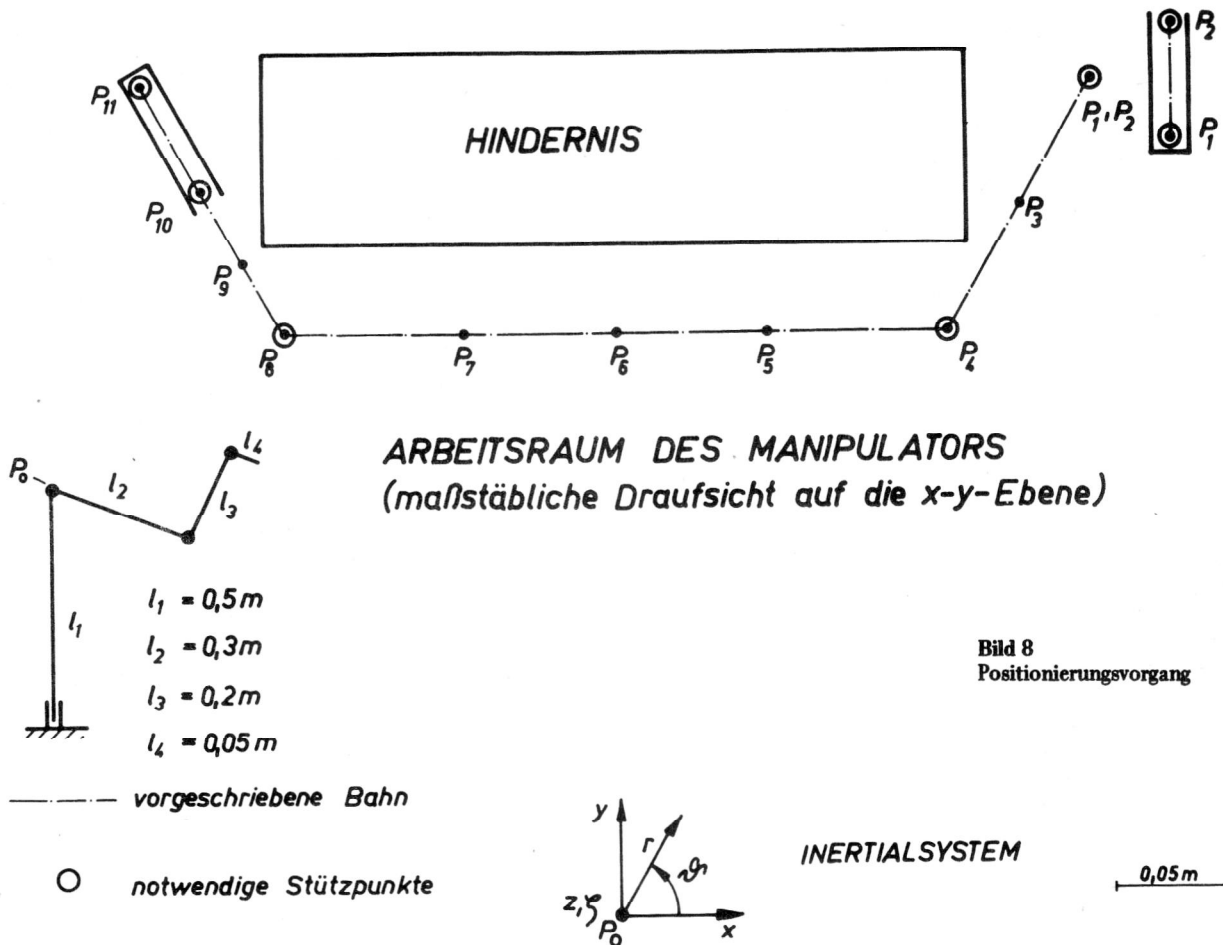


Tabelle 1  
Koordinaten von Stützpunkten der Greifertrajektorie

	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$P_{11}$
r	0.4	0.4	0.34	0.28	0.28	0.28	0.28	0.26	0.315	0.35	0.4
$\zeta$	0.2	0.25	0.25	0.25	0.35	0.45	0.55	0.60	0.60	0.60	0.60
$\vartheta$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{6\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$
$\chi$	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$

### 5.3. Umkehraufgabe

Die Umkehraufgabe wird in 3 Schritten gelöst. Im ersten Schritt werden vom Programm LAGRANGE nach Eingabe gewisser Daten bzgl. der kinematischen Struktur des Manipulators die Zielfunktion (1.9) und die Jacobi-Matrix ( $\partial_{\mathbf{q}} \mathbf{f}$ ) durch Aktivieren der Prozeduren ZIFUGEN und JACOMA in analytisch geschlossener Form (Bild 9) berechnet und an eines der folgenden ELMO-Programme übergeben:

- ELMO 1: Vertikale Führung des Handgelenkes P,
- ELMO 2: Horizontale Führung des Handgelenkes P,
- ELMO 3: Führung des Handgelenkes P auf beliebiger Raumkurve,
- ELMO 4: Führung der Greiferspitze Q auf beliebiger Raumkurve.

ZIELFUNKTION F:

$$F = (X(1) - \cos(Q(1))\cos(Q(2))C + \sin(Q(1))B - (-\cos(Q(1))\sin(Q(2))\sin(Q(3)) + \cos(Q(1))\cos(Q(2))\cos(Q(3)))D)^2 + (X(2) - \cos(Q(2))\sin(Q(1))C - \cos(Q(1))B - (-\sin(Q(1))\sin(Q(2))\sin(Q(3)) + \cos(Q(2))\cos(Q(3))\sin(Q(1)))D)^2 + (-A + X(3) - \sin(Q(2))C - (\cos(Q(2))\sin(Q(3)) + \cos(Q(3))\sin(Q(2)))D)^2$$

JACOBI-MATRIX J:

$$J(1,1) = -\cos(Q(2))\sin(Q(1))C - \cos(Q(1))B + (\sin(Q(1))\sin(Q(2))\sin(Q(3)) - \cos(Q(2))\cos(Q(3))\sin(Q(1)))D$$

$$J(1,2) = -\cos(Q(1))\sin(Q(2))C + (-\cos(Q(1))\cos(Q(2))\sin(Q(3)) - \cos(Q(1))\cos(Q(3))\sin(Q(2)))D$$

$$J(1,3) = (-\cos(Q(1))\cos(Q(2))\sin(Q(3)) - \cos(Q(1))\cos(Q(3))\sin(Q(2)))D$$

$$J(2,1) = \cos(Q(1))\cos(Q(2))C - \sin(Q(1))B + (-\cos(Q(1))\sin(Q(2))\sin(Q(3)) + \cos(Q(1))\cos(Q(2))\cos(Q(3)))D$$

$$J(2,2) = -\sin(Q(1))\sin(Q(2))C + (-\cos(Q(2))\sin(Q(1))\sin(Q(3)) - \cos(Q(3))\sin(Q(1))\sin(Q(2)))D$$

$$J(2,3) = (-\cos(Q(2))\sin(Q(1))\sin(Q(3)) - \cos(Q(3))\sin(Q(1))\sin(Q(2)))D$$

$$J(3,1) = 0$$

$$J(3,2) = \cos(Q(2))C + (-\sin(Q(2))\sin(Q(3)) + \cos(Q(2))\cos(Q(3)))D$$

$$J(3,3) = (-\sin(Q(2))\sin(Q(3)) + \cos(Q(2))\cos(Q(3)))D$$

$$J(1,j) = \partial_j X^{(1)}(\mathbf{q})$$

Bild 9  
Zielfunktion und Jacobi-Matrix

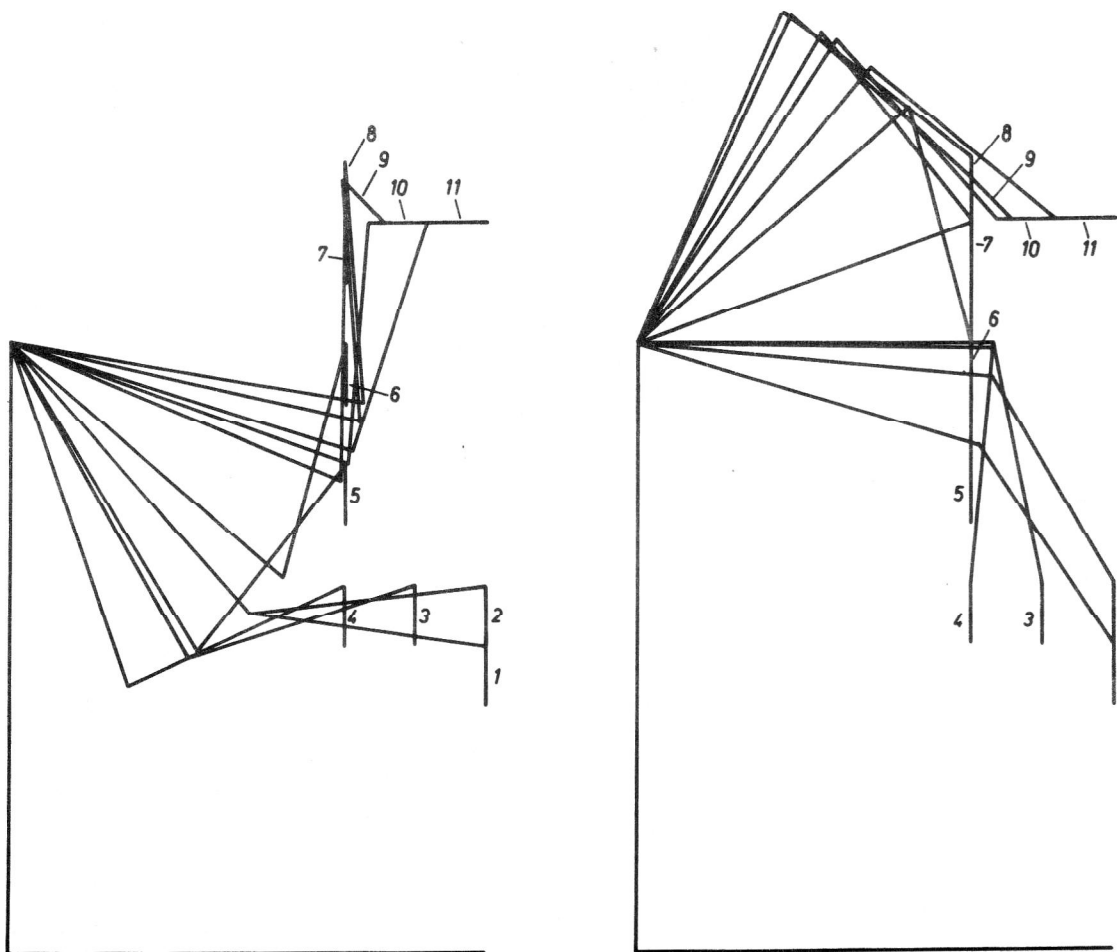


Bild 10  
Elementarbewegungen des Manipulators

Das Suchgebiet  $D_q$  wird in hinreichend kleine Teilgebiete  $D'_q$  aufgeteilt, um alle Lösungen des Umkehrproblems (bzgl. eines festen Stützpunktes auf C) zu finden. Dabei sind die konstruktiven Besonderheiten des Manipulators (z. B. Gelenkwinkel) zu beachten. Im zweiten Schritt wird für jeden Punkt  $P_k \in C$  und jedes Gebiet  $D'_q$  ein lokales Minimum der Zielfunktion  $F(q, \lambda)$  mittels eines kombinierten Monte-Carlo - Gauss-Seidel-Verfahrens gesucht. Liegt das so ermittelte lokale Minimum im Innern von  $D'_q$ , so erfolgt im dritten Schritt eine Verbesserung der Lösung durch ein Newton-Verfahren. In Bild 10 sind die für die Greifertrajektorie C gemäß Bild 8 beiden möglichen Konfigurationsfolgen des betrachteten Manipulators als Projektion auf die  $r, \zeta$ -Ebene dargestellt.

#### 5.4. Ermittlung optimaler Stützkonfigurationen

Das Programm SOTOS dient der Ermittlung zeitoptimaler Bahnsteuerungen. Nach dem Aktivieren dieses Programmes werden die ELMO-Ergebnisse eingelesen, ausgedruckt und alle Elementarbewegungen  $[(k, j), (k+1, m)]$  gemäß ausgewähltem Optimalitätskriterium bewertet (Bild 11).

Anschließend ermittelt die Prozedur MINPATH den kürzesten Weg in  $\Gamma_L$ . Die Ergebnisse für das gewählte Beispiel (Bild 12) zeigen, daß sich alle optimalen Stütz-

konfigurationen in der Lage 1 befinden. Das ist vorteilhaft, denn Lagenwechsel bei vorgegebener Greiferführung sind unter Umständen nicht unproblematisch.

#### 5.5. Zeitoptimale Durchlaufung der Greifertrajektorie

Die in Abschnitt 3 beschriebene Splineapproximation wird realisiert durch die Prozedur SPLINE des Programmes SOTOS. Dabei ist die durch (3.1) definierte Zeitskala zunächst nur eine erste Näherung, die durch sukzessive Approximation verbessert wird. Dazu werden in der Prozedur COMPARISON für alle  $a$  und  $k$  die  $\text{Max } |{}^a \ddot{p}_k(t)|$  berechnet und mit den vorgegebenen  $t_{k-1} \leq t \leq t_k$  maximalen Antriebsgeschwindigkeiten  $v_{\text{max}}^a$  verglichen,

mit deren Hilfe die erste Näherung der Zeitskala berechnet wurde. Nach einer Dehnung genau der Zeitintervalle, in denen für mindestens ein  $a$  die Ungleichung (3.4) gilt, wird die Splineapproximation wiederholt, usw. Schließlich erfolgt die Ausgabe von  $q^a(t)$ ,  $\dot{q}^a(t)$  und  $\ddot{q}^a(t)$  durch die Prozedur OUTPUT (Bild 13).

Bild 11  
ELMO-Ergebnisse und Bewertung der Elementarbewegungen

### BEZEICHNUNG DER ZEITOPTIMALEN BAHNSTEUERUNG EINES MANIPULATORS DURCH LÖSEN DER BELLMANN-GLEICHUNG

#### LINKGALDATEN

K# 2            Anzahl der Suchgebiete  $D'_q$   
 A# 4            Anzahl der Antriebe (n)  
 M# 11          Anzahl der Stützpunkte auf C  
 Z# 10          Anzahl der Suchschritte für  $\text{Max } |{}^a \ddot{p}_k|$   
 N# 10          Anzahl der Ausgabewerte ( $t, \dot{q}, \ddot{q}$ )  
 V# 1,1000      t-Intervall-Streckungsfaktor ( $\alpha$ )

$$r_{j,m}(k) = R[k, j, m]$$

#### ELMO-ERGEBNISSE

	$q^1(k)$	$q^2(k)$	$q^3(k)$	$q^4(k)$
R# 1 1	1,14720 00	-8,32100-01	3,83220 00	1,71210 00
	1,14720 00	-8,35390-01	4,08960 00	1,45810 00
	1,14720 00	-1,05000 00	4,49740 00	1,26480 00
	1,14720 00	-1,23720 00	4,80920 00	1,14020 00
	1,30900 00	-1,02580 00	5,06640 00	6,71710-01
	1,57080 00	-7,00860-01	5,15690 00	2,56270-01
	1,83260 00	-3,39760-01	5,06640 00	-1,43490-02
	2,19440 00	-1,65310-01	4,95730 00	-7,97360-02
	2,19440 00	-2,15650-01	4,99510 00	7,18220-01
	2,19440 00	-3,37310-01	4,96510 00	1,65530 00
	2,19440 00	-3,03260-01	4,69160 00	1,89480 00
R# 2 2	1,14720 00	-2,85100-01	2,45090 00	2,54640 00
	1,14720 00	-2,19170-02	2,19370 00	2,61050 00
	1,14720 00	-1,34910-02	1,78580 00	2,94000 00
	1,14720 00	-3,34080-03	1,47400 00	3,24170 00
	1,30900 00	3,39770-01	1,21680 00	3,15570 00
	1,57080 00	7,00860-01	1,12630 00	2,88510 00
	1,83260 00	1,02580 00	1,21680 00	2,46970 00
	2,19440 00	1,14890 00	1,32590 00	2,23750 00
	2,19440 00	1,11720 00	1,28810 00	3,09240 00
	2,19440 00	2,80810-01	1,31510 00	3,98420 00
	2,19440 00	8,59850-01	1,59160 00	3,83160 00

R[ 1 2 1]= 1,63860 00
R[ 1 2 2]= 2,57320-01
R[ 2 1 1]= 4,07880-01
R[ 2 1 2]= 2,30370 00
R[ 2 2 1]= 2,30380 00
R[ 2 2 2]= 4,07840-01
R[ 3 1 1]= 3,11810-01
R[ 3 1 2]= 3,02340 00
R[ 3 2 1]= 3,02340 00
R[ 3 2 2]= 3,11800-01
R[ 4 1 1]= 3,43110-01
R[ 4 1 2]= 3,59240 00
R[ 4 2 1]= 3,59240 00
R[ 4 2 2]= 4,68530-01
R[ 5 1 1]= 3,61100-01
R[ 5 1 2]= 3,94010 00
R[ 5 2 1]= 3,94010 00
R[ 5 2 2]= 4,15440-01
R[ 6 1 1]= 4,15430-01
R[ 6 1 2]= 3,94010 00
R[ 6 2 1]= 3,94010 00
R[ 6 2 2]= 3,61100-01
R[ 7 1 1]= 2,61800-01
R[ 7 1 2]= 3,74060 00
R[ 7 2 1]= 3,74050 00
R[ 7 2 2]= 2,61800-01
R[ 8 1 1]= 8,54890-01
R[ 8 1 2]= 3,60930 00
R[ 8 2 1]= 3,66930 00
R[ 8 2 2]= 7,97950-01
R[ 9 1 1]= 8,91760-01
R[ 9 1 2]= 3,67700 00
R[ 9 2 1]= 3,67700 00
R[ 9 2 2]= 9,37110-01
R[ 10 1 1]= 2,73520-01
R[ 10 1 2]= 3,37340 00
R[ 10 2 1]= 3,37340 00
R[ 10 2 2]= 2,73510-01

#### MAXIMALGESCHWINDIGKEITEN DER ANTRIEBE

$v_{\text{max}}^a = QP_{\text{MAX}}[a]$   
 QP\_{\text{MAX}}[ 1]= 1,000000 00  
 QP\_{\text{MAX}}[ 2]= 1,000000 00  
 QP\_{\text{MAX}}[ 3]= 1,000000 00  
 QP\_{\text{MAX}}[ 4]= 1,000000 00

DLP ALSGFLAEHLTE ZEITOPTIMALE MINPATH BEGINNT IM STARTNIVEAU 1

$$q^a(k) = QMIN[k, a]$$

QMIN[ 1 1]=	1.04729 00
QMIN[ 1 2]=	-3.32109-01
QMIN[ 1 3]=	3.83229 00
QMIN[ 1 4]=	1.71219 00
QMIN[ 2 1]=	1.04729 00
QMIN[ 2 2]=	-8.35399-01
QMIN[ 2 3]=	4.08769 00
QMIN[ 2 4]=	1.45819 00
QMIN[ 3 1]=	1.04729 00
QMIN[ 3 2]=	-1.05009 00
QMIN[ 3 3]=	4.49749 00
QMIN[ 3 4]=	1.26469 00
QMIN[ 4 1]=	1.04729 00
QMIN[ 4 2]=	-1.23729 00
QMIN[ 4 3]=	4.80729 00
QMIN[ 4 4]=	1.14029 00
QMIN[ 5 1]=	1.30709 00
QMIN[ 5 2]=	-1.02589 00
QMIN[ 5 3]=	5.06549 00
QMIN[ 5 4]=	5.71719-01
QMIN[ 6 1]=	1.57089 00
QMIN[ 6 2]=	-7.00869-01
QMIN[ 6 3]=	5.15599 00
QMIN[ 6 4]=	2.56279-01
QMIN[ 7 1]=	1.83269 00
QMIN[ 7 2]=	-3.39769-01
QMIN[ 7 3]=	5.06549 00
QMIN[ 7 4]=	-1.43499-02
QMIN[ 8 1]=	2.09449 00
QMIN[ 8 2]=	-1.65319-01

QMIN[ 8 3]=	4.75739 00
QMIN[ 8 4]=	-7.77369-02
QMIN[ 9 1]=	2.09449 00
QMIN[ 9 2]=	-2.15559-01
QMIN[ 9 3]=	4.79519 00
QMIN[ 9 4]=	7.18229-01
QMIN[ 10 1]=	2.09449 00
QMIN[ 10 2]=	-3.37319-01
QMIN[ 10 3]=	4.76519 00
QMIN[ 10 4]=	1.65539 00
QMIN[ 11 1]=	2.09449 00
QMIN[ 11 2]=	-3.03209-01
QMIN[ 11 3]=	4.69109 00
QMIN[ 11 4]=	1.89469 00

$$j^*(k) = JS[k]$$

JS[ 1]=	1
JS[ 2]=	1
JS[ 3]=	1
JS[ 4]=	1
JS[ 5]=	1
JS[ 6]=	1
JS[ 7]=	1
JS[ 8]=	1
JS[ 9]=	1
JS[ 10]=	1
JS[ 11]=	1

Bild 12  
Der zeitoptimale MINPATH

Existieren Lage- oder Geschwindigkeitsregelkreise für den verwendeten Manipulator, so ist das Einschreiben der SOTOS -Ergebnisse in den RAM-Bereich des Manipulator-Steuerrechners eine vielversprechende Alternative zu dem zur Zeit meist praktizierten „teach-in“-Verfahren. (Bei selbstsperrenden Getrieben in den Gelenken wäre allerdings die Bezeichnung „trial and error“ treffender.) Diese Datenübergabe ist sowohl „on-line“

(EC 1040, PBT 4000) als auch „off-line“ (Magnetkassette) möglich.

Die SOTOS-Ergebnisse für die Manipulatorsteuerung können direkt genutzt werden, falls a priori sicher ist, daß die verwendeten Motoren die durch die Steuerung bedingten Antriebsmomente stets aufbringen können. Andernfalls sollten für jede Bahn die erforderlichen Antriebsmomente im voraus berechnet werden. Damit

SYSTEM 2: SAHULE UND OBERARM

EINGABE DER RELATIVBEWEGUNG

KINEMATIK DES KOERPERS 0:

$E_i^{(1)}$	$X_i^{(1)}$
1 0 0	0
0 1 0	0
0 0 1	0

KINEMATIK DES KOERPERS 1:

$E_i^{(1)}$	$X_i^{(1)}$	$X_{10}$	$X_{11}$
cos(Q(1))	SIN(Q(1))	0	0
-SIN(Q(1))	COS(Q(1))	0	0
0	0	1	-A/2

BEMERKUNG ZUR MASSENGEOMETRIE DES KOERPERS 1:

BEI DIESEM KOERPER WERDEN ALLE DEVIATIONS MOMENTE VERNACHLAESSIGT.

KRAEFTE UND MOMENTE DES KOERPERS:

DIE EINGABE DER KRAEFTE ERFOHLT IM RAUMFESTEN KOORDINATENSYSTEM.

$$K_i^{(1)}$$

$$1$$

$$0$$

$$0$$

$$-M(1)*GE$$

DIE EINGABE DER MOMENTE ERFOHLT IM KOERPERFESTEN KOORDINATENSYSTEM.

$$M_i^{(1)}$$

$$0$$

$$MO(2)$$

$$MO(1)$$

KINEMATIK DES KOERPERS 2:

$E_i^{(2)}$	$X_i^{(2)}$	$X_{21}$	$X_{22}$
cos(Q(2))	SIN(Q(2))	0	-C/2
0	1	0	0
-SIN(Q(2))	COS(Q(2))	0	A/2

BEMERKUNG ZUR MASSENGEOMETRIE DES KOERPERS 2:

BEI DIESEM KOERPER WERDEN ALLE DEVIATIONS MOMENTE VERNACHLAESSIGT.

KRAEFTE UND MOMENTE DES KOERPERS:

DIE EINGABE DER KRAEFTE ERFOHLT IM RAUMFESTEN KOORDINATENSYSTEM.

$$K_i^{(1)}$$

$$0$$

$$0$$

$$-M(2)*GE$$

DIE EINGABE DER MOMENTE ERFOHLT IM KOERPERFESTEN KOORDINATENSYSTEM.

$$M_i^{(1)}$$

$$0$$

$$-MO(2)$$

$$0$$

BERECHNETE DATEN:

KOEFFIZIENTEN DER KINETISCHEN ENERGIE (METRIK):<sup>1)</sup>

$$G(1,1) = TH(2,1,1)+TH(2,2,2)+TH(1,1,1)+TH(1,2,2)-SIN^2(Q(2))TH(2,1,1)+SIN^2(Q(2))TH(2,3,3)-1/4SIN^2(Q(2))C^2M(2)+1/4C^2M(2)$$

$$G(2,2) = TH(2,1,1)+TH(2,3,3)+1/4C^2M(2)$$

CHRISTOFFELSYMBOLS:

$$GAM(1,2,1) = -COS(Q(2))SIN(Q(2))TH(2,1,1) + COS(Q(2))SIN(Q(2))TH(2,3,3) - 1/4COS(Q(2))SIN(Q(2))C^2M(2)$$

$$GAM(2,1,1) = COS(Q(2))SIN(Q(2))TH(2,1,1)-COS(Q(2))SIN(Q(2))TH(2,3,3) + 1/4COS(Q(2))SIN(Q(2))C^2M(2)$$

GENERALISIERTE KRAEFTE:

$$KU(1) = MO(1)$$

$$KU(2) = MO(2)-1/2COS(Q(2))C GE M(2)$$

Die LAGRANGEschen Gleichungen:

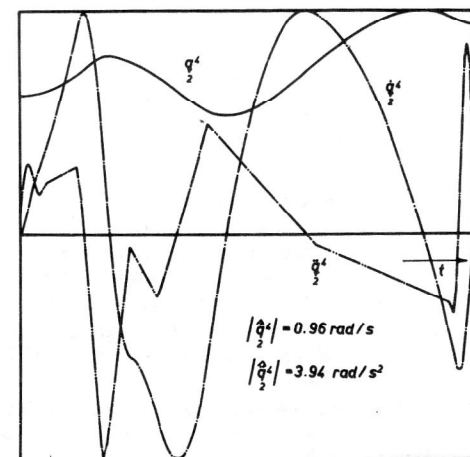
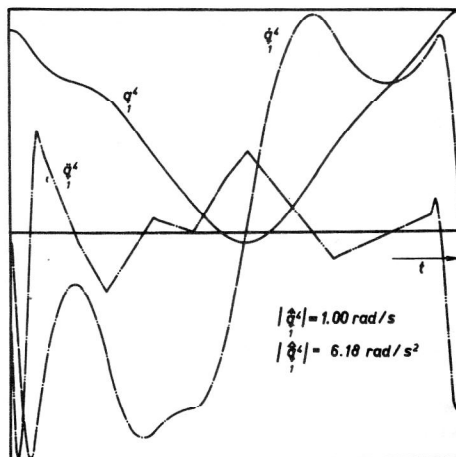
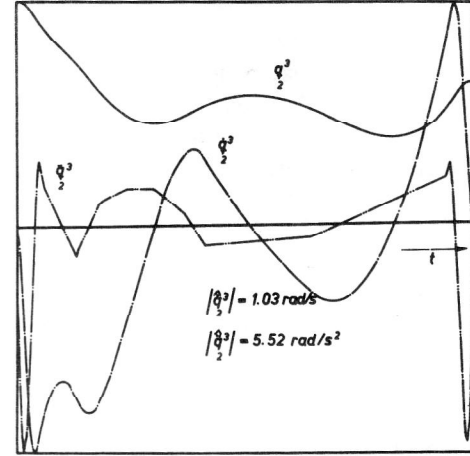
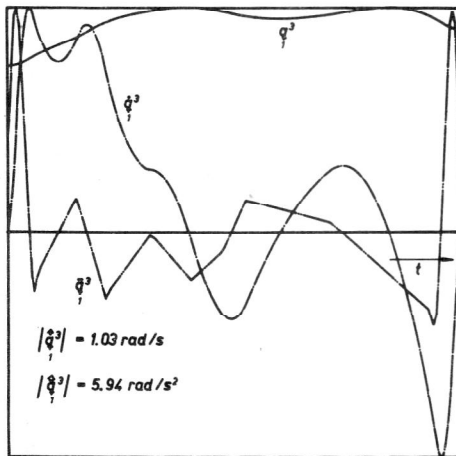
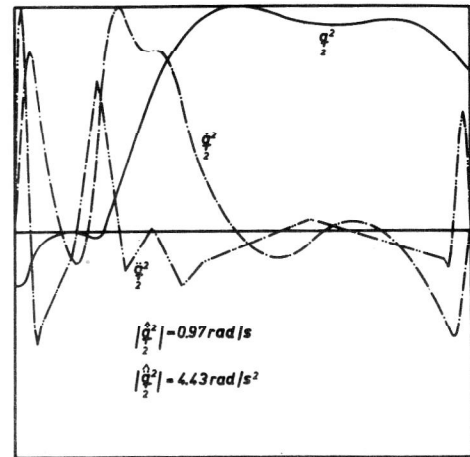
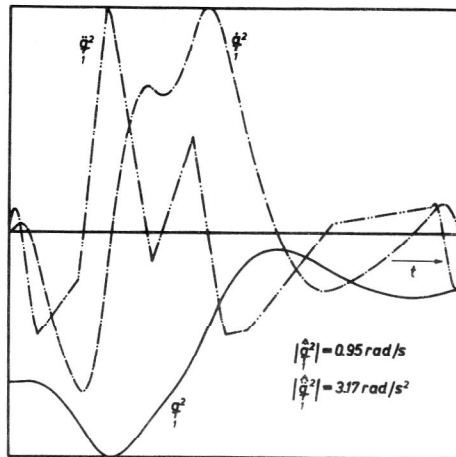
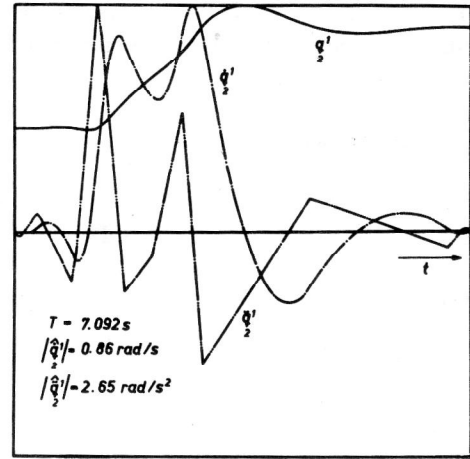
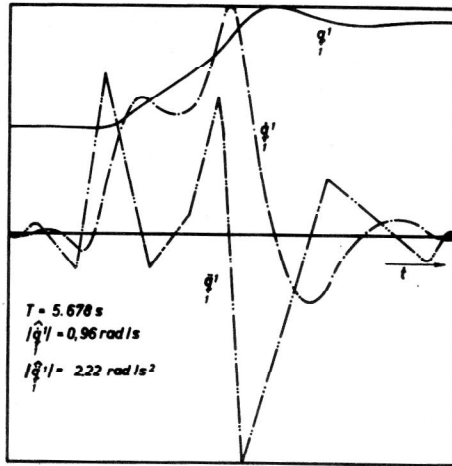
$$S_{11}(q)\ddot{q}^1 + 2\Gamma_{112}(q)\dot{q}^1\dot{q}^2 = Q_1$$

$$S_{22}(q)\ddot{q}^2 + \Gamma_{211}(q)(\dot{q}^1)^2 = Q_2$$

<sup>1)</sup> TH(k,i,j) =  $\partial^2 G$ , G(i,j) =  $S_{ij}$ , GAM(a,b,c) =  $\Gamma_{abc}$ , KU(a) =  $Q_a$ .

Bild 14

Die Bewegungsdifferentialgleichungen eines Manipulatorteilsystems



**Bild 13**  
 $q^a(t), \dot{q}^a(t), \ddot{q}^a(t), a = 1, 2, 3, 4$

kann entschieden werden, ob eine Gefahr der Überlastung von Antriebselementen besteht oder nicht.

### 5.6. Berechnung der erforderlichen Antriebsmomente

Die Ermittlung der Antriebsmomente setzt die Kenntnis der mechanischen Bewegungsdifferentialgleichungen des Manipulators und der Funktionen  $q^a(t)$ ,  $\dot{q}^a(t)$ ,  $\ddot{q}^a(t)$  voraus. In Bild 14 sind Metrik, Christoffel-Symbo-

le und generalisierte Kräfte (aus Platzgründen nur) für das Manipulatorsteilsystem: Säule (Körper 1), Oberarm (Körper 2) gemäß Bild 4 angegeben.

Bild 15 zeigt für das Manipulatorsteilsystem: Säule, Oberarm, Unterarm, die nach (4.2) berechneten Antriebsmomente. Für Manipulatoren mit sogenannten „force-feedback“-Regelkreisen dienen diese Antriebsmomente als Führungsgrößen.

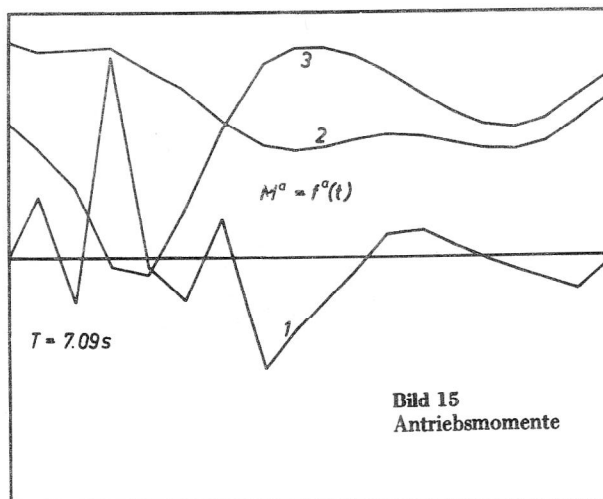
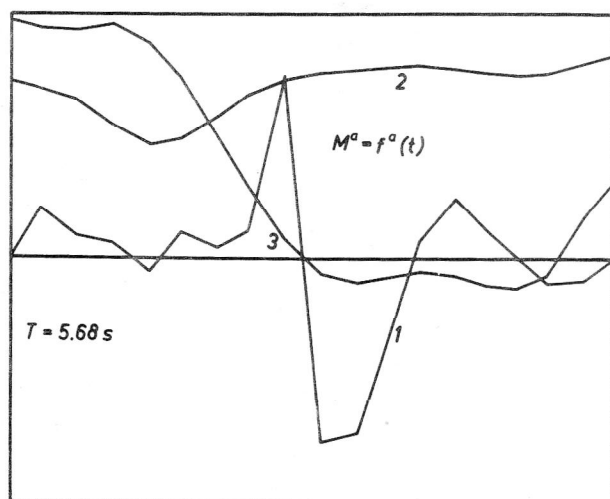


Bild 15  
Antriebsmomente

### 5.7. Diskussion der Ergebnisse und Ausblick

Die in Bild 13 angegebenen Prozesszeiten zeigen, daß bereits für die einfache Positionierungsaufgabe gemäß Bild 8 eine Arbeitsproduktivitätssteigerung von 24,8 % allein durch Optimierung über der Lagenmannigfaltigkeit erreicht wird. Ein Vorteil der vorgeschlagenen Algorithmen besteht darin, daß für diese signifikante Steigerung der Arbeitsproduktivität keine Änderungen an der hardware des Manipulators vorgenommen werden müssen. Der modulare Aufbau der Programme ELMO, SOTOS und LAGRANGE [1, 8] dient insbesondere der Nutzung in Abteilungen der technologischen Fertigungsvorbereitung.

### LITERATUR

- [1] Denk, W.: Programmsystem LAGRANGE, Forschungsbericht, in Vorbereitung, TH Ilmenau, Sektion Gerätetechnik.
- [2] Habelt, J.: Rechnergestütztes Aufstellen der Bewegungsgleichungen von Starrkörpersystemen. Diplomarbeit, TH Ilmenau, Sektion Gerätetechnik, 1978.
- [3] Lilov, L.; Wittenburg, J.: Bewegungsgleichungen für Systeme starrer Körper mit Gelenken beliebiger Eigenschaften. ZAMM 57 (1977), 137 – 152.
- [4] Maißer, P.: Automatisches Aufstellen der Bewegungsgleichungen eines Manipulators. Forschungsbericht, TH Ilmenau, Sektion Gerätetechnik, 1980.
- [5] Maißer, P.; Steigenberger, J.: Lagrange-Formalismus für diskrete elektromechanische Systeme. ZAMM 59 (1979) 12, 717 – 730.
- [6] Popov, E.P.; Vereščagin, A.F.; Zenkevič, S.L.: Manipulacionnye roboty, dinamika i algoritmy. Izdvo Nauka, Moskva, 1978.

- [7] Renaud, M.: Contribution a la Modelisation et ala Commande Dynamique des Robots Manipulateurs. Thèse présentée a l'Université Paul Sabatier de Toulouse (Sciences) en vue de l'obtention du Grade de Docteur d'état. Spécialité: Automatique. Septembre 1980.
- [8] Rothe, H.: Nutzerdokumentation für die Programme ELMO und SOTOS. Forschungsbericht, in Vorbereitung, TH Ilmenau, Sektion Gerätetechnik.
- [9] Vukobratovič, M.; Stokič, D.; Hristič, D.: New Control Concept of Industrial Manipulators. Mechanism and Machine Theory, 1977, vol. 12, pp. 515 – 530

Anschrift der Verfasser:  
Dipl.-Ing. Wolfgang Denk,  
Dr. rer. nat. Peter Maißer,  
Dr.-Ing. Hendrik Rothe,  
Technische Hochschule Ilmenau, Sektion  
Gerätetechnik  
Wissenschaftsbereich Technische Mechanik/  
Mechanismentechnik  
63 Ilmenau, PSF 327