TECHNISCHE MECHANIK 2 (1981) Heft 2
Manuskripteingang: 3. 8. 1981

Erfahrungen bei der Realisierung eines Vernetzungsprogramms auf einer EDVA. Die Generierung der Topologie

H. Horeschi, G. Widdecke

Eine der schwierigsten und fehleranfälligsten Aufgaben bei der Anwendung der Methode der Finiten Elemente (FEM) zur Verformungs- und Spannungsanalyse räumlicher Bauteile ist deren Einteilung in Elemente. Es hat sich daher als zweckmäßig erwiesen, diese Aufgabe Rechenprogrammen zu übertragen. Diese generieren aus wenigen Eingabedaten ein vollständiges und fehlerfreies Netz. Der prinzipielle Aufbau eines solchen Programms zur Erzeugung des topologischen Netzes wird am Beispiel einer Netzvergrößerung vorgestellt. Dabei kann als Nebenbedingung die besondere Numerierung von Externknoten berücksichtigt werden.

1. Einleitung

Für die Durchführung von Spannungs- und Verformungsanalysen mit Hilfe der Methode der finiten Elemente (FEM) ist es notwendig, eine größere Anzahl Eingabedaten bereitzustellen. Die Realisierung dieser Aufgabe bereitet naturgemäß in der Regel erhebliche Schwierigkeiten und ist sehr zeitaufwendig. In einem FEM-Programmsystem kommt deshalb der Datenaufbereitung eine besondere Bedeutung zu. Von ihrer Gestaltung hängt es mit ab, ob ein FEM-Programmsystem in der Praxis eine erfolgreiche und breite Anwendung findet. Eine rechnergestützte Datenaufbereitung kann wesentlich zur Erhöhung der „Nutzerfreundlichkeit" eines Programmsystems beitragen. Mit ihrer Hilfe wird es möglich, den Prozeß der Datenaufbereitung rationell und effektiv zu gestalten. Er erfordert jedoch die Entwicklung von Datengeneratoren, die auf der Grundlage relativ weniger und leicht überschaubarer Basiswerte das rechnerinterne Modell des zu untersuchenden Bauteils erzeugen. Dieses Modell hat u. a. Informationen über die

Topologie,
Knotenkoordinaten,
Belastungen,
Materialkennwerte und
Randbedingungen

zu enthalten.
Während die Bereitstellung der Werte für die drei zuletzt genannten Größen in der überwiegenden Mehrheit aller Fälle über Standardsubroutinen verwirklicht werden kann, sind für die zuerst genannten in Abhängigkeit von dem realen Bauteil die entsprechenden Unterprogramme zu entwickeln.

In der vorliegenden Arbeit soll an einem ausgewählten Beispiel das Grundkonzept und die mathematische Formulierung des Problems für den Aufbau der Matrix der Topologie vorgestellt werden. Weitergehende Erläuterungen über den Gesamtaufbau eines Datengenerators sind aus [1] und [2] zu entnehmen.

2. Spezielle Anforderungen, Programmablaufplan und erforderliche Eingabedaten für ein Vernetzungsprogramm

Jedes Netzgenerierungsprogramm arbeitet in zwei aufeinanderfolgenden Schritten. Zunächst wird die topologische Beschreibung (Zuordnung der Knotennummern zu den Elementnummern) und anschließend die geometrische Analyse (Zuordnung der Knotenkoordinaten) durchgeführt.
Beim ersten Schritt der Vernetzung ist dabei anzustreben, daß die Differenz der Knotennummern am Element möglichst klein ist, da diese die Bandbreite des später zu lösenden Gleichungssystems festlegt. Diese für zweidimensionale Probleme einfache Aufgabe wird bei räumlichen Strukturen zu einer aufwendigen und fehleranfälligen Arbeit. Deshalb sollte dieser Teil der Datengenerierung möglichst einem Rechenprogramm überlassen werden, welches mit wenigen Eingabedaten die Strukturierung durchführt.

Dabei sollte dieses Programm so arbeiten, daß eine optimale Knotennumerierung erzeugt wird. Um diese Forderungen zu erfüllen, erwies es sich als unabdingbar, komplizierte Bauteile in geometrisch und topologisch einfachere zu zerlegen. Dieser Schritt setzt allerdings die Realisierung der Substrukturtechnik im zur Verfügung stehenden FEM-Programmsystem voraus. Im Bild 1 ist der Programmablaufplan für die topologische Beschreibung einer Substruktur dargestellt. Auf die Eintragung der Felder, die für eine Zwischen- bzw. Umspeicherung von Daten benötigt werden, wurde aus Gründen einer besseren Übersicht verzichtet.

Die im ersten Eingabefeld definierten Größen NX, NY und NZ legen die Anzahl der aufzubauenden Elemente in Richtung der x-, y- und z-Koordinate fest. Wird keine Kontaktierung zu einer anderen Substruktur vorgesehen (NBEX = ∅), so reichen die drei genannten Basiswerte zum Aufbau der Matrix der Topologie aus. Für den Fall, daß die Anzahl der Bereiche der externen Knoten NBEX > ∅ ist, sind die erforderlichen Informationen für M1U, M1O, M2U, M2O, M3U und M3O NBEXmal bereitzustellen. Mit Hilfe dieser Werte erfolgt der Aufbau eines

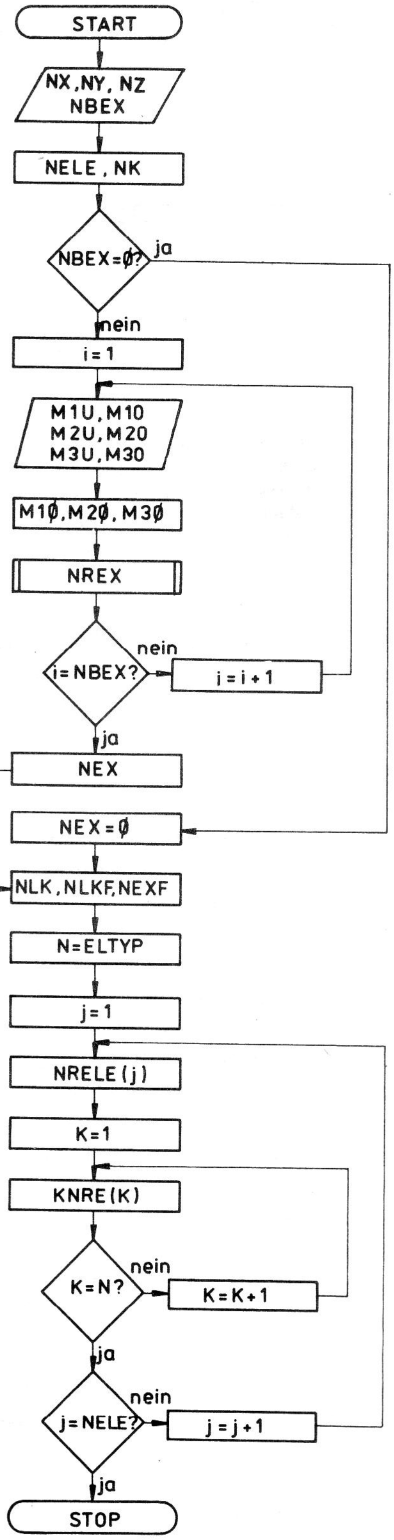

Bild 1
Programmablaufplan zur topologischen Beschreibung einer Struktur

Zahlentripels M1∅, M2∅ und M3∅ für jeden externen Knoten des Bereichs und im Operationsfeld NREX die Berechnung der dazugehörigen Knotennummern. Diese Werte werden in einem Hilfsfeld abgespeichert und bei der Abarbeitung des Operationsfeldes KNRE(K) zur Umspeicherung der Knotennummern aller Elemente verwendet. Die externen Knoten erhalten hierbei die höchsten Knotennummern der Substruktur. Aus dem Programmablaufplan ist zu entnehmen, daß eine Berechnung nachfolgender Werte vorgenommen werden kann:

NELE, NK	– Gesamtanzahl der Elemente und Knoten,
NEX, NLK NEXF, NLKF	– Gesamtanzahl der externen und lokalen Knoten und Freiheitsgrade,
NRELE(J)	– Nummern der Elemente,
KNRE(K)	– Knotennummern der Elemente.

3. Programmtechnische Realisierung

Die einzelnen mathematischen Beziehungen der im Programmablaufplan ausgewiesenen Größen können unter Berücksichtigung der konkreten Aufgabenstellungen eine sehr unterschiedliche Form annehmen. Für die Formulierung des Problems soll deshalb von einer konkreten Substruktur ausgegangen werden. Im Bild 2 ist ein Quader, bestehend aus 9 Pentaederelementen mit jeweils 15 Knotenpunkten dargestellt. In Abhängigkeit von der Anzahl der aufzubauenden Elemente in z-Richtung soll eine Netzvergrößerung in x-Richtung verwirklicht werden.

Um das Auffinden der Bildungsgesetze für die topologische Beschreibung zu erleichtern, wird eine Zerlegung der Struktur vorgenommen. Die einzelnen Schnitte werden dabei so angelegt, daß die Anzahl und Verteilung der Elemente und Knoten in den Ebenen sichtbar her-

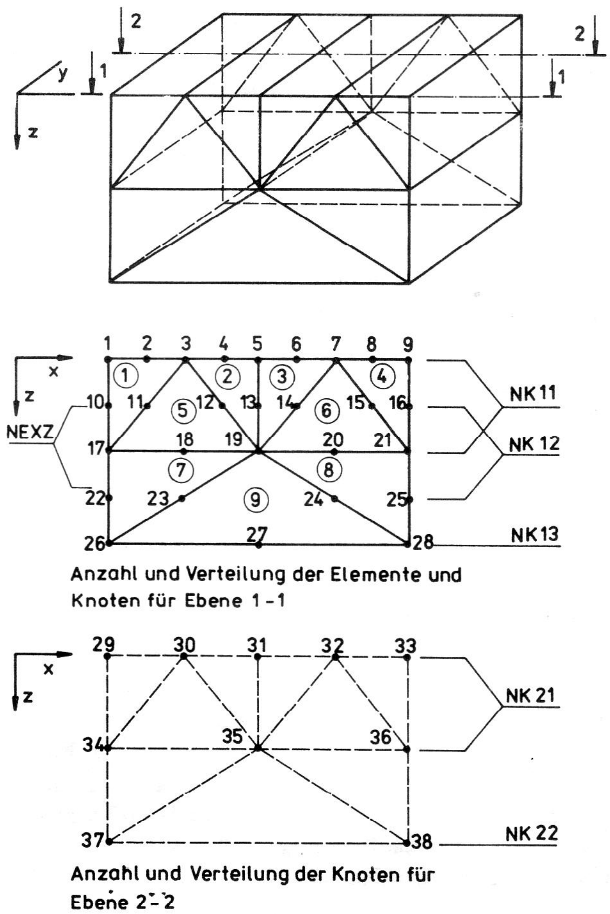

Bild 2
Darstellung der vernetzten Struktur

vortreten. Ausgehend von dieser Grundüberlegung kann für die im Bild 2 ausgewiesenen Größen, die die Anzahl der Elemente und Knoten in der x-z-Ebene definieren, aufgeschrieben werden:

Anzahl der Elemente:

$$NEXZ = 3*NX*(2**NZ-1)/2**NZ \tag{1}$$

Anzahl der Knoten für Ebene 1–1

$$NK11 = 4*NX*(2**NZ-1)/2**NZ+NZ \tag{2}$$

$$NK12 = 3*NX*(2**NZ-1)/2**NZ+NZ \tag{3}$$

$$NK13 = 2*NX/2**NZ+1 \tag{4}$$

$$NK1Y = NK11+NK12+NK13 \tag{5}$$

Anzahl der Knoten für Ebene 2–2

$$NK21 = 2*NX*(2**NZ-1)/2**NZ+NZ \tag{6}$$

$$NK22 = NX/2**NZ+1 \tag{7}$$

$$NK2Y = NK21+NK22 \tag{8}$$

Die Gesamtanzahl der Elemente und Knoten der Substruktur ergeben sich somit aus

$$NELE = NY*NEXZ \tag{9}$$

und

$$NK = NY*(NK21+NK22)+(NY+1)*(NK11+NK12+NK13) \tag{10}$$

An dieser Stelle sei bereits darauf hingewiesen, daß die Berechnung der Größen NELE und NK nur dann exakt erfolgt, wenn die Werte für NX, NY und NZ ganzzahlig sind und die Bedingung

$$NX/2**NZ*2**NZ=NX$$

erfüllt ist.

Für den Aufbau der Topologie (Koinzidenz zwischen den Element- und Knotennummern) wird die im Bild 2 gewählte Numerierung zugrunde gelegt. Bezogen auf die Ebene 1–1 und aller nachfolgenden erfolgt die Abspeicherung der Daten beginnend an einem Eckpunkt im Uhrzeigersinn, wobei der Vektor der Numerierungsrichtung in die Elementebene zeigt. Durch diese Festlegung wird erreicht, daß die später aufzubauende Systemsteifigkeitsmatrix positiv definit wird und nach dem Algorithmus von Cholesky zerlegt werden kann. Die Ermittlung der Element- und Knotennummern erfolgt unter Beachtung der Gleichungen (1) bis (10) durch Abarbeitung einer 3fachen DO-Schleife (Bild 3).

Bei den bisherigen Betrachtungen wurde die Ermittlung der externen Knoten nicht berücksichtigt. In den nachfolgenden Ausführungen soll der hierfür entwickelte Algorithmus kurz aufgezeigt werden. Die Lage der Knoten wird durch die im Programmablaufplan (Bild 1) definierten Größen beschrieben. Hierbei bedeuten:

M1U, M10 – unterer und oberer Knoten in Richtung der x - Koordinate des Bereichs

M2U, M20 – unterer und oberer Knoten in Richtung der y - Koordinate des Bereichs

M3U, M30 – unterer und oberer Knoten in Richtung der z - Koordinate des Bereichs.

Ausgehend von diesen Größen wird die Berechnung der externen Knoten über eine 3fache DO-Schleife vorgenommen (Bild 4).

```
  NKY = NK1Y + NK2Y
  DO 1  MY = 1, NY
  DO 1  MZ = 1, NZ
  NXØ = NX/2**(MZ-1)
  NX1 = 3*NX/2**MZ
  DO 1  MX = 1, NX1
  NKMY = NKY*(MY-1)
  NKMY1 = NKY*MY
  NRELE = 3*NX*(MY-1)*(2**NZ-1)/2**NZ+
 1        3*NX*(2**(MZ-1)-1)/2**(MZ-1)+MX
  IF (MX.LE.NXØ) GOTO 2
  MX1 = MX-NXØ
  KNRE(1) = NKMY+7*NX*(2**(MZ-1)-1)/2**(MZ-1)+
 1          2*(MZ-1)+4*MX1-1
  KNRE(2) = NKMY+4*NX*(2**MZ-1)/2**MZ+
 1          3*NX*(2**(MZ-1)-1)/2**(MZ-1)+
 2          2*MZ+3*MX1-1
  KNRE(3) = NKMY+7*NX*(2**MZ-1)/2**MZ+
 1          2*MZ+2*MX1+1
  KNRE(4) = KNRE(3)-1
  KNRE(5) = KNRE(3)-2
  KNRE(6) = KNRE(2)-1
  KNRE(7) = NKMY+NK1Y+2*NX*(2**(MZ-1)-1)/
 1          2**(MZ-1)+MZ+2*MX1-1
  KNRE(8) = NKMY+NK1Y+2*NX*(2**MZ-1)/2**MZ+
 1          MZ+MX1+1
  KNRE(9) = KNRE(8)-1
  KNRE(10)= KNRE(1)-NKMY+NKMY1
  KNRE(11)= KNRE(2)-NKMY+NKMY1
  KNRE(12)= KNRE(3)-NKMY+NKMY1
  KNRE(13)= KNRE(12)-1
  KNRE(14)= KNRE(12)-2
  KNRE(15)= KNRE(11)-1
  GOTO 3

2 KNRE(1) = NKNY+7*NX*(2**(MZ-1)-1)/2**(MZ-1)+
 1          2*(MZ-1)+2*MX-1
  KNRE(2) = KNRE(1)+1
  KNRE(3) = KNRE(2)+1
  KNRE(4) = NKMY+4*NX*(2**MZ-1)/2**MZ+
 1          3*NX*(2**(MZ-1)-1)/2**(MZ-1)+
 2          2*MZ+MX/2+MX/2+(MX+1)/2
  KNRE(5) = NKMY+7*NX*(2**MZ-1)/2**MZ+
 1          2*MZ+MX/2+MX/2+1
  KNRE(6) = KNRE(4)-1
  KNRE(7) = NKMY+NK1Y+2*NX*(2**(MZ-1)/2**(MZ-1)+
 1          MZ+MX-1
  KNRE(8) = KNRE(7)+1
  KNRE(9) = NKMY+NK1Y+2*NX*(2**(MZ-1)/2**MZ+
 1          MZ+MX/2+1
  KNRE(1Ø)= KNRE(1)-NKMY+NKMY1
  KNRE(11)= KNRE(1Ø)+1
  KNRE(12)= KNRE(1Ø)+2
  KNRE(13)= KNRE(4)-NKMY+NKMY1
  KNRE(14)= KNRE(5)-NKMY+NKMY1
  KNRE(15)= KNRE(13)-1

3 CONTINUE

1 CONTINUE
```

Bild 3
Programm zur Berechnung der Knotennummern der Elemente

Mit den in verkürzter Form vorgestellten Algorithmen besteht die Möglichkeit, die topologische Beschreibung der im Bild 2 enthaltenen Substruktur bei Bereitstellung weniger Basiswerte zu verwirklichen. Es sei noch einmal unterstrichen, daß auf die Sicherstellung und realisierte Form der Abspeicherung der Daten nicht eingegangen wurde.

```
      NEX  =Ø
      DO 4 M2Ø = M2U, M20
      IF (M2Ø/2*2.NE.M2Ø) GOTO 5
      ISTA = 2
      GOTO 6
 5    ISTA = 1
 6    DO 4 M3Ø = M3U, M30, ISTA
      IF (M3Ø/2*2.NE.M3Ø) GOTO 7
      M1U1=3*(M1U-1)/2**((M3Ø+2)/2)+1
      M1O1=3*(M1O-1)/2**((M3Ø+2)/2)+1
      ISTB = 1
      GOTO 8
 7    M1U1=2*(M1U-1)/2**((M3Ø+1)/2)+1
      M1O1=2*(M1O-1)/2**((M3Ø+1)/2)+1
      ISTB = 1
      IF (M2Ø/2*2.EQ.M2Ø) ISTB=2
 8    DO 4 M1Ø = M1U1, M1O1, ISTB
      NK   = M2Ø/2*NK1Y
      NK1  = (M2Ø-1)/2*NK2Y
      NK   = NK+NK1
      IF (M2Ø/2*2.NE.M2Ø)GOTO 9
      NK1  = 2*NX*(2**(M3Ø/2)-1)/2**(M3Ø/2)+
     1       M3Ø/2+(M1Ø+1)/2
      GOTO 1Ø
 9    NKI  = 4*NX*(2**(M3Ø/2)-1)/2** (M3Ø/2)+
     1       3*NX*(2**((M3Ø-1)/2)-1)/2**((M3Ø-1)/2)+
     2       (M3Ø-1)/2+M1Ø
 1Ø   NREXK= NK+NK1
      NEX  = NEX+1
 4    CONTINUE
```

Bild 4
Programm zur Berechnung der externen Knoten

4. Zusammenfassung

Die programmtechnische Realisierung der topologischen Beschreibung eines einfachen Bauteils erweist sich schon bei einer Netzvergrößerung als eine anspruchsvolle Aufgabe. Besonders dann, wenn solche Nebenbedingungen, wie Externknotenbeschreibungen und Bandbreitenminimierung berücksichtigt werden. Es ist daher leicht einzusehen, daß diese Aufgabe und noch zahlreiche andere bereits vom Entwickler von Programmsystemen in möglichst allgemeiner Form gelöst werden müssen. Aus diesem Grunde wurde für das Programmsystem COSAR ein Strukturkatalog [3] entwickelt, der zahlreiche Basisstrukturen enthält, die im allgemeinen Maschinenbau häufig vorkommen. Für diese wurden analoge Subroutinen bereitgestellt und haben sich als sehr nützlich erwiesen.

Der zweite Teil der Vernetzung, die Generierung der Knotenkoordinaten, ist ein ähnlich schwieriges Problem. Aber auch hier lassen sich unter Nutzung der Substrukturtechnik akzeptable Lösungen finden, die aus wenigen Eingabedaten die Koordinaten aller Knotenpunkte der Substruktur berechnen. Der prinzipielle Aufbau einer solchen Subroutine soll in einem nachfolgenden Artikel erläutert werden.

LITERATUR

[1] Horeschi, H.: Aufgaben und Grundprinzipien des Datengenerators für das Programmsystem COSAR. Tagungsbericht „Wissenschaftlich-technische Berechnungen und ihre Anwendung in der Praxis", Vratna Dolina, Sep. 1977, S. 150 – 170.

[2] Programmsystem COSAR – Konzeption und Realisierung eines FEM-Programmsystems zur Berechnung dreidimensionaler Kontinua. Forschungsbericht der Sektion Maschinenbau der TH Magdeburg 1976.

[3] Horeschi, H.: Probleme der Datengenerierung bei Anwendung der FEM auf dreidimensionale Aufgaben. Tagungsbericht „4th Seminar about finite elemente method and variational method", Plzen, Mai 1981, S. 121 – 124.

Anschriften der Verfasser:
Dr.-Ing. Helmut Horeschi
TH Otto von Guericke Magdeburg
Sektion Maschinenbau
DDR 3010 Magdeburg, PSF 124

Dr.-Ing. Günther Widdecke
TH Otto von Guericke Magdeburg
Sektion Dieselmotoren, Pumpen und Verdichter
DDR 3010 Magdeburg, PSF 124