TECHNISCHE MECHANIK 2 (1981) Heft 2
Manuskripteingang: 25. 5. 1981

Paradigma zur Anwendung der irreversiblen Thermodynamik auf die Turbulenz, insbesondere auf die der ebenen Kanalströmung

D. Leuschner, Friedrich Walden, Manfred Hackeschmidt

Die Instabilität der laminaren Kanalströmung wird nach dem Stabilitätskriterium von Prigogine und Glansdorff, d. h. aus der Sicht der irreversiblen Thermodynamik, untersucht.
Es läßt sich zeigen, daß sich die Exzeßentropieproduktion aus einem dissipativen und einem Trägheitsanteil zusammensetzt. Diese beiden Anteile bestimmen die kritische Reynoldszahl für den Beginn des Übergangs vom laminaren Fließen zur turbulenten Bewegung. Für die praktische Aufbereitung der Problematik und die Erfassung der Entropieproduktion dient ein im Sinne von Albring aus diskreten Wirbeln aufgebautes Feld.

1. Einleitung
Thermodynamik und Turbulenz

Hinsichtlich der großen theoretischen und praktischen Bedeutung, die der Aufklärung des Turbulenzproblems zukommt, wird auf Darlegungen von W. Albring (1979) [12] verwiesen.
Für das Turbulenzproblem, insbesondere für das Problem des Übergangs von der laminaren zur turbulenten Bewegung, aber auch für das Problem der Beschreibung der ausgebildeten Turbulenz selbst gibt es heute wie für manches andere Teilproblem der Strömungslehre noch keine abgeschlossene Theorie. So werden immer wieder neue theoretische Ansatzpunkte gesucht und gefunden, unter anderem auch die Informationstheorie (vgl. z. B. Maschek, 1979) [2] und die Thermodynamik (vgl. z. B. Leuschner, 1978) [3].
Der Zugang zur Turbulenz über die Thermodynamik ist auf sechs verschiedenen Wegen möglich, die dadurch zustande kommen, daß entweder die phänomenologische oder die statische Thermodynamik zugrunde gelegt wird. In jedem der beiden Fälle ist es nunmehr noch möglich, drei verschiedene Methoden zu wählen. Erstens: Anwendung der Gleichgewichtsthermodynamik auf die Turbulenz und Anbringen entsprechender linearer bzw. nichtlinearer Abänderungen zur Erfassung der speziellen Nichtgleichgewichtssituation der Turbulenz.
Zweitens: Erweiterung der Gleichgewichtsthermodynamik auf eine Nichtgleichgewichtsthermodynamik und Anwendung der letzteren auf das Turbulenzproblem. Drittens: Anwendung einer ihrem Ursprung nach dynamischen Nichtgleichgewichtsthermodynamik auf die Turbulenz.
Ein Abwägen der Vor- und Nachteile dieser sechs Möglichkeiten ist Gegenstand einer besonderen Betrachtung und soll jetzt nicht untersucht werden. Vielmehr wird hier im Anschluß an Leuschner (1978) [3] die folgende Methode gewählt: Übergang von der phänomenologischen Gleichgewichtsthermodynamik zur phänomenologischen Nichtgleichgewichtsthermodynamik und Anwendung der letzteren auf die Turbulenz.
Ein gemäß dieser Vorgehensweise im folgenden erklärter Ansatz wird am Beispiel der Kanalströmung ausführlich demonstriert.

2. Die Kanalströmung

Die Strömung zwischen zwei ebenen Platten scheint wegen der möglichen mathematischen Reduktion auf zwei Dimensionen ein geeignetes Beispiel zu sein. Es wird zuerst das thermodynamische Stabilitätsproblem und dann die Entropieproduktion behandelt.

2.1. Instabilität der laminaren Kanalströmung

Nach der Darstellung eines kurzen historischen Abrisses über den Tollmienschen Weg zur Erfassung der Turbulenz schreibt Albring (1970) [1]: „Grundsätzlich wäre es aber auch möglich, sich der Lösung des Problems, nämlich ein Kriterium für den Übergang laminar-turbulent zu finden, von anderen Ausgangspunkten zu nähern." Gemäß dieser Intention wählen wir hier das Stabilitätskriterium von Prigogine und Glansdorff (Glansdorff und Prigogine, 1971) [4], das zum mathematisch-physikalischen Formalismus der Thermodynamik irreversibler Prozesse gehört (vgl. auch Leuschner, 1978) [3].
Dieses Kriterium lautet

$$\frac{d}{dt}\,\delta^2 S \geqslant 0 \tag{1}$$

Dabei ist $\delta^2 S$ die Entropievariation zweiter Ordnung. Sie wird auch als Exzeßentropie bezeichnet. Das Stabilitätskriterium besagt also, daß die Exzeßentropieproduktion für einen bestimmten Vorgang oder Zustand positiv sein muß, wenn dieser stabil sein soll. In dem Falle, daß die Exzeßentropieproduktion negativ wird, ist der betreffende Zustand instabil, und es kann ein Übergang zu einer anderen Struktur (Zustand) erfolgen. Die Exzeßentropieproduktion läßt sich mittels der thermodynamischen Kräfte X_k und Flüsse J_k mit Hilfe des Ausdrucks (Integration über das gesamte Volumen V)

$$\frac{d}{dt}\,\delta^2 S = \int dV\,\delta X_k\,\delta J_k \tag{2}$$

berechnen. Wird dieses Vorgehen auf Vorgänge übertragen, bei denen Konvektion eine Rolle spielt, so sind generalisierte Kräfte X_k' und Flüsse J_k' einzusetzen und statt der substantiellen die partielle Zeitableitung zu schreiben (vgl. Hackeschmidt 1977 und Leuschner, 1978) [5], [3]. Damit ist der Eulerschen Betrachtungsweise Genüge getan, die von Strömungstechnikern bevorzugt wird. Für Strömungsprobleme lauten die verallgemeinerten Kräfte und Flüsse (vgl. Glansdorff und Prigogine, l.c.) [4]:

$$X_k' = \frac{1}{T}\,\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (i,j = 1,2,3) \tag{3}$$

$$J_k' = -(p_{ij} + \rho v_i v_j) \quad (i,j = 1,2,3) \tag{4}$$

Dabei sind v_i die Geschwindigkeitskomponenten, x_i die Ortskoordinaten und p_{ij} die Komponenten des Drucktensors. Wird für den Drucktensor der bekannte Ansatz (es wurde hier insgesamt die Tensorschreibweise mit Indizes gewählt, um die Einsteinsche Summenkonvention, d. h. Summation über doppelt vorkommenden Index, benutzen zu können)

$$p_{ij} = -\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) + \frac{2}{3}\eta\,\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\,\delta_{ij} \tag{5}$$

aufgeschrieben, so ergibt sich für (2) mit (3), (4) und (5) der Ausdruck (ρ = Dichte, η = dynamische Zähigkeit)

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\delta^2 S = \int_V dV\,\delta X_k'\,\delta J_k' =$$

$$= \int_V dV\left\{\delta\left[\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\right]\delta\left(T^{-1}\,\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) - \right. \tag{6}$$

$$\left. - \rho\,\delta\,(v_i v_j)\,\delta\,(T^{-1}\,\frac{\partial v_i}{\partial x_j})\right\}$$

Dabei ist inkompressibles Medium mit

$$\delta\rho = 0 \tag{7}$$

vorausgesetzt, was sich andererseits in der ebenfalls benutzten Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0 \tag{8}$$

widerspiegelt.

Der Ausdruck (6) wird nun in folgender Weise umgeformt:

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\delta^2 S =$$

$$= \int_V dV\left\{\eta\left(\frac{\partial\delta v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\delta v_j}{\partial x_i}\right)T^{-1}\,\frac{\partial\delta v_i}{\partial x_j} - \right. \tag{9}$$

$$\left. - \rho\,\delta\,(v_i v_j)\,T^{-1}\,\frac{\partial\delta v_i}{\partial x_j}\right\}$$

Wird Isothermie vorausgesetzt, ergibt sich weiter

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\delta^2 S =$$

$$= T^{-1}\int_V dV\left\{\eta\left(\frac{\partial\delta v_i}{\partial x_j}\,\frac{\partial\delta v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\delta v_j}{\partial x_i}\,\frac{\partial\delta v_i}{\partial x_j}\right) - \right. \tag{10}$$

$$\left. - \rho\,\delta\,(v_i v_j)\,\frac{\partial\delta v_i}{\partial x_j}\right\}$$

Der erste Term in der Klammer läßt sich in folgender Weise symmetrisieren und umformen:

$$\frac{\partial\delta v_i}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial\delta v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\delta v_j}{\partial x_j}\,\frac{\partial\delta v_i}{\partial x_j} =$$

$$= \left(\frac{\partial\delta v_i}{\partial x_j}\right)^2 + \frac{\partial\delta v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial\delta v_i}{\partial x_j}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\delta v_i}{\partial x_j}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\delta v_j}{\partial x_i}\right)^2 + \frac{2}{2}\,\frac{\partial\delta v_j}{\partial x_i}\,\frac{\partial\delta v_i}{\partial x_j}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\delta v_i}{\partial x_j}\right)^2 + 2\,\frac{\partial\delta v_i}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial\delta v_j}{\partial x_i} + \left(\frac{\partial\delta v_j}{\partial x_i}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\delta v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\delta v_j}{\partial x_i}\right)^2 \tag{11}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\delta v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial\delta v_j}{\partial x_i}\right)^2 + 2\,\frac{\partial\delta v_i}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial\delta v_j}{\partial x_i}$$

Wird der letzte Term in (11) partiell integriert, so ergibt sich

$$\int_V dV\,\frac{\partial\delta v_i}{\partial x_j}\,\frac{\partial\delta v_j}{\partial x_i} =$$

$$= \int_V dV\,\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\delta v_i\,\frac{\partial\delta v_j}{\partial x_i}\right) - \int_V dV\,\delta v_i\,\frac{\partial^2\partial v_j}{\partial x_i\partial x_j} \tag{12}$$

$$= \int d\Omega\left(\delta v_i\,\frac{\partial\delta v_j}{\partial x_i}\right) - \int_V dV\,\delta v_i\,\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\delta v_j}{\partial x_j}\right) = 0$$

Das erste Integral verschwindet wegen $\delta v_i = 0$ auf der Oberfläche Ω des Volumens V (es wurde der Gaußsche Integralsatz angewendet).

Das zweite Integral verschwindet wegen (8), weil

$$\frac{\partial\delta v_j}{\partial x_j} = \delta\,\frac{\partial v_j}{\partial x_j} \quad \text{ist.}$$

Es bleibt noch der zweite Ausdruck in (10) zu untersuchen. Er wird in

$$\delta\,(v_i\ v_j)\,\frac{\partial\delta v_i}{\partial x_j} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j} (\delta (v_i v_j) \delta v_i) - \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (\delta (v_i v_j))\right] \cdot \delta v_i \tag{13}$$

umgeformt. Wird von dem ersten Term dieses Ausdrucks das Volumenintegral gebildet, so läßt sich dieses analog dem Vorgehen in (12) in ein Oberflächenintegral überführen, was wieder wegen $\delta v_i = 0$ auf dem Integrationsrand verschwindet.
Der zweite Term in (13) läßt sich ebenfalls umformen:

$$\begin{aligned} &\left(\delta v_j \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j}\right) \delta v_i = \\ &= \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \delta v_i \delta v_j + v_j \delta v_i \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} \end{aligned} \tag{14}$$

Der zweite Term der Gl. (14) wird zu

$$v_j \delta v_i \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} = v_j \frac{1}{2} \frac{\partial (\delta v_i)^2}{\partial x_j} \tag{15}$$

Dieser Ausdruck kann analog (13) umgeformt werden (ohne Faktor $\frac{1}{2}$)

$$\begin{aligned} &v_j \frac{\partial (\delta v_i)^2}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (v_j (\delta v_i)^2) - (\delta v_i)^2 \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} (v_j (\delta v_i)^2) \end{aligned} \tag{16}$$

Der zweite Ausdruck nach dem ersten Gleichheitszeichen verschwindet wegen (8). Auf den übrigbleibenden Term läßt sich wieder der Gaußsche Integralsatz anwenden, wobei das Oberflächenintegral

$$\int d\Omega \, v_j (\delta v_i)^2 = 0 \tag{17}$$

verschwindet, weil $\delta v_i = 0$ auf dem Rand gilt.

Die Exzeßentropieproduktion (10) wird schließlich mit den verbleibenden Ausdrücken aus (11) und (14):

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} \delta^2 S \\ &= T^{-1} \int_V dV \left[\frac{\eta}{2} \left(\frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \delta v_j}{\partial x_i}\right)^2 - \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \delta v_i \delta v_j\right] \end{aligned} \tag{18}$$

Nach Gleichung (18) setzt sich die Exzeßentropieproduktion aus einem dissipativen und einem Trägheitsteil zusammen. Bemerkenswert ist, daß sich der Scheinspannungstensor nach der phänomenologischen Turbulenztheorie von Hackeschmidt (1979 und 1981) [6], [7] ebenfalls aus zwei Gliedern gleichen Charakters zusammensetzt. Bevor aber diese Zusammenhänge näher untersucht werden, soll hier zunächst der Ausdruck (18) für die Kanalströmung als ein einfaches Anwendungsbeispiel aufbereitet werden, d. h. es gilt, diesen Ausdruck für die zwei Dimensionen x_1 und x_2 (x_1 sei die Richtung der Hauptströmung) zu spezifizieren. Dabei geht das Volumenintegral (Integral über die Länge l in x_3-Richtung) in ein Flächenintegral über und von den jeweils neun (wegen der Einsteinschen Summenkonvention) Termen der beiden Teilausdrücke des Integranden bleiben nur zwei insgesamt übrig, wobei zu beachten ist, daß

$$\frac{\partial \delta v_i}{\partial x_3} = \delta \frac{\partial v_i}{\partial x_3} = 0 \tag{19}$$

(in der Richtung senkrecht zur Strömung und parallel zu den Wänden findet gemäß Voraussetzung der zweidimensionalen Strömung keine Geschwindigkeitsänderung statt),

$$\frac{\partial \delta v_3}{\partial x_i} = \delta \frac{\partial v_3}{\partial x_i} = 0 \tag{20}$$

(wegen $v_3 = 0$),

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \equiv 0 \tag{21}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right) = 0 \tag{22}$$

(Kontinuitätsgleichung),

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial \delta v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \delta v_2}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \delta v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \delta v_1}{\partial x_2}\right)^2 = \\ &= 2\left(\frac{\partial \delta v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \delta v_2}{\partial x_1}\right)^2 \end{aligned} \tag{23}$$

und

$$\frac{\partial v_2}{\partial x_1} = 0 \tag{24}$$

(alle Schnittebenen senkrecht zur Strömung besitzen das gleiche Geschwindigkeitsprofil) gilt. Der Ausdruck für die Exzeßentropieproduktion der Kanalströmung lautet demnach mit den verbleibenden zwei Resttermen:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} \delta^2 S = \\ &= T^{-1} \iint \left\{ \eta \left(\frac{\partial \delta v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \delta v_2}{\partial x_1}\right)^2 - \right. \\ &\left. - \rho \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \delta v_1 \delta v_2 \right\} dx_1 \, dx_2 \equiv \eta \, I_2 - \rho \, I_1 \end{aligned} \tag{25}$$

Der Anteil zur Exzeßentropieproduktion infolge Dissipation durch die Wirkung der Zähigkeit (η) ist immer positiv. Solange der zweite, durch Trägheit (ρ) der Teilchen bedingte Beitrag betragsmäßig kleiner als der erste ist, fließt das Medium im Kanal laminar. Instabilität (bzw. der Übergangsanfang zur Turbulenz im Kanal) tritt auf, wenn die Exzeßentropieproduktion negativ wird

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta^2 S < 0 , \tag{26}$$

d. h., wenn

$$\rho \, I_1 > \eta \, I_2 \tag{27}$$

gilt. In den üblichen Termini der Strömungslehre bedeutet dies bei Festlegen der Identität

$$\frac{\rho I_1}{\eta I_2} \equiv \text{Re} \frac{I_1'}{I_2'} \tag{28}$$

(I_1', I_2' sind dimensionslose Ausdrücke der Integrale I_1, I_2, Re = Reynolds-Zahl), daß der Übergangspunkt vom laminaren in den turbulenten Zustand entsprechend

$$\rho I_1 = \eta I_2 \tag{29}$$

durch

$$\frac{\rho I_1}{\eta I_2} = 1 \tag{30}$$

gekennzeichnet ist, was nach (28) bedeutet

$$\text{Re} = \text{Re}_{kr} = \frac{I_2'}{I_1'}, \tag{31}$$

d. h., die Reynoldszahl erreicht ihren kritischen Wert Re_{kr}

2.2. Entropieproduktion bei der Kanalströmung

In Fortsetzung des thermodynamischen Ansatzes zur Erfassung der turbulenten Bewegung betrachten wir nunmehr die Spezifik der Entropieproduktion am Beispiel der Kanalströmung. Die Entropieproduktion ist durch

$$P = \int_V dV \sum_k J_k' X_k' \tag{32}$$

(vgl. Leuschner, 1978) gegeben [3]. Um diesen Ausdruck auf das Turbulenzproblem anzuwenden, greifen wir auf die von Albring [1] (1970) in folgender Weise angegebene Phänomenologie zurück: „Das Entstehen der Turbulenz, also das Bilden von Wirbeln und ihr Aufspalten in kürzer- und längerwellige Bewegungen, ist ein Elementarvorgang, ..." Den genannten Vorgang betrachten wir jetzt sowohl im Übergangsgebiet als auch bei der vollständig ausgebildeten Turbulenz vom Standpunkt der Entropieproduktion. Der Einfachheit halber wird der Elementarvorgang als einheitlich angesehen (sicher entspricht eine Superposition von Einzelvorgängen der Realität viel besser, jedoch soll dies in einer späteren Arbeit abgehandelt werden), indem nur eine thermodynamische Kraft X' und ein thermodynamischer Fluß J' betrachtet werden. Wir wählen zunächst einen Parameter ϵ, der das Ausmaß des in Rede stehenden Vorgangs im Übergangsgebiet charakterisiert. Obwohl für die fernere Betrachtung keine genaue Festlegung von ϵ notwendig ist, kann beispielsweise an den Massenanteil des Mediums in einem bestimmten Raumgebiet gedacht werden, welcher bereits von der Turbulenz erfaßt ist. Der Parameter wäre dann in folgender Weise normiert:

$\epsilon = 0$ bedeutet keine Turbulenz, $\epsilon = 1$ vollständige Turbulenz. Er entspricht dem Wesen nach dem bekannten Intermittenzfaktor (Townsend 1956) [8]. Ferner wird der thermodynamische Fluß J' durch

$$J' \equiv v_\epsilon \equiv \frac{d\epsilon}{dt} \tag{33}$$

festgelegt, d. h. durch die zeitliche Änderung von ϵ. Als nächstes fragen wir nach einer geeigneten Definition für die thermodynamische Kraft X'. Aus Dimensionsgründen kommt,

$$X' \equiv Y \equiv \frac{1}{T} \frac{\partial g}{\partial \epsilon} \tag{34}$$

in Frage, wenn g das spezifische Gibbssche Potential (freie Enthalpie pro Volumeneinheit) und T die thermodynamische Temperatur darstellen. Die Entropieproduktion ergibt sich damit gemäß (32) als (G = Gibbssches Potential)

$$P = \frac{1}{T} \frac{\partial G}{\partial \epsilon} \frac{d\epsilon}{dt} \tag{35}$$

Dabei wurde Isothermie in dem Sinne vorausgesetzt, daß auftretende Temperaturdifferenzen gering sind bzw. sich im turbulenten Zustand ausgleichen. Außerdem ist der Zustand in dem Sinne als homogen aufgefaßt, daß die Volumenintegration mit einem geeigneten Mittelwert für $\frac{\partial G}{\partial \epsilon}$ ausgeführt werden kann. Die genannten Voraussetzungen sind bei der (zweidimensionalen) Kanalströmung erfüllt.

Wird jetzt für G der übliche Ausdruck (H = Enthalpie, S = Entropie)

$$G = H - TS$$

eingesetzt [9], so ergibt sich

$$P = \frac{1}{T} \frac{\partial H}{\partial \epsilon} v_\epsilon - \frac{\partial S}{\partial \epsilon} v_\epsilon \equiv P_u + P_s \tag{37}$$

Damit sind die an die Umgebung abgegebene Entropieproduktion durch

$$P_u \equiv \frac{1}{T} \frac{\partial H}{\partial \epsilon} v_\epsilon \tag{38}$$

und die im System verbleibende und für die Aufrechterhaltung der Turbulenz benötigte Entropieproduktion durch

$$P_s \equiv - \frac{\partial S}{\partial \epsilon} v_\epsilon \tag{39}$$

definiert. Es wird nun gefordert, daß die in Gl. (37) fixierte Aufteilung der gesamten Entropieproduktion P in zwei Terme auch „oberhalb" des Übergangsgebietes, d. h. bei voll ausgebildeter Turbulenz, Gültigkeit besitzt. Bei der betrachteten Kanalströmung kann die gesamte Entropieproduktion P eines bestimmten Volumens aus dem Druckabfall über die entsprechende Strecke ermittelt werden. Die Bestimmung von P_u (viskositätsbehaftete Entropieproduktion) erfolgt, obwohl sich meßtechnische Schwierigkeiten ergeben, was aber bei Turbulenzmessungen eine obligatorische Erscheinung darstellt, durch die Erfassung der Wärmeproduktion mittels Temperaturmessung. Dagegen hat man zur Größe P_s (viskositätsfreie Entropieproduktion) einen theoretischen Zugang, indem man für die Kanalströmung ein geeignetes Wirbelmodell (siehe weiter unten) zugrundelegt und dazu im Prinzip die Entropie S und deren Funktionsverlauf in Zeitabhängigkeit betrachtet. Die Normierung von

P_s auf Grund eines solchen Modells geschieht mittels der Differenz

$$P_s = P - P_u \tag{40}$$

aus den beiden im Kanal mittels Druck- bzw. Temperaturmessungen experimentell ermittelten Größen P bzw. P_u. Dabei sind entweder das Gleichgewicht (ruhende Flüssigkeit) oder das steady state (laminares Fließen) als Bezugszustand gewählt. Die sich im Kanal ausbildende Turbulenz ist systemoptimiert, d. h., das System strebt einen Zustand an, der eine möglichst große Entropieproduktion zur Aufrechterhaltung seiner selbst verbraucht. Es gilt

$$P_s = \text{Max} \tag{41}$$

P_s nimmt also bei voll ausgebildeter Turbulenz einen Maximalwert an. Das läßt sich auch durch

$$P_u = \text{Min} \tag{42}$$

ausdrücken: Die vom System nach außen abgegebene Entropieproduktion strebt einem Minimalwert zu.
Nach praktischer Erwägung hat nur die Größe P Bedeutung, weil sie ein Maß für den gesamten Energieverlust in der Kanalströmung darstellt. Es läßt sich als Forderung aufschreiben

$$P \rightarrow \text{Min}\,, \tag{43}$$

d. h., P soll aus energetischen Gründen möglichst minimal gehalten werden. Diese Frage soll uns hier nicht beschäftigen. Dagegen ist es von Interesse, ob durch geeignete Maßnahmen ein optimaler Wert für das Verhältnis

$$L = \frac{P_u}{P} \tag{44}$$

bzw. (bei festem P)

$$W = \frac{P_u}{P_s} \tag{45}$$

eingestellt werden kann. Durch geeignete stoffliche Zusätze zum strömenden Medium ist nicht nur (43), sondern auch (44) und (45) beeinflußbar.
Abschließend soll etwas zur oben erwähnten Modellrechnung, die die P_s-Werte abzuschätzen gestattet, gesagt werden. Für das System der Wirbel im Kanal wird bei der vorliegenden zweidimensionalen Strömung ein Netz aus in zwei aufeinander senkrecht stehenden Richtungen aneinanderliegenden Rechtecken angenommen (eine Rechteckseite liegt in Richtung der Hauptströmung), wobei an den Eckpunkten der Rechtecke jeweils Wirbel liegen. Obendrein sind in den Flächenmitten der Rechtecke weitere Wirbel angeordnet. Die Rechtfertigung für ein solches geordnetes Modell liegt darin begründet, daß der turbulente Zustand als eine dissipative Struktur, wobei Struktur immer auf Ordnung hinweist, aufgefaßt wird (vgl. Leuschner, 1978). Außerdem sei Sommerfeld zitiert [3], der im Zusammenhang mit der Karmanschen Wirbelstraße bemerkt [10]: „Die Kunst des mathematischen Physikers besteht darin, das jeweils vorliegende physikalische Problem zu idealisieren, daß es der mathematischen Behandlung zugänglich wird."
Die Entropieproduktion P_s, die zur Aufrechterhaltung der Turbulenz dient, kommt dadurch zustande, daß die Konfiguration der Wirbel „pulsiert", d. h. allein der Konfigurationswechsel in dem ebenen Wirbelfeld bedingt den P_s-Wert. Man kann dies als einen „Wirbelaustausch" interpretieren, der durch die Translation des Wirbelfeldes zustandekommt. Diese Austauschwechselwirkung bzgl. der Wirbelgeometrie liefert eine viskositätsfreie Entropieproduktion P_s, die die Stabilität des turbulenten ebenen Strömungsfeldes im Kanal bewirkt. Die explizite Berechnung von P_s muß von (39) ausgehen. Von dieser Gleichung interessiert nur der Betrag

$$|P_s| = \frac{\partial S}{\partial \epsilon}\,\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\Delta S}{\tau} \tag{46}$$

Dabei wurde die stetige Zeitfunktion $\frac{\partial}{\partial t}$ S(t) mittels einer Entropiedifferenz ΔS, dividiert durch eine charakteristische Pulsationszeit τ, ersetzt.
Die Entropie bezieht sich auf das im Anschluß an Gl. (39) erwähnte, in Rede stehende bestimmte Volumen, in dem sich flächenzentrierte Wirbelrechtecke befinden. Da nach der Zeit τ nur ein Austausch von „Eckwirbeln" und „Flächenzentrierungswirbeln" stattgefunden hat, ist der Entropiezuwachs ΔS durch die Entropie S_z einer Zelle (Rechteck) des Wirbelnetzes, multipliziert mit der Anzahl n solcher Zellen im betrachteten Volumen, gegeben:

$$\Delta S = n\,S_z \tag{47}$$

Es gilt also nur noch S_z zu bestimmen. Dazu verwenden wir die Boltzmann-Beziehung (vgl. z. B. Fast, 1960) [11] in der Form

$$S_z = k \ln W_z \tag{48}$$

(k = Boltzmann-Konstante, W_z = Anzahl der Mikrozustände = thermodynamische Wahrscheinlichkeit). Die Größe W_z wird durch die Anzahl der Permutationen in einer Zelle festgelegt:

$$W_z = 2! \tag{49}$$

Zu einer Zelle gehören im vorliegenden Modell zwei Wirbel (1 Flächenzentrierung und $4 \cdot \frac{1}{4} = 1$ Eckpunkt, weil alle 4 Eckpunkte zu einer Zelle nur mit $\frac{1}{4}$ beitragen). Im allgemeinen Fall, in dem zu einer Wirbelzelle N Wirbel gehören, gilt natürlich

$$W_z = N! \tag{50}$$

Berücksichtigen wir noch einen Normierungsfaktor A, so ergibt sich aus (40), (46), (47), (48), (49) für unser Modell

$$|P - P_u| = A \cdot \frac{n\,k \ln 2!}{\tau} \tag{51}$$

oder für ein beliebiges Modell mit N Wirbeln in der Zelle

$$|P - P_u| = A \cdot \frac{n\,k \ln N!}{\tau} \equiv C \ln N! \tag{52}$$

mit

$$C \equiv \frac{A\,n\,k}{\tau} \tag{53}$$

Dabei ist k bekannt, n und $|P - P_u|$ können experimentell bestimmt werden, so daß der Quotient $\frac{A}{\tau}$ berechenbar ist. Werden noch Abschätzungen für τ (beispielsweise aus dem Übergangsverhalten vom laminaren zum turbulenten Zustand) vorgenommen, so ergibt sich A. In jedem Falle ist A bzw. $\frac{A}{\tau}$ eine wichtige thermodynamische Größe, die den turbulenten Zustand charakterisiert.

LITERATUR

[1] Albring, W.: Rückblick und Zielpunkte der Turbulenzforschung. Wiss. Z. d. TU Dresden 19 (1970) H. 4, S. 975 – 979.

[2] Mascheck, H.-J.: Informationstheoretische Beschreibung der Turbulenz. 2. Tagung Strömungstechnik Magdeburg 3. – 6. 9. 79 Report R–11/79, S. 109 – 112.

[3] Leuschner, D.: Evolutions- und Stabilitätskriterien: Ein thermodynamisches Konzept – auch bei Konvektion. Report R–05/79 Heft 2, S. 153 – 161 von der Tagung „Transportprozesse in turbulenten Strömungen" in Eisenach (1978).

[4] Glansdorff, P.; Prigogine, I.: Thermodynamic Theory of Structure, Stability and Fluctuations. London usw. (1971).

[5] Hackeschmidt, M.: Zur Lagrangeschen und Eulerschen Betrachtungsweise offener Systeme. Wiss. Z. der HfV „Friedrich List" Dresden H3 (1977), S. 601 ff.

[6] Hackescnmidt, M.: Zur Impulsübertragungsanalogie zwischen Molekularbewegung und turbulentem Massenstrom. Beitrag Tagung ZIMM der AdW der DDR November 1978 in Eisenach. Wiss. Z. der HfV 26 (1979) 5, S. 907 bis 920.

[7] Hackeschmidt, M.: Eine rezente phänomenologische Turbulenztheorie, erprobt am Beispiel der Rohrmittenströmung. Luft- und Kältetechnik 1981/2 S. 89 bis 92.

[8] Townsend, A.A.: The Structure of Turbulent Shear Flow. Cambridge (1956).

[9] Leuschner, D.: Grundbegriffe der Themodynamik Berlin und Braunschweig (1979).

[10] Sommerfeld, A.: Mechanik der deformierbaren Medien Leipzig (1957).

[11] Fast, J. D.: Entropie. Hilversum u. Eindhoven (1960).

[12] Albring, W.: Wege der Wissenschaft. Wissenschaft und Fortschritt 29 (1979) H. 9, S. 329.

Anschrift der Verfasser:

Dr. rer. nat. D. Leuschner
Dipl.-Ing. Friedrich Walden
Prof. Dr.-Ing. habil. Manfred Hackeschmidt
Hochschule für Verkehrswesen „Friedrich List"
Sektion Fahrzeugtechnik
8027 Dresden, Friedrich-List-Platz 1