

Berechnung von erzwungenen, gedämpften Biegeschwingungen mit Übertragungsmatrizen

H. Sollmann

Das Ziel der Arbeit besteht darin, das Verhalten von Biegesystemen beurteilen zu können, die erzwungene, gedämpfte Schwingungen ausführen. Zur Lösung der Aufgabe wird das Verfahren der Übertragungsmatrizen herangezogen. Dabei werden im Hinblick auf eine möglichst breite Anwendbarkeit auf Probleme des allgemeinen Maschinenbaus zunächst verschiedene Übertragungsmatrizen aufbereitet. Diese Vorgehensweise gestattet, spezielle Probleme untersuchen zu können, wie etwa das Schwingungsverhalten von Leit- und Laufschaufeln axialer Turbomaschinen oder die Beurteilung der Biegeschwingungen von Rotoren. Die Aufbereitung der Übertragungsmatrizen erfolgt unter Anwendung der komplexen Schreibweise, d. h. es werden alle zeitabhängigen Größen als Imaginärteil einer komplexen Veränderlichen aufgefaßt. Die Lösung von Schwingungsproblemen mit Hilfe der komplexen Schreibweise ist nicht neu, sie wird beispielsweise schon von Cremer [1] und Wagner [2] benutzt. Im Hinblick auf ein aufzustellendes Rechenprogramm in der Programmiersprache FORTRAN, bei der mit komplexen Größen gerechnet werden kann, werden die dimensionslosen Zustandsgrößen des Zustandsvektors in komplexer Schreibweise angegeben. Die zum Schluß der Rechnung an einer beliebigen Schnittstelle in Real- und Imaginärteil vorliegenden Zustandsgrößen der Verschiebung, der Neigung, des Biegemoments und der Querkraft können dann mit der im allgemeinen variablen Erregerfrequenz entweder als Ortskurve oder nach Zusammenfassung als Vergrößerungsfunktion dargestellt werden.

1. Vorbetrachtungen

Es ist bekannt, daß jede zeitabhängige Größe als Imaginärteil einer komplexen Veränderlichen aufgefaßt werden kann, beispielsweise

$$y = \hat{y} \sin(\Omega t + \beta) \quad (1)$$

ist der Imaginärteil der komplexen Veränderlichen

$$\begin{aligned} \tilde{y} &= \hat{y} [\cos(\Omega t + \beta) + j \sin(\Omega t + \beta)] = \hat{y} e^{j(\Omega t + \beta)} = \\ &= \hat{y} e^{j\beta} \cdot e^{j\Omega t} = \hat{\tilde{y}} e^{j\Omega t} \end{aligned} \quad (2)$$

Die darin enthaltene komplexe Amplitude $\hat{\tilde{y}} = \hat{y} e^{j\beta}$ läßt sich stets in einen Realteil $\text{Re}(\hat{\tilde{y}})$ und einen Imaginärteil $\text{Im}(\hat{\tilde{y}})$ aufspalten, nämlich

$$\begin{aligned} \hat{\tilde{y}} &= \hat{y} [\cos \beta + j \sin \beta] = \hat{y} \cos \beta + j \hat{y} \sin \beta = \\ &= \text{Re}(\hat{\tilde{y}}) + j \text{Im}(\hat{\tilde{y}}) \end{aligned} \quad (3)$$

Sind Real- und Imaginärteil bekannt, so folgt daraus die wirkliche Größe

$$\hat{y} = \sqrt{\text{Re}^2(\hat{\tilde{y}}) + \text{Im}^2(\hat{\tilde{y}})} \quad (4)$$

Ein Vorteil der komplexen Rechnung besteht darin, daß sich der Zeiteinfluß $e^{j\Omega t}$ zu Beginn der Rechnung abtrennen läßt, und nur die komplexen Amplituden betrachtet werden brauchen. Um Schreiarbeit zu sparen, wird deshalb von vornherein vereinbart, daß alle zeitabhängigen Größen (Zustandsgrößen, Erregungen) sogleich als komplexe Größen aufgefaßt und nicht extra gekennzeichnet werden. Eine Ausnahme bilden jene Größen, die im Verlaufe der Rechnung nicht sofort als komplexe erkannt werden.

Sie erhalten die übliche Kennzeichnung durch eine Tilde.

Eine in die Rechnung eingehende Übertragungsmatrix ist die Matrix eines elastischen Balkenabschnittes mit konstantem Querschnitt. Er kann als masselos oder als massebelegt aufgefaßt werden. Diesem Balkenabschnitt wird neben einer äußeren eine innere Dämpfung zugeordnet, unabhängig davon, für welche der beiden Matrizen man sich bei der Festlegung des Modells entscheidet. Nach Bild 1 wird jeder Werkstofffaser neben einer Federsteifigkeit eine Dämpfungsfähigkeit zugesprochen, wobei

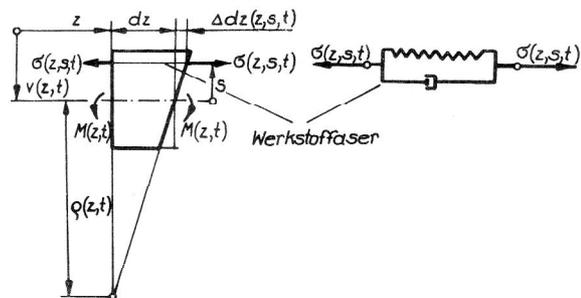


Bild 1
 Bezeichnungen am Balkenelement

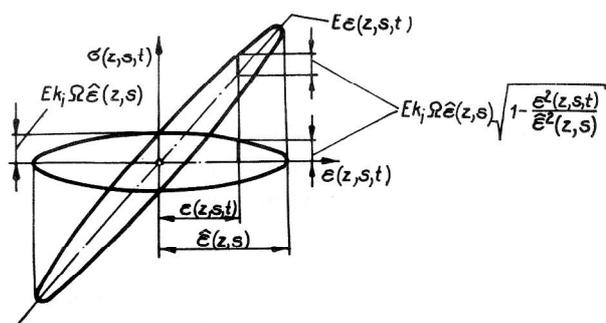


Bild 2
 Hysteresekurve einer Werkstofffaser

die Dämpfungskraft proportional der Dehngeschwindigkeit $\dot{\epsilon}$ angenommen wird, nämlich

$$\sigma_{(z,s,t)} = E [\epsilon_{(z,s,t)} + k_i \dot{\epsilon}_{(z,s,t)}] \quad (5)$$

(Voigt-Kelvin-Modell).

Dabei kann für die in die Gl. (5) eingehende Konstante k_i

$$\text{entweder } k_i = k_1 \quad \text{mit } k_1 \text{ in [s]} \quad (6)$$

$$\text{oder } k_i = \frac{k_2}{\Omega} \quad \text{mit } k_2 \text{ in [./]} \quad (7)$$

gesetzt werden.

Es läßt sich zeigen, daß Gl. (5) im Spannungs-Dehnungsdiagramm eine Ellipse mit den Halbachsen $\hat{\epsilon}_{(z,s)}$ und $Ek_i \Omega \hat{\epsilon}_{(z,s)}$ darstellt, deren Ordinaten an der Stelle $\epsilon_{(z,s,t)}$ der Geraden $E\epsilon_{(z,s,t)}$ überlagert sind, Bild 2. Dabei wird vorausgesetzt, daß sich die Dehnung ebenso wie der Schwingungsvorgang harmonisch mit der Zeit ändert.

Man erkennt, daß die kleine Halbachse der Ellipse

$$\text{mit Gl. (6) die Größe } Ek_1 \Omega \hat{\epsilon}_{(z,s)},$$

$$\text{mit Gl. (7) die Größe } Ek_2 \hat{\epsilon}_{(z,s)}$$

annimmt.

Der Ansatz (6) stellt somit eine von der Frequenz der Erregung abhängige, der Ansatz (7) hingegen eine frequenzunabhängige Dämpfung dar. Die Praxis zeigt, daß die Werkstoffdämpfung nahezu unabhängig von der Frequenz ist. Deshalb kommt dem Ansatz (6) nur eine untergeordnete Bedeutung zu.

Unter der Annahme schwacher Balkenkrümmungen erhält man nach Bild 1 die bekannte Beziehung

$$\epsilon_{(z,s,t)} = sv''_{(z,t)}, \quad (8)$$

beziehungsweise durch Differentiation nach der Zeit die Dehngeschwindigkeit

$$\dot{\epsilon}_{(z,s,t)} = sv''_{(z,t)}. \quad (9)$$

Das Biegemoment an der Stelle z zum Zeitpunkt t lautet

$$M_{(z,t)} = \int_A s \sigma_{(z,s,t)} dA. \quad (10)$$

Setzt man die Gln. (5), (8) und (9) ein, so wird daraus

$$M_{(z,t)} = EI_{(z)} [v''_{(z,t)} + k_i v''_{(z,t)}]. \quad (11)$$

2. Darstellung der Übertragungsmatrizen

2.1. Feldmatrix für den massebelegten Stab konstanten Querschnitts mit innerer und äußerer Dämpfung bei Streckenlasterregung

Am Balkenabschnitt soll eine zeitlich harmonisch veränderliche Streckenlast vorliegen. Derartige Schwingungserregungen treten beispielsweise bei den Schaufel-schwingungen in Turbomaschinen auf, hervorgerufen durch die Druck- und Geschwindigkeitsänderungen in

den Nachlaufdübeln der Strömung gegenüber der ungestörten Strömung hinter dem Schaufelgitter.

Ferner soll am Balkenabschnitt neben einer inneren Dämpfung eine kontinuierlich verteilte äußere Dämpfung vorliegen, die als geschwindigkeitsproportional angenommen wird. Solche Dämpfungen treten in der Praxis häufig auf, zum Beispiel kann bei Wellen in sehr breiten Gleitlagern in erster Näherung ein derartiges Berechnungsmodell angenommen werden. Die sogenannte Gaskraftdämpfung, hervorgerufen durch die Schwingungsbewegung der Schaufel im strömenden Gas, spielt bei den Verdichterbeschaufelungen eine wesentliche Rolle und sie stellt ebenfalls eine kontinuierlich verteilte, geschwindigkeitsproportionale Dämpfung dar.

Zur Aufstellung der Bewegungsgleichung wird ein aus dem Balken konstanten Querschnitts (Querschnitt A_k , Biegesteifigkeit EI_k) an der Stelle ξ herausgeschnittenes Balkenelement betrachtet, Bild 3. Schubverformung und Drehträgeit der Querschnitte werden dabei vernachlässigt. Die Gleichgewichtsgleichungen für die Biegemomente und für die Kräfte liefern unter Einbeziehung der Gl. (11) die partielle, inhomogene Differentialgleichung

$$EI_k [v''''_{(\xi,t)} + k_i v''''_{(\xi,t)}] + \rho A_k \ddot{v}_{(\xi,t)} + k_o \dot{v}_{(\xi,t)} = q_{(\xi,t)} \quad (12)$$

wobei alle zeitabhängigen Größen, wie vereinbart, als komplexe Größen aufzufassen sind.

Falls die Erregung in der Form vorliegt

$$q_{(\xi,t)} = \hat{q}_{(\xi)} e^{j\Omega t}, \quad (13)$$

wird die erzwungene Bewegung mit der Kreisfrequenz Ω der Erregung verlaufen. Wir machen deshalb den Ansatz

$$v_{(\xi,t)} = \hat{v}_{(\xi)} e^{j\Omega t}, \quad (14)$$

mit dem wir die Dgl. (12) in die Form bringen

$$I_k \tilde{E} \hat{v}''''_{(\xi)} - \Omega^2 \rho \tilde{A}_k \hat{v}_{(\xi)} = \hat{q}_{(\xi)}. \quad (15)$$

In Gl. (15) bedeutet

$$\tilde{E} = E(1 + j k_i \Omega) = E \tilde{e} \quad (16)$$

den komplexen Elastizitätsmodul, der die innere Dämpfung, und

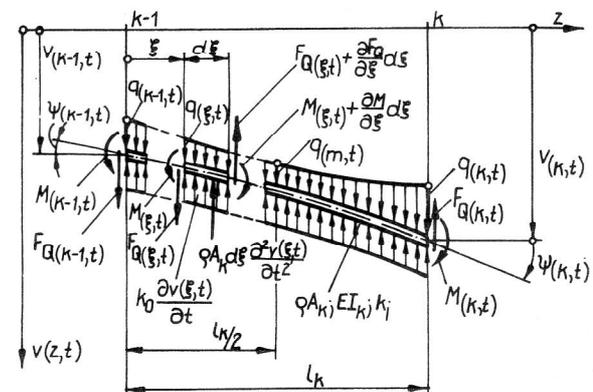


Bild 3
Zur Matrix eines elastischen Balkenabschnittes

$$\tilde{A}_k = A_k \left(1 - j \frac{k_o}{\rho A_k \Omega}\right) \quad (17)$$

die komplexe Querschnittsfläche, die die äußere Dämpfung widerspiegelt.

Die Lösung der Gl. (15) setzt sich bekanntlich zusammen aus der Lösung der homogenen Differentialgleichung und einer partikulären Lösung.

Zur Lösung der homogenen Dgl. bringen wir die verkürzte Gl. (15) in die Form

$$\hat{v}''''(\xi) - \left(\frac{\tilde{\kappa}_k}{l_k}\right)^4 \hat{v}(\xi) = 0 \quad (18)$$

(l_k - Länge des Balkenabschnittes),

wobei

$$\tilde{\kappa}_k^4 = \frac{l_k^4 \rho \Omega^2 \tilde{A}_k}{I_k \tilde{E}} = \frac{l_k^4 \rho \Omega^2 A_k}{I_k E (1 + k_i^2 \Omega^2)} \left[\left(1 - \frac{k_o k_i}{\rho A_k}\right) - j \left(k_i \Omega + \frac{k_o}{\rho A_k \Omega}\right) \right] \quad (19)$$

abgekürzt wurde, und wir machen den Ansatz

$$v_h(\xi) = \tilde{C} e^{\tilde{\lambda} \frac{\xi}{l_k}} \quad (20)$$

Indem man differenziert und einsetzt erhält man die charakteristische Gleichung

$$\tilde{\lambda}^4 - \tilde{\kappa}_k^4 = 0, \quad (21)$$

bzw. mit Gl. (19) unter Anwendung des Satzes von Moivre nach Trennung in Real- und Imaginärteil lauten die Wurzeln

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_1 &= \text{Re}(\tilde{\lambda}_1) + j \text{Im}(\tilde{\lambda}_1), \\ \tilde{\lambda}_2 &= j \tilde{\lambda}_1; \tilde{\lambda}_3 = -\tilde{\lambda}_1; \tilde{\lambda}_4 = -j \tilde{\lambda}_1, \end{aligned} \quad (22)$$

wobei

$$\begin{aligned} \text{Re}(\tilde{\lambda}_1) &= \sqrt[4]{\frac{l_k^4 \Omega \sqrt{\rho^2 A_k^2 \Omega^2 + k_o^2}}{I_k E \sqrt{1 + k_i^2 \Omega^2}}} \cos \frac{\mu}{4}; \\ \text{Im}(\tilde{\lambda}_1) &= \sqrt[4]{\frac{l_k^4 \Omega \sqrt{\rho^2 A_k^2 \Omega^2 + k_o^2}}{I_k E \sqrt{1 + k_i^2 \Omega^2}}} \sin \frac{\mu}{4} \end{aligned} \quad (23)$$

mit

$$\mu = \arctan \left[\frac{\rho A_k k_i \Omega^2 + k_o}{\Omega (k_o k_i - \rho A_k)} \right] \quad (24)$$

bedeuten.

Die Gln. (22) lassen erkennen, daß sich die Wurzeln durch eine, beispielsweise durch $\tilde{\lambda}_1$ ausdrücken lassen, wovon später Gebrauch gemacht wird. Setzt man sie in den Lösungsansatz (20) ein und formt man die erhaltenen Ausdrücke um, wobei die noch offenen, komplexen

Integrationskonstanten neu bezeichnet werden, so erhält man die homogene Lösung

$$\begin{aligned} \hat{v}_h(\xi) &= \tilde{B}_1 \cosh \tilde{\lambda}_1 \frac{\xi}{l_k} + \tilde{B}_2 \sinh \tilde{\lambda}_1 \frac{\xi}{l_k} + \tilde{B}_3 \cos \tilde{\lambda}_1 \frac{\xi}{l_k} + \\ &+ \tilde{B}_4 \sin \tilde{\lambda}_1 \frac{\xi}{l_k}. \end{aligned} \quad (25)$$

Für die Verteilung der harmonisch mit der Zeit sich ändernden Streckenlast wird eine parabelförmige Verteilung der Form

$$\hat{q}(\xi) = \hat{q}_{k-1} + \tilde{a}_1 \frac{\xi}{l_k} + 2 \tilde{a}_2 \left(\frac{\xi}{l_k}\right)^2 \quad (26)$$

vorgegeben, wobei die komplexen Koeffizienten

$$\begin{aligned} \tilde{a}_1 &= -3 \hat{q}_{k-1} + 4 \hat{q}_m - \hat{q}_k, \\ \tilde{a}_2 &= \hat{q}_{k-1} - 2 \hat{q}_m + \hat{q}_k \end{aligned} \quad (27)$$

durch die Punkte $(0, \hat{q}_{k-1})$; $(\frac{l_k}{2}, \hat{q}_m)$; (l_k, \hat{q}_k) festgelegt sind, Bild 3.

In den meisten praktischen Fällen ist eine derartige Beschreibung der Streckenlastverteilung ausreichend, und es lassen sich die Sonderfälle der mit ξ linear veränderlichen sowie der konstanten Verteilung leicht daraus ableiten.

Gemäß der Störfunktion Gl. (26) wird für die partikuläre Lösung der Ansatz gemacht

$$\hat{v}_p(\xi) = \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 \xi + \tilde{C}_3 \xi^2. \quad (28)$$

Indem man diesen Ansatz differenziert, in die Dgl. (15) einsetzt und einen Koeffizientenvergleich vornimmt, gelangt man zur partikulären Lösung

$$\hat{v}_p(\xi) = -\frac{1}{\Omega^2 \rho \tilde{A}_k} \left[\hat{q}_{k-1} + \tilde{a}_1 \frac{\xi}{l_k} + 2 \tilde{a}_2 \left(\frac{\xi}{l_k}\right)^2 \right]. \quad (29)$$

Damit lautet die vollständige Lösung

$$\begin{aligned} \hat{v}(\xi) &= \tilde{B}_1 \cosh \tilde{\lambda}_1 \frac{\xi}{l_k} + \tilde{B}_2 \sinh \tilde{\lambda}_1 \frac{\xi}{l_k} + \tilde{B}_3 \cos \tilde{\lambda}_1 \frac{\xi}{l_k} + \\ &+ \tilde{B}_4 \sin \tilde{\lambda}_1 \frac{\xi}{l_k} - \frac{1}{\Omega^2 \rho \tilde{A}_k} \left[\hat{q}_{k-1} + \tilde{a}_1 \frac{\xi}{l_k} + 2 \tilde{a}_2 \left(\frac{\xi}{l_k}\right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (30)$$

Ausgangspunkt zur Aufstellung der Übertragungsmatrix ist die Gl. (30) mit ihren Ableitungen, und es ist nach Gl. (11) unter Einbeziehung der Gl. (14) zu beachten, daß

$$\begin{aligned} \hat{M}(\xi) &= I_k \tilde{E} \hat{v}'(\xi), \\ \hat{F}_Q(\xi) &= \hat{M}'(\xi) = I_k \tilde{E} \hat{v}''(\xi). \end{aligned} \quad (31)$$

Sind an der Schnittstelle $k-1$ bei $\xi = 0$ die Zustandsgrößen bekannt, Bild 3, so lauten die Randbedingungen

$$\begin{aligned} \hat{v}_{k-1} &= \hat{v}(o); \hat{\psi}_{k-1} = \hat{v}'(o); \hat{M}_{k-1} = I_k \tilde{E} \hat{v}''(o); \\ \hat{F}_{Q,k-1} &= I_k \tilde{E} \hat{v}'''(o) \end{aligned} \quad (32)$$

Sie liefern vier Gleichungen für \tilde{B}_1 bis \tilde{B}_4 . Löst man das Gleichungssystem, setzt die erhaltenen Ausdrücke in Gl. (30) und deren Ableitungen ein und betrachtet die Schnittstelle k bei $\xi = l_k$, so erhält man unter Beachtung von Gl. (11) die Zustandsgrößen bei k . Nimmt man noch die formale Gleichung $1 = 1$ hinzu, um die Erregung aufnehmen zu können, so stehen alle zur Formulierung der Matrix notwendigen Gleichungen bereit.

Mit den Bezugsgrößen

$$\begin{aligned} l^* & \text{ Bezugslänge} & m^* & \text{ Bezugsmasse} \\ EI^* & \text{ Bezugssteifigkeit} \end{aligned} \quad (33)$$

sowie der daraus gebildeten Bezugsfrequenz

$$\omega^{*2} = \frac{EI^*}{m^* l^{*3}} \quad (34)$$

und den Abkürzungen

$$\begin{aligned} \bar{l}_k &= \frac{l_k}{l^*}; \quad \bar{EI}_k = \frac{EI_k}{EI^*}; \quad \bar{A}_k = \frac{\rho A_k l^*}{m^*}; \quad \bar{\eta} = \frac{\Omega}{\omega^*}; \\ \bar{k}_i &= k_i \omega^*; \quad \bar{k}_o = \frac{k_o l^*}{m^* \omega^*} \end{aligned} \quad (35)$$

erhält man in dimensionsloser Form die Matrix

$$\begin{bmatrix} \hat{v}_k \\ \hat{\psi}_k \\ \hat{M}_k \\ \hat{F}_{Qk} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \tilde{R}_1 & \frac{\bar{l}_k}{2 \tilde{\lambda}_1^2} \tilde{r}_2 & \frac{\bar{l}_k^2}{2 \tilde{e} \bar{EI}_k \tilde{\lambda}_1^2} \tilde{r}_1 & \frac{\bar{l}_k^3}{2 \tilde{e} \bar{EI}_k \tilde{\lambda}_1^4} \tilde{R}_2 & \tilde{g}_1 \\ \frac{1}{2 \bar{l}_k} \tilde{R}_2 & \frac{1}{2} \tilde{R}_1 & \frac{\bar{l}_k}{2 \tilde{e} \bar{EI}_k \tilde{\lambda}_1^2} \tilde{r}_2 & \frac{\bar{l}_k^2}{2 \tilde{e} \bar{EI}_k \tilde{\lambda}_1^3} \tilde{r}_1 & \tilde{g}_2 \\ \frac{\tilde{e} \bar{EI}_k \tilde{\lambda}_1^2}{2 \bar{l}_k^2} \tilde{r}_1 & \frac{\tilde{e} \bar{EI}_k}{2 \bar{l}_k} \tilde{R}_2 & \frac{1}{2} \tilde{R}_1 & \frac{\bar{l}_k}{2 \tilde{\lambda}_1^2} \tilde{r}_2 & \tilde{g}_3 \\ \frac{\tilde{e} \bar{EI}_k \tilde{\lambda}_1^2}{2 \bar{l}_k^3} \tilde{r}_2 & \frac{\tilde{e} \bar{EI}_k \tilde{\lambda}_1^2}{2 \bar{l}_k^2} \tilde{r}_1 & \frac{1}{2 \bar{l}_k} \tilde{R}_2 & \frac{1}{2} \tilde{R}_1 & \tilde{g}_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}_{k-1} \\ \hat{\psi}_{k-1} \\ \hat{M}_{k-1} \\ \hat{F}_{Qk-1} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (36)$$

oder

$$\vec{z}_k = \bar{R}_k \vec{z}_{k-1}, \quad (37)$$

wobei die dimensionslosen Zustandsgrößen

$$\hat{v} = \frac{\hat{v}}{l^*}; \quad \hat{\psi} = \hat{\psi}; \quad \hat{M} = \frac{\hat{M} l^*}{EI^*}; \quad \hat{F}_Q = \frac{\hat{F}_Q l^{*2}}{EI^*} \quad (38)$$

eingeführt wurden.

Unter Beachtung der Zusammenhänge (22) bedeuten die in die Matrix (36) eingehenden Funktionen

$$\begin{aligned} \tilde{R}_1 &= \cosh \tilde{\lambda}_1 + \cos \tilde{\lambda}_1, & \tilde{r}_1 &= \cosh \tilde{\lambda}_1 - \cos \tilde{\lambda}_1, \\ \tilde{R}_2 &= \tilde{\lambda}_1 (\sinh \tilde{\lambda}_1 - \sin \tilde{\lambda}_1), & \tilde{r}_2 &= \tilde{\lambda}_1 (\sinh \tilde{\lambda}_1 + \sin \tilde{\lambda}_1). \end{aligned} \quad (39)$$

wobei die eingehenden Wurzeln (22) unter Benutzung der Bezugsgrößen (33) und der Abkürzungen (35) in dimensionsloser Schreibweise die Form annehmen

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\tilde{\lambda}_1) &= \bar{l}_k \sqrt[4]{\frac{\bar{\eta} \sqrt{\bar{A}_k^2 \bar{\eta}^2 + \bar{k}_o^2}}{\bar{EI}_k \sqrt{1 + \bar{k}_i^2 \bar{\eta}^2}}} \cos \frac{\mu}{4}; \\ \operatorname{Im}(\tilde{\lambda}_1) &= \bar{l}_k \sqrt[4]{\frac{\bar{\eta} \sqrt{\bar{A}_k^2 \bar{\eta}^2 + \bar{k}_o^2}}{\bar{EI}_k \sqrt{1 + \bar{k}_i^2 \bar{\eta}^2}}} \sin \frac{\mu}{4} \end{aligned} \quad (40)$$

und

$$\mu = \arctan \left[\frac{\bar{A}_k \bar{k}_i \bar{\eta}^2 + \bar{k}_o}{\bar{\eta} (\bar{k}_o \bar{k}_i - \bar{A}_k)} \right]. \quad (41)$$

Die in der letzten Spalte der Matrix (36) auftretenden Erregerfunktionen lauten mit den Gl. (21) und (19)

$$\begin{aligned} \tilde{g}_1 &= \frac{\bar{l}_k^4}{2 \tilde{e} \bar{EI}_k \tilde{\lambda}_1^4} \left[\hat{q}_{k-1} (\tilde{R}_1 - 2) - \tilde{a}_1 \left(2 - \frac{\tilde{r}_2}{\tilde{\lambda}_1} \right) - \right. \\ &\quad \left. - 4 \tilde{a}_2 \left(1 - \frac{\tilde{r}_1}{\tilde{\lambda}_1^2} \right) \right], \\ \tilde{g}_2 &= \frac{\bar{l}_k^3}{2 \tilde{e} \bar{EI}_k \tilde{\lambda}_1^4} \left[\hat{q}_{k-1} \tilde{R}_2 + \tilde{a}_1 (\tilde{R}_1 - 2) - \right. \\ &\quad \left. - 4 \tilde{a}_2 \left(2 - \frac{\tilde{r}_2}{\tilde{\lambda}_1} \right) \right], \end{aligned}$$

$$\tilde{g}_3 = \frac{\bar{l}_k^2}{2 \tilde{\lambda}_1^4} \left[\hat{q}_{k-1} \tilde{\lambda}_1^2 \tilde{r}_1 + \tilde{a}_1 \tilde{R}_2 + 4 \tilde{a}_2 (\tilde{R}_1 - 2) \right], \quad (42)$$

$$\tilde{g}_4 = \frac{\bar{l}_k}{2 \tilde{\lambda}_1^4} \left[\hat{q}_{k-1} \tilde{\lambda}_1^2 \tilde{r}_2 + \tilde{a}_1 \tilde{\lambda}_1^2 \tilde{r}_1 + 4 \tilde{a}_2 \tilde{R}_2 \right],$$

wobei

$$\hat{q} = \frac{\hat{q} l^{*3}}{EI^*}; \quad \tilde{a}_1 = \frac{\tilde{a}_1 l^{*3}}{EI^*}; \quad \tilde{a}_2 = \frac{\tilde{a}_2 l^{*3}}{EI^*} \quad (43)$$

abgekürzt wurde.

Aus Gl. (16) folgt schließlich mit den Abkürzungen (35)

$$\tilde{e} = 1 + j k_i \bar{\eta}. \quad (44)$$

Die Matrix (36) ist anwendbar für die Sonderfälle:

- innere oder äußere Dämpfung fehlt,
- innere und äußere Dämpfungen fehlen,
- der Querschnitt A_k wird vernachlässigt (masseloser Balken),
- der Querschnitt A_k wird vernachlässigt und die innere Dämpfung fehlt.

Die Matrix (36) ist nicht anwendbar für den masselosen Balken bei Fehlen der äußeren Dämpfung ($A_k = 0$, $k_o = 0$), denn dann wird, wie man aus Gl. (23) erkennt, $\tilde{\lambda}_1 = 0$ und die Erregerfunktionen \tilde{g}_1 bis \tilde{g}_4 nehmen unbestimmte Ausdrücke an. Für diesen Sonderfall kann jedoch aus der Matrix (36) die Matrix des masselosen, elastischen Balkens mit innerer Dämpfung durch Grenzübergang $\tilde{\lambda}_1 \rightarrow 0$ in den Funktionen (39) und (42) gewonnen werden. Sie wird im Abschnitt 2.2. gesondert angegeben.

Falls keine Streckenlasterregung vorliegt und wenn außerdem die innere und äußere Dämpfung vernachlässigt werden darf, folgt aus der Matrix (36)

mit den üblichen Abkürzungen

$$C_k = \frac{1}{2} (\cosh \kappa_k + \cos \kappa_k) \quad c_k = \frac{1}{2} (\cosh \kappa_k - \cos \kappa_k) \quad (46)$$

$$S_k = \frac{1}{2} (\sinh \kappa_k + \sin \kappa_k) \quad s_k = \frac{1}{2} (\sinh \kappa_k - \sin \kappa_k)$$

und

$$\kappa_k = \sqrt[4]{\frac{l_k^4 \rho A_k \Omega^2}{I_k E}} = \bar{l}_k \sqrt[4]{\frac{A_k \bar{\eta}^2}{EI_k}} \quad (47)$$

Streich man in der Matrix (45) die letzte Zeile und die letzte Spalte, die für die Aufnahme der Erregung vorgesehen waren, so erhält man die für freie, nichtgedämpfte Schwingungen bekannte Matrix, wie sie beispielsweise in [3] angegeben ist.

2.2. Feldmatrix eines masselosen, elastischen Stabes mit konstantem Querschnitt bei zeitlich harmonisch veränderlicher Streckenlast und innerer Dämpfung

Für $A_k = 0$ und $k_o = 0$ folgt aus den Gln. (23) und (22) $\tilde{\lambda}_1 = 0$. Damit wird $\tilde{R}_1 = 2$; $\tilde{R}_2 = 0$; $\tilde{r}_1 = 0$; $\tilde{r}_2 = 0$

und wegen

$$\lim_{\tilde{\lambda}_1 \rightarrow 0} \left(\frac{\tilde{r}_2}{\tilde{\lambda}_1^2} \right) = 2 \quad \lim_{\tilde{\lambda}_1 \rightarrow 0} \left(\frac{\tilde{R}_1 - 2}{\tilde{\lambda}_1^4} \right) = \frac{1}{12}$$

$$\lim_{\tilde{\lambda}_1 \rightarrow 0} \left(\frac{\tilde{r}_1}{\tilde{\lambda}_1^2} \right) = 1 \quad \lim_{\tilde{\lambda}_1 \rightarrow 0} \frac{1}{\tilde{\lambda}_1^4} \left(1 - \frac{\tilde{r}_1}{\tilde{\lambda}_1^2} \right) = -\frac{1}{360} \quad (48)$$

$$\lim_{\tilde{\lambda}_1 \rightarrow 0} \left(\frac{\tilde{R}_2}{\tilde{\lambda}_1^4} \right) = \frac{1}{3} \quad \lim_{\tilde{\lambda}_1 \rightarrow 0} \frac{1}{\tilde{\lambda}_1^4} \left(2 - \frac{\tilde{r}_2}{\tilde{\lambda}_1^2} \right) = -\frac{1}{60}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{v}_k \\ \hat{\psi}_k \\ \hat{M}_k \\ \hat{F}_{Qk} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_k & \frac{\bar{l}_k}{\kappa_k} S_k & \frac{\bar{l}_k^2}{\kappa_k^2 EI_k} c_k & \frac{\bar{l}_k^3}{\kappa_k^3 EI_k} s_k & 0 \\ \frac{\kappa_k}{\bar{l}_k} s_k & C_k & \frac{\bar{l}_k}{\kappa_k EI_k} S_k & \frac{\bar{l}_k^2}{\kappa_k^2 EI_k} c_k & 0 \\ \frac{\kappa_k^2 \bar{EI}_k}{\bar{l}_k^2} c_k & \frac{\kappa_k \bar{EI}_k}{\bar{l}_k} s_k & C_k & \frac{\bar{l}_k}{\kappa_k} S_k & 0 \\ \frac{\kappa_k^3 \bar{EI}_k}{\bar{l}_k^3} S_k & \frac{\kappa_k^2 \bar{EI}_k}{\bar{l}_k^2} c_k & \frac{\kappa_k}{\bar{l}_k} s_k & C_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{v}_{k-1} \\ \hat{\psi}_{k-1} \\ \hat{M}_{k-1} \\ \hat{F}_{Qk-1} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (45)$$

aus den Gln. (42)

$$\lim_{\tilde{\lambda}_1 \rightarrow 0} \tilde{g}_1 = \tilde{f}_1 = \frac{\bar{l}_k^4}{12 \tilde{e} \bar{E} I_k} \left(\frac{1}{2} \hat{q}_{k-1} + \frac{1}{10} \tilde{a}_1 + \frac{1}{15} \tilde{a}_2 \right),$$

$$\lim_{\tilde{\lambda}_1 \rightarrow 0} \tilde{g}_2 = \tilde{f}_2 = \frac{\bar{l}_k^3}{6 \tilde{e} \bar{E} I_k} \left(\hat{q}_{k-1} + \frac{1}{4} \tilde{a}_1 + \frac{1}{5} \tilde{a}_2 \right), \quad (49)$$

$$\lim_{\tilde{\lambda}_1 \rightarrow 0} \tilde{g}_3 = \tilde{f}_3 = \frac{\bar{l}_k^2}{2} \left(\hat{q}_{k-1} + \frac{1}{3} \tilde{a}_1 + \frac{1}{3} \tilde{a}_2 \right),$$

$$\lim_{\tilde{\lambda}_1 \rightarrow 0} \tilde{g}_4 = \tilde{f}_4 = \bar{l}_k \left(\hat{q}_{k-1} + \frac{1}{2} \tilde{a}_1 + \frac{2}{3} \tilde{a}_2 \right),$$

so daß die Matrix (36) übergeht in

$$\begin{bmatrix} \hat{v}_k \\ \hat{\psi}_k \\ \hat{M}_k \\ \hat{F}_{Qk} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \bar{l}_k \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\bar{l}_k^2}{2 \tilde{e} \bar{E} I_k} \\ \frac{\bar{l}_k}{\tilde{e} \bar{E} I_k} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \\ \tilde{f}_3 \\ \tilde{f}_4 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}_{k-1} \\ \hat{\psi}_{k-1} \\ \hat{M}_{k-1} \\ \hat{F}_{Qk-1} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (50)$$

$$\text{oder } \vec{z}_k = \bar{E}_k \vec{z}_{k-1}. \quad (51)$$

Zur Matrix (50) kann man natürlich auch durch Integration der elastischen Biegelinie gelangen.

2.3. Massenmatrix eines starren Rotors mit Erregung

Nach Bild 4 lauten die geometrischen Zusammenhänge und Gleichgewichtsbedingungen

$$v(k,t) = \tilde{v}(k-1,t) + l_k \psi(k-1,t)$$

$$\psi(k,t) = \psi(k-1,t)$$

$$M(k,t) = J_k \ddot{\psi}(s,t) - M_{Err} + M(k-1,t) - m_k \ddot{v}(s,t) \cdot l_s + F_{Err} \cdot l_s + F_{Q(k-1,t)} \cdot l_k \quad (52)$$

$$F_{Q(k,t)} = F_{Err} - m_k \ddot{v}(s,t) + F_{Q(k-1,t)},$$

wobei

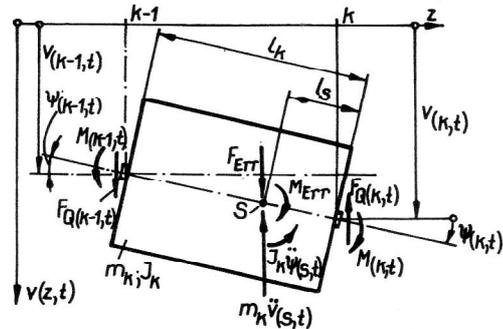


Bild 4
Zur Massenmatrix eines starren Rotors

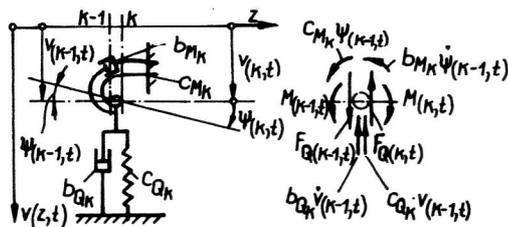


Bild 5
Zur Feder-Dämpfer-Matrix

$$v(s,t) = v(k-1,t) + \psi(k-1,t) \cdot (l_k - l_s) \quad (53)$$

$$\psi(s,t) = \psi(k-1,t).$$

Unter Anwendung der Gl. (2) erhält man daraus die Matrix

$$\begin{bmatrix} \hat{v}_k \\ \hat{\psi}_k \\ \hat{M}_k \\ \hat{F}_{Qk} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \bar{l}_k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \bar{m}_k \bar{l}_s \bar{\eta}^2 & \bar{\eta}^2 (\bar{m}_k \bar{l}_s \bar{l}_{ks} - \bar{J}_k) & 1 \\ \bar{m}_k \bar{\eta}^2 & \bar{m}_k \bar{l}_{ks} \bar{\eta}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{l}_k \hat{F}_{Err} - \hat{M}_{Err} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{v}_{k-1} \\ \hat{\psi}_{k-1} \\ \hat{M}_{k-1} \\ \hat{F}_{Qk-1} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (54)$$

oder $\vec{z}_k = M_k \vec{z}_{k-1}$ (55)

mit den weiteren Abkürzungen

$$\begin{aligned} \bar{m}_k &= \frac{m_k}{m^*}; & \bar{J}_k &= \frac{J_k}{m^* l^{*2}}; \\ \bar{l}_s &= \frac{l_s}{l^*}; & \bar{l}_{ks} &= \frac{l_k - l_s}{l^*}; \\ \hat{F}_{Err} &= \frac{\hat{F}_{Err} l^{*2}}{EI^*}; & \hat{M}_{Err} &= \frac{\hat{M}_{Err} l^*}{EI^*}. \end{aligned} \quad (56)$$

2.4. Feder - Dämpfer - Matrix

Nach Bild 5 lauten die geometrischen Zusammenhänge und Gleichgewichtsbedingungen

$$\begin{aligned} v(k,t) &= v(k-1,t) \\ \psi(k,t) &= \psi(k-1,t) \\ M(k,t) &= M(k-1,t) + c_{Mk} \psi(k-1,t) + b_{Mk} \dot{\psi}(k-1,t) \\ FQ(k,t) &= FQ(k-1,t) - b_{Qk} \dot{v}(k-1,t) - c_{Qk} v(k-1,t). \end{aligned} \quad (57)$$

Unter Anwendung der Gl. (2) erhält man daraus die Matrix

$$\begin{bmatrix} \hat{v}_k \\ \hat{\psi}_k \\ \hat{M}_k \\ \hat{F}_{Qk} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \hat{c}_{Mk} + \bar{\eta} \tilde{b}_{Mk} & 1 \\ -(\bar{c}_{Qk} + \bar{\eta} \tilde{b}_{Qk}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{v}_{k-1} \\ \hat{\psi}_{k-1} \\ \hat{M}_{k-1} \\ \hat{F}_{Qk-1} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (58)$$

oder $\vec{z}_k = \bar{F}_k \vec{z}_{k-1}$ (59)

mit den weiteren Abkürzungen

$$\begin{aligned} \bar{c}_{Qk} &= \frac{c_{Qk} l^*}{EI^*}; & \bar{c}_{Mk} &= \frac{c_{Mk} l^*}{EI^*}; \\ \bar{b}_{Qk} &= \frac{b_{Qk}}{m^* \omega^*}; & \bar{b}_{Mk} &= \frac{b_{Mk}}{m^* \omega^* l^{*2}} \end{aligned} \quad (60)$$

und

$$\tilde{b}_{Qk} = j \bar{b}_{Qk}; \quad \tilde{b}_{Mk} = j \bar{b}_{Mk}. \quad (61)$$

3. Durchführung der Rechnung

Die Rechnung geschieht in bekannter Weise durch fortlaufende Matrizenmultiplikation der Übertragungsmatrizen mit einem Eingangsvektor, der durch die Randbedingungen am Eingang festgelegt ist. Dabei sind stets zwei von den vier komplexen Zustandsgrößen bekannt, so daß in die Rechnung nur zwei Unbekannte eingehen. Nach Durchführung der Matrizenmultiplikation erhält man den Ausgangsvektor als Funktion des Eingangsvektors

tors. Da für den Ausgangsvektor ebenfalls zwei Zustandsgrößen bekannt sind, können durch Lösung des entsprechenden Gleichungssystems die unbekannt Zustandsgrößen des Eingangsvektors berechnet werden. Damit liegen alle Zustandsgrößen an allen Schnittstellen fest.

Bei der Berechnung der Eigenfrequenzen mit Übertragungsmatrizen ist man im allgemeinen gezwungen, beliebige Frequenzen vorzugeben und jene zu suchen, für die ein Restwert verschwindet.

Jetzt liefert eine vorgegebene Erregerfrequenz Ω bereits einen Punkt der Ortskurve oder der Vergrößerungsfunktion.

3.1. Randbedingungen

Im Bild 6 sind die Randbedingungen für die am häufigsten auftretenden Einspannungen und Lagerungen angegeben. Den Zusammenhang verschiedener Zustandsgrößen bei elastischen Einspann- und Lagerungsbedingungen findet man dabei aus Gleichgewichtsbetrachtungen.

3.2. Innere Lagerungen großer Steifigkeit

Mit der Feder-Dämpfer-Matrix (58) zu rechnen ist nur sinnvoll, wenn die darin enthaltenen dimensionslosen Federsteifigkeiten in der Größenordnung der dimensionslosen Biegesteifigkeiten der einzelnen Balkenabschnitte liegen, da sonst numerische Schwierigkeiten bei der Durchrechnung entstehen. Ohne Bedenken kann die

Matrix (58) zum Beispiel für die relativ große Nachgiebigkeit der Halslager von Zentrifugen angewendet werden. Bei sehr steifen oder als völlig starr anzusehenden Lagerungen indessen muß auf die Anwendung der Matrix (58) verzichtet werden. Eine Möglichkeit, in diesem Fall ohne Schwierigkeiten über die Lagerstelle hinweg rechnen zu können, besteht in der Ablösung einer oder sogar beider Unbekannten des Eingangsvektors durch eine beziehungsweise zwei an der Lagerstelle neu einzuführende Unbekannte in Form der Lagerreaktionen.

Hat der Zustandsvektor \vec{z}_{k-1} mit den beiden Unbekannten \hat{x} und \hat{y} des Eingangsvektors an der Schnittstelle k-1 vor dem Lager die Form

$$\vec{z}_{k-1} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \\ \tilde{a}_3 \\ \tilde{a}_4 \\ \tilde{a}_5 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \tilde{b}_3 \\ \tilde{b}_4 \\ \tilde{b}_5 \end{bmatrix} \hat{y} + \begin{bmatrix} \tilde{c}_1 \\ \tilde{c}_2 \\ \tilde{c}_3 \\ \tilde{c}_4 \\ \tilde{c}_5 \end{bmatrix} \quad (62)$$

und soll beispielsweise die Unbekannte \hat{y} abgelöst werden, so liefert der Übergang über das Lager (vgl. auch Bild 5, Gl. (57))

a) für das Auflager großer Steifigkeit mit Translationsdämpfer:

$$\text{mit } \hat{y} = \frac{\Delta F_{Qk}}{\tilde{b}_1(\tilde{c}_{Qk} + \tilde{\eta} \tilde{b}_{Qk})} - \frac{\tilde{a}_1}{\tilde{b}_1} \hat{x} - \frac{\tilde{c}_1}{\tilde{b}_1} \quad (63)$$

$$\vec{z}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{a}_2 - \frac{\tilde{a}_1}{\tilde{b}_1} \tilde{b}_2 \\ \tilde{a}_3 - \frac{\tilde{a}_1}{\tilde{b}_1} \tilde{b}_3 \\ \tilde{a}_4 - \frac{\tilde{a}_1}{\tilde{b}_1} \tilde{b}_4 \\ 0 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} \frac{1}{(\tilde{c}_{Qk} + \tilde{\eta} \tilde{b}_{Qk})} \\ \frac{\tilde{b}_2}{\tilde{b}_1} \frac{1}{(\tilde{c}_{Qk} + \tilde{\eta} \tilde{b}_{Qk})} \\ \frac{\tilde{b}_3}{\tilde{b}_1} \frac{1}{(\tilde{c}_{Qk} + \tilde{\eta} \tilde{b}_{Qk})} \\ \frac{\tilde{b}_4}{\tilde{b}_1} \frac{1}{(\tilde{c}_{Qk} + \tilde{\eta} \tilde{b}_{Qk})} - 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta F_{Qk} + \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{c}_2 - \frac{\tilde{c}_1}{\tilde{b}_1} \tilde{b}_2 \\ \tilde{c}_3 - \frac{\tilde{c}_1}{\tilde{b}_1} \tilde{b}_3 \\ \tilde{c}_4 - \frac{\tilde{c}_1}{\tilde{b}_1} \tilde{b}_4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (64)$$

wobei ΔF_{Qk} die Auflagerreaktion bedeutet, und

b) für die Drehfederlagerung großer Steifigkeit mit Drehdämpfer:

$$\text{mit } \hat{y} = \frac{\hat{\Delta M}_k}{\tilde{b}_2(\tilde{c}_{Mk} + \tilde{\eta} \tilde{b}_{Mk})} - \frac{\tilde{a}_2}{\tilde{b}_2} \hat{x} - \frac{\tilde{c}_2}{\tilde{b}_2} \quad (65)$$

$$\vec{z}_k = \begin{bmatrix} \tilde{a}_1 - \frac{\tilde{a}_2}{\tilde{b}_2} \tilde{b}_1 \\ 0 \\ \tilde{a}_3 - \frac{\tilde{a}_2}{\tilde{b}_2} \tilde{b}_3 \\ \tilde{a}_4 - \frac{\tilde{a}_2}{\tilde{b}_2} \tilde{b}_4 \\ 0 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} \frac{\tilde{b}_1}{\tilde{b}_2} \frac{1}{(\tilde{c}_{Mk} + \tilde{\eta} \tilde{b}_{Mk})} \\ 1 \\ \frac{\tilde{b}_3}{\tilde{b}_2} \frac{1}{(\tilde{c}_{Mk} + \tilde{\eta} \tilde{b}_{Mk})} + 1 \\ \frac{\tilde{b}_4}{\tilde{b}_2} \frac{1}{(\tilde{c}_{Mk} + \tilde{\eta} \tilde{b}_{Mk})} \\ 0 \end{bmatrix} \hat{\Delta M}_k + \begin{bmatrix} \tilde{c}_1 - \frac{\tilde{c}_2}{\tilde{b}_2} \tilde{b}_1 \\ 0 \\ \tilde{c}_3 - \frac{\tilde{c}_2}{\tilde{b}_2} \tilde{b}_3 \\ \tilde{c}_4 - \frac{\tilde{c}_2}{\tilde{b}_2} \tilde{b}_4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (66)$$

wobei $\hat{\Delta M}_k$ das Moment darstellt, das vom Lager aufgenommen wird.

Völlig starre Lagerungen kommen durch $\tilde{c}_{Qk} \rightarrow \infty$ beziehungsweise $\tilde{c}_{Mk} \rightarrow \infty$ zum Ausdruck. Sind am Ende der Rechnung durch die Randbedingungen am Ausgang die beiden zu letzt geführten Unbekannten bestimmt, so ist eine Rücktransformation gemäß Gl. (63) bzw. Gl. (65) vorzunehmen.

3.3. Schwingungsanregungen

3.3.1. Kraft- und Stützerregungen in einer Schwingungsebene

Wir setzen voraus, daß die Ebene, in der die Anregung erfolgt, eine Ebene ist, in der eine der beiden Hauptträgheitsachsen des Biegeschwingungssystems liegt. Die Erregung habe die Form

$$F_{Err}(t) = \hat{F}_{Err} \cdot \sin(\Omega t + \alpha), \quad (67)$$

beziehungsweise

$$M_{Err}(t) = \hat{M}_{Err} \cdot \sin(\Omega t + \alpha),$$

$$q(\xi, t) = \hat{q}(\xi) \cdot \sin(\Omega t + \alpha).$$

Gleichung (67) ist der Imaginärteil der komplexen Veränderlichen

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{Err} &= \hat{F}_{Err} [\cos(\Omega t + \alpha) + j \sin(\Omega t + \alpha)] = \\ &= \hat{F}_{Err} e^{j\alpha} \cdot e^{j\Omega t} = \hat{\tilde{F}}_{Err} e^{j\Omega t}, \end{aligned} \quad (68)$$

und es gilt nach Gl. (3)

$$\hat{F}_{Err} = \text{Re}(\hat{\tilde{F}}_{Err}) + j \text{Im}(\hat{\tilde{F}}_{Err}) \quad (69)$$

beziehungsweise

$$\hat{\tilde{M}}_{Err} = \text{Re}(\hat{\tilde{M}}_{Err}) + j \text{Im}(\hat{\tilde{M}}_{Err});$$

$$\hat{\tilde{q}}(\xi) = \text{Re}(\hat{\tilde{q}}(\xi)) + j \text{Im}(\hat{\tilde{q}}(\xi))$$

oder in dimensionsloser Schreibweise

$$\text{Re}(\hat{\tilde{F}}_{Err}) = \frac{\hat{F}_{Err} l^{*2}}{EI^*} \cos \alpha; \quad \text{Im}(\hat{\tilde{F}}_{Err}) = \frac{\hat{F}_{Err} l^{*2}}{EI^*} \sin \alpha,$$

$$\text{Re}(\hat{\tilde{M}}_{Err}) = \frac{\hat{M}_{Err} l^*}{EI^*} \cos \alpha; \quad \text{Im}(\hat{\tilde{M}}_{Err}) = \frac{\hat{M}_{Err} l^*}{EI^*} \sin \alpha, \quad (70)$$

$$\text{Re}(\hat{\tilde{q}}(\xi)) = \frac{\hat{q}(\xi) l^{*3}}{EI^*} \cos \alpha; \quad \text{Im}(\hat{\tilde{q}}(\xi)) = \frac{\hat{q}(\xi) l^{*3}}{EI^*} \sin \alpha.$$

Da die Zustandsgrößen, beispielsweise die Verschiebung, in der Form erhalten werden

$$\begin{aligned} \tilde{v} &= \hat{v} [\cos(\Omega t + \gamma) + j \sin(\Omega t + \gamma)] = \\ &= \hat{v} e^{j\gamma} \cdot e^{j\Omega t} = \hat{\tilde{v}} e^{j\Omega t}, \end{aligned} \quad (71)$$

folgt aus Gl. (68) und Gl. (71) für den Phasenwinkel $\varphi = \alpha - \gamma$

$$\frac{\tilde{v}}{\tilde{F}_{Err}} = \frac{\hat{v}}{\hat{F}_{Err}} (\cos \varphi - j \sin \varphi), \quad (72)$$

d. h.

$$\tan \varphi = \frac{-\text{Im}(\frac{\tilde{v}}{\tilde{F}_{Err}})}{\text{Re}(\frac{\tilde{v}}{\tilde{F}_{Err}})}. \quad (73)$$

Nr.	Einspannung oder Lagerung	Zustandsvektor
1	el. Lagerung u. Einspann. 	$\begin{bmatrix} \hat{v} \\ \hat{\psi} \\ \hat{\psi}(\tilde{c}_M + \tilde{\eta} \tilde{b}_M) \\ -\hat{v}(\tilde{c}_Q + \tilde{\eta} \tilde{b}_Q) \\ 1 \end{bmatrix}$
2	elastische Lagerung 	$\begin{bmatrix} \hat{v} \\ \hat{\psi} \\ 0 \\ -\hat{v}(\tilde{c}_Q + \tilde{\eta} \tilde{b}_Q) \\ 1 \end{bmatrix}$
3	elastische Einspannung 	$\begin{bmatrix} 0 \\ \hat{\psi} \\ \hat{\psi}(\tilde{c}_M + \tilde{\eta} \tilde{b}_M) \\ \hat{F}_Q \\ 1 \end{bmatrix}$
4	starre Einspannung 	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \hat{M} \\ \hat{F}_Q \\ 1 \end{bmatrix}$
5	gelenkige Lagerung 	$\begin{bmatrix} 0 \\ \hat{\psi} \\ 0 \\ 0 \\ \hat{F}_Q \\ 1 \end{bmatrix}$
6	freies Ende 	$\begin{bmatrix} \hat{v} \\ \hat{\psi} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
7	geführtes Ende 	$\begin{bmatrix} \hat{v} \\ 0 \\ \hat{M} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Bild 6
Zustandsvektoren für verschiedene Einspannungen und Lagerungen

Liegt an der Einspannstelle bei $z = 0$ eine Stützerregung der Form

$$\hat{v}_{Err}(t) = \hat{v}_{Err} \cdot \sin(\Omega t + \alpha) \quad (74)$$

oder

$$\hat{\psi}_{Err}(t) = \hat{\psi}_{Err} \cdot \sin(\Omega t + \alpha)$$

vor, so gilt

$$\hat{v}_{Err} = \hat{v}_{(o)}$$

bzw. (75)

$$\hat{\psi}_{Err} = \hat{\psi}_{(o)}$$

transl. bewegte, starre Einspannung	transl. bewegte, gelenkige Lagerung	drehbewegte, starre Einspannung
$\begin{bmatrix} \hat{v}_{Err} \\ 0 \\ \hat{M}_0 \\ \hat{F}_{Q0} \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \hat{v}_{Err} \\ \hat{\psi}_0 \\ 0 \\ \hat{F}_{Q0} \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ \hat{\psi}_{Err} \\ \hat{M}_0 \\ \hat{F}_{Q0} \\ 1 \end{bmatrix}$

Bild 7
Zustandsvektoren bei Stützerregung

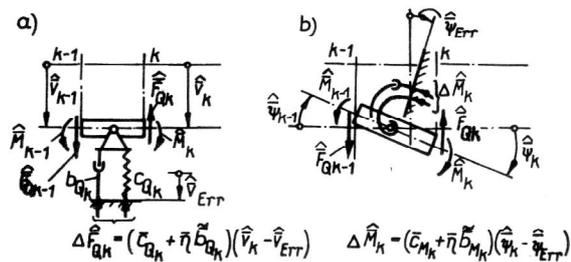


Bild 8
Stützerregungen an inneren Lagern

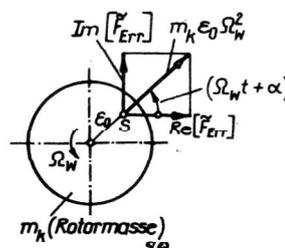


Bild 9
Unwuchterregung

und die dimensionslose, komplexe Erregeramplitude findet im Eingangsvektor, Bild 7, ihren Platz.

Erfolgt die Bewegungserregung an einem inneren Lager, Bild 8, so wird beim Übergang über das Lager die Matrix (64) bzw. (66) durch die Erregeramplitude in den letzten Spalten dieser Gleichung erweitert und man erhält

a) für das translatorisch bewegte Auflager

$$\text{mit } \hat{y} = \text{Gl. (63)} + \frac{\hat{v}_{Err}}{\tilde{b}_1} \quad (76)$$

$$\vec{z}_k = \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix} = \frac{\hat{x}}{\tilde{x}} + \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix} + \frac{\hat{\Delta F}_{Qk}}{\tilde{b}_1} + \begin{bmatrix} \frac{\hat{\Delta v}_{Err}}{\tilde{b}_1} \\ (\tilde{c}_2 - \frac{\tilde{c}_1}{\tilde{b}_1} \tilde{b}_2) + \frac{\tilde{b}_2}{\tilde{b}_1} \frac{\hat{\Delta v}_{Err}}{\tilde{b}_1} \\ (\tilde{c}_3 - \frac{\tilde{c}_1}{\tilde{b}_1} \tilde{b}_3) + \frac{\tilde{b}_3}{\tilde{b}_1} \frac{\hat{\Delta v}_{Err}}{\tilde{b}_1} \\ (\tilde{c}_4 - \frac{\tilde{c}_1}{\tilde{b}_1} \tilde{b}_4) + \frac{\tilde{b}_4}{\tilde{b}_1} \frac{\hat{\Delta v}_{Err}}{\tilde{b}_1} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (77)$$

b) für die drehbewegte Drehfederlagerung

$$\text{mit } \frac{\hat{y}}{\tilde{y}} = \text{Gl. (65)} + \frac{\hat{\psi}_{Err}}{\tilde{b}_2} \quad (78)$$

$$\vec{z}_k = \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix} = \frac{\hat{x}}{\tilde{x}} + \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix} + \frac{\hat{\Delta M}_k}{\tilde{b}_2} + \begin{bmatrix} (\tilde{c}_1 - \frac{\tilde{c}_2}{\tilde{b}_2} \tilde{b}_1) + \frac{\tilde{b}_1}{\tilde{b}_2} \frac{\hat{\psi}_{Err}}{\tilde{b}_2} \\ \frac{\hat{\psi}_{Err}}{\tilde{b}_2} \\ (\tilde{c}_3 - \frac{\tilde{c}_2}{\tilde{b}_2} \tilde{b}_3) + \frac{\tilde{b}_3}{\tilde{b}_2} \frac{\hat{\psi}_{Err}}{\tilde{b}_2} \\ (\tilde{c}_4 - \frac{\tilde{c}_2}{\tilde{b}_2} \tilde{b}_4) + \frac{\tilde{b}_4}{\tilde{b}_2} \frac{\hat{\psi}_{Err}}{\tilde{b}_2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (79)$$

3.3.2. Unwuchterregung bei Rotoren

Bei der Anwendung der Übertragungsmatrizen auf rotierende Systeme sind einige Besonderheiten zu beachten. Wir wollen hier nur die sehr wichtige Unwuchterregung betrachten und setzen isotrope Lager- und Wellenelastizitäten voraus.

Die Erregerkraft

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{Err} &= m_k \epsilon_o \Omega_w^2 [\cos(\Omega_w t + \alpha) + j \sin(\Omega_w t + \alpha)] = \\ &= \frac{\hat{F}_{Err}}{\tilde{F}_{Err}} \cdot e^{j\Omega t} \end{aligned} \quad (80)$$

mit

$$\frac{\hat{F}_{Err}}{\tilde{F}_{Err}} = m_k \epsilon_o \Omega_w^2$$

(ϵ_o – Exzentrizität des Schwerpunktes)

oder dimensionslos

$$\frac{\hat{F}_{Err}}{\tilde{F}_{Err}} = \frac{\epsilon_o}{I^*} \bar{m}_k \bar{\eta}^2 \quad (81)$$

läuft jetzt mit der Winkelgeschwindigkeit der Welle Ω_w um, Bild 9, so daß sich die statisch durchgebogene Welle auf einer Kreisbahn bewegt. Die Dämpfung bewirkt, daß die Wellenauslenkung nicht mehr genau in Richtung oder Gegenrichtung der Erregerkraft liegt. Da die innere Dämpfung proportional der Dehngeschwindigkeit angesetzt wurde, wird sie bei der statisch durchgebogenen, umlaufenden Welle zumindest für die hier betrachteten erzwungenen Schwingungen nicht wirksam. Genauere Untersuchungen unter Einbeziehung der homogenen Lösung der Bewegungsdifferentialgleichung ergaben, daß die Werkstoffdämpfung im überkritischen Bereich die Schwingungen anfachen kann. Ausführliche Betrachtungen zur Rotordynamik werden in [4] vorgenommen. Schließlich ist bei der Anwendung der Massenmatrix (54) beim Übergang auf das rotierende System zu beachten, daß durch die Kreiselwirkung des Rotors an Stelle des äquatorialen Massenträgheitsmomentes J_k das sogenannte reduzierte Trägheitsmoment J_{Rk} zu setzen ist, [5], das in dimensionsloser Form mit den Abkürzungen (56) lautet

LITERATUR

- [1] Cremer, L.: Vierpoldarstellung und Resonanzkurven bei schwingenden Stäben. Sitzungsberichte der preußischen Akademie der Wissenschaften, Jahrgang 1934, physikalisch-mathematische Klasse. Verlag der Akademie der Wissenschaften, Berlin 1934, S. 2 bis 24.
- [2] Wagner, K.W.: Einführung in die Lehre von den Schwingungen und Wellen. Dieterich'sche Verlagsbuchhandlung Wiesbaden 1947.
- [3] Schmidt, R.; Sollmann, H.: Schaufelschwingungen axialer Turbomaschinen. TU Dresden, Sektion Grundlagen des Maschinenwesens, Vorträge zum Problemseminar Heft 5/78, Band A, S. 87.
- [4] Gasch, R.; Pfützner, H.: Rotordynamik. Springer-Verlag Berlin/Heidelberg/New York 1975
- [5] Holzweißig, F.; Dresig, H.: Lehrbuch der Maschinendynamik. VEB Fachbuchverlag Leipzig 1979, 1. Aufl., S. 254
- [6] Orlamünder, D.: Anwenderdokumentation zum Programmpaket ORSO, TU Dresden, Rechenzentrum

Anschrift des Verfassers:
Doz. Dr. sc. techn. H. Sollmann
Technische Universität Dresden
Sektion Grundlagen des Maschinenwesens
Bereich Dynamik und Betriebsfestigkeit
8027 Dresden, Mommsenstraße 13