

# Anwendung der Methode der Finiten Elemente zur Analyse dreidimensionaler Modelle der Kontinuumsmechanik

Johannes Altenbach und Udo Fischer

*Im Rahmen des zentralen Planes der Grundlagenforschung der DDR werden im Wissenschaftsbereich Festkörpermechanik der Technischen Hochschule Magdeburg Forschungsarbeiten zur Lösung von Aufgaben der Festkörpermechanik mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente (FEM) durchgeführt. Zur effektiven Lösung von Aufgaben, die durch dreidimensionale Modelle repräsentiert werden, wird ein FEM-Programmsystem COSAR für die EDVA ES 1040 entwickelt. Der vorliegende Beitrag informiert über die wichtigsten dabei angewandten Theoreme und Lösungsmethoden sowie über die zur Zeit vorliegenden Erfahrungen und Einsatzgrenzen. Die Darstellungen stützen sich auf die von den Mitarbeitern der Forschungsgruppe „Finite Elemente“ erzielten Ergebnisse.*

## 0. Einleitung

Die analytischen Berechnungsverfahren zur Bestimmung des Spannungs- und Verformungsfeldes in deformierbaren festen Körpern erfordern im allgemeinen weitgehende Vereinfachungen der konstitutiven Gleichungen; aber auch für die lineare Elastizitätstheorie konnten für dreidimensionale Aufgaben keine geschlossenen Lösungen für allgemeine Geometrie und Belastung gefunden werden. Bis zum Aufkommen der Finite-Element-Methode (FEM) bildete nur das Differenzenverfahren einen genügend allgemeinen Ausgangspunkt, um reale dreidimensionale Modelle numerisch untersuchen zu können. Der große Aufwand für die Lösung dreidimensionaler Modelle sowie das Fehlen nutzerfreundlicher Programmsysteme haben die allgemeine Anwendung dieses Verfahrens erschwert.

Ein entscheidender Fortschritt wurde durch die Entwicklung der FEM erreicht. Bei der FEM wird das Kontinuum durch ein Modell ersetzt, das aus einer begrenzten Anzahl endlicher Elemente mit einfacher Geometrie besteht. Die Berechnung erfolgt, wenn möglich, auf der Grundlage einer Variationsformulierung. Besonders bewährt haben sich elementweise Ansatzfunktionen für die Verschiebungen (kompatible Verschiebungselemente), für die Verschiebungen und die Spannungen (gemischte Elemente) und hybride Elemente mit unabhängigen Ansatzfunktionen im Elementinnern und auf dem Elementrand.

Die FEM hat international zu einer stürmischen Entwicklung von Programmen und Programmsystemen zur Lösung von Aufgaben der Festkörpermechanik, der Strömungsmechanik und zunehmend auch weiterer angewandter Ingenieuraufgaben geführt. Die bei der Anwendung dieser Programme gewonnenen Erfahrungen zeigen, daß auch sogenannte universelle FEM-Programmsysteme problembezogen entwickelt werden müssen, um eine hohe Effektivität zu erreichen. Im folgenden werden ausgewählte theoretische Grundlagen und Lösungsmethoden des FEM-Programmsystems COSAR beschrieben, das zur effektiven Berechnung dreidimen-

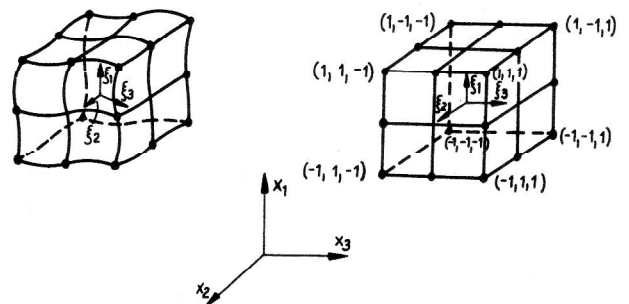
sionaler Modelle der Kontinuumsmechanik entwickelt wird.

## 1. Zur Konzeption des Systems COSAR

Ohne vollständig sein zu können, sollen im folgenden einige Aspekte der COSAR-Konzeption vorgestellt werden:

### 1.1. Elemente und Approximationsansätze

Das Grundmodell der im COSAR-Programmsystem verwendeten finiten Elemente ist das isoparametrische 20-Knoten-Element mit 60 Freiheitsgraden (Bild 1). Bei diesem Element werden sowohl die Geometrie des unverformten Elementes als auch die Verformungen durch den gleichen Satz von Koordinatenfunktionen  $\Phi_k$  beschrieben:



**Bild 1**  
Isoparametrisches Hexaederelement mit 20 Knoten

$$\begin{aligned}
 x_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \sum_{k=1}^{20} \Phi_k(\xi_1, \xi_2, \xi_3) x_{ik} \\
 u_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \sum_{k=1}^{20} \Phi_k(\xi_1, \xi_2, \xi_3) u_{ik}
 \end{aligned} \tag{1}$$

Hierin bilden  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  ein krummliniges Koordinatensystem,  $x_i$  und  $u_i$  sind die 3 Orts- bzw. Verschiebungs-kordinaten in einem kartesischen Koordinatensystem, und  $x_{ijk}$  und  $u_{ijk}$  stellen deren Werte an den 20 Knoten des Elementes dar. Die Funktionen  $\Phi_k$  werden durch algebraische Polynome gebildet, die bis zum 2. Grad vollständig sind. Auf die Beschreibung weiterer Eigenschaften muß hier verzichtet werden [1], [2].

Da COSAR im Hinblick auf die Berechnung dreidimensionaler Modelle konzipiert ist, enthält der Standard-elementkatalog eine leistungsfähige Gruppe räumlicher finiter Elemente, die aus dem Hexaederelement nach dem „Degenerationsprinzip“ abgeleitet werden können [3], [4]. Besondere Bedeutung für die Strukturierung dreidimensionaler Modelle haben außer dem Hexaederelement das 18-Knoten-Anvilelement, das 15-Knoten-Pentaederelement, das 13-Knoten-Wedgeelement, das 12-Knoten-Chiselement und das 10-Knoten-Tetraederelement [10]. Die COSAR-Element-Konzeption gestattet prinzipiell die Verarbeitung von Elementen mit beliebiger Knotenzahl und beliebigen Knotenfreiheitsgraden. Der Anschluß problembezogener Elementkataloge unter Berücksichtigung spezieller Geometrien, z. B. axialsymmetrischer und ebener Modelle, oder spezieller Anwendercharakteristika wie Torsion, Bruchmechanik, Thermoelastizität u. a. m., ist somit nach Bedarf möglich und erhöht entscheidend die Effektivität der Berechnung.

Die Elemente des Standardkataloges und der problemorientierten Elementkataloge für Aufgabenklassen der Festkörpermechanik wurden zunächst auf der Grundlage der Verschiebungsgrößenmethode konzipiert. Es wurden jedoch auch schon erfolgreiche Untersuchungen zur Nutzung von COSAR-kompatiblen hybriden Elementen angestellt [5], [21]. Ziel solcher Untersuchungen ist die Erweiterung der Elementkataloge durch Sonder-elemente. Besonderes Interesse verdienen die Arbeiten zur Entwicklung von Elementkatalogen für Sonder-elemente mit Ausschnitten, Randkerben oder Risik Konfigurationen [21], [35], [36].

### 1.2. Substruktur-Superelement-Technik

Die effektive Berechnung dreidimensionaler Modelle der Kontinuumsmechanik ist ohne die Anwendung der Substruktur-Superelement-Technik nicht möglich. In COSAR wird ein mehrstufiges Substrukturkonzept realisiert. Substrukturen sind Teile der Gesamtstruktur, die selbst wieder aus finiten Elementen zusammengesetzt sind und zu anderen Substrukturen oder Elementen nur über „externe Knoten“ Kontakt haben. Substrukturen werden durch Elimination ihrer „lokalen Knoten“ zu Superelementen, die ständig oder temporär in Elementkatalogen zusammengefaßt werden können.

Die Realisierung des Substruktur-Superelement-Konzepts in COSAR erfolgt mit dem in [14] beschriebenen Algorithmus.

### 1.3. Datenverwaltung

Die bei der Lösung von Problemen der Ingenieurpraxis auftretenden Datenmengen sind nur in Ausnahmefällen

im Operationsspeicher der EDVA ES 1040 unterzubringen. Im allgemeinen wird der Speicherumfang einer „Partition“ von 200 kByte weit überschritten, zumal es sich als zweckmäßig und notwendig erwiesen hat, alle reellen Zahlen durch Veränderliche doppelter Genauigkeit (REAL\*8) auszudrücken. Nach dem COSAR-Konzept werden deshalb alle größeren Datenfelder (Matrizen und Spaltenvektoren) in Blocksegmente unterteilt und extern gespeichert. Alle Matrizenoperationen werden blockweise ausgeführt, wobei nur die für die jeweilige Teiloperation benötigten Submatrizen in den Operativspeicher geholt werden müssen.

Selbstverständlich werden Bandstruktur und Symmetrieeigenschaften der verwendeten Matrizen ausgenutzt. Alle Externspeicheroperationen und die Verwaltung des Operationsspeicherplatzes werden durch das Teilsystem FEDAM wirksam unterstützt [6].

### 1.4. Service-Programme

Zur Gewährleistung einer möglichst großen Leistungsfähigkeit und Nutzerfreundlichkeit wurde bei COSAR besonderer Wert auf die Entwicklung leistungsfähiger Routinen für die Datengenerierung, Datenkontrolle und die Ergebnisauswertung gelegt. Die erste Version des Programmsystems enthält z. B.

- Programme zur rechnergeschützten Vernetzung und Koordinatenerzeugung für Standardbauteile bzw. Standardsubstrukturen;
- Programme zur übersichtlichen Aufbereitung der Primärergebnisse, das sind die Verschiebungen und Spannungen in den Knotenpunkten der Gesamt- oder Teilstruktur, zu den vom Nutzer geforderten Sekundärergebnissen.

Zur grafischen Kontrolle der generierten Daten und der Darstellung der Primär- oder Sekundärergebnisse wurde ein Hauptprozessor FEGRAF entwickelt. FEGRAF kann auch als selbständiges Programmsystem arbeiten [7], [8]. Bild 2 zeigt schematisch die Anpassungsmöglichkeit eines beliebigen FEM-Programms an FEGRAF, Bild 3 die modulare Gliederung von FEGRAF.

## 2. Verwendete Variationsprinzipie und davon abgeleitete Grundgleichungen

Das d'Alembertsche Prinzip in der Lagrangeschen Fassung,

$$\int_{(V)} (df - dm\ddot{u}) \delta u = 0 \quad (2)$$

worin  $df$  die am infinitesimalen Element wirkende resultierende Kraft ist,  $u$  das Verschiebungsvektorfeld und  $dm$  die Masse des Elementes, läßt für kleine Verformungen folgende Darstellung zu (Hamiltonsches Prinzip) [9]:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{1}{2} \int_{(V)} \rho \dot{u}^2 dV - \frac{1}{2} \int_{(V)} \underline{\sigma} \cdot \underline{\epsilon} dV + \right. \quad (3)$$

$$+ \left. \int_{(V)} f_V u dV + \int_{(O_f)} f_O u dO \right\} dt = 0$$

Hierin bezeichnen:

- $\rho$  die Dichte
- $\underline{\sigma}$  den Spannungstensor
- $\underline{\epsilon}$  den Verzerrungstensor
- $f_V$  die eingprägten Volumenkräfte
- $f_O$  die eingprägte Oberflächenkraft
- $V$  das Volumen
- $O$  die Oberfläche
- $O_f$  der Teil der Oberfläche mit eingprägten Kräften.

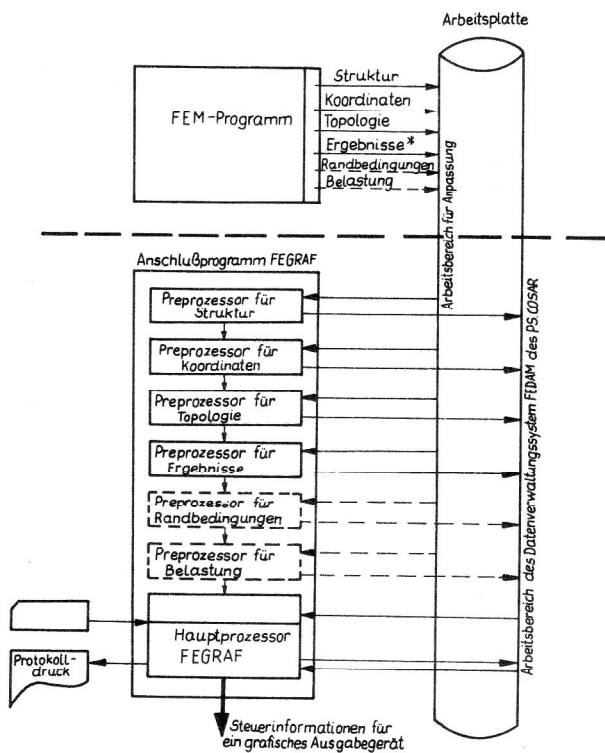


Bild 2  
Schematische Darstellung der Anpassung eines FEM-Programms an das Programmsystem FEGRAF

Für statische Aufgaben reduziert sich das Hamiltonsche Prinzip auf das Prinzip vom Minimum des elastischen Potentials. Die Einführung eines Spaltenvektors  $\mathbf{q}$  und eines Tensors  $\mathbf{G}$  der Approximationsfunktionen läßt die Darstellung

$$\mathbf{u} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{q}$$

zu. Die Elemente von  $\mathbf{q}$  sind die bisher mit Doppelindizes geschriebenen Knotenverschiebungen  $u_{ijk}$ . Der Tensor  $\mathbf{D}$  vermittelt den Zusammenhang zwischen den Verschiebungsfunktionen und dem Verzerrungstensor:

$$\underline{\epsilon} = \mathbf{D}\mathbf{u} = \mathbf{D}\mathbf{G}\mathbf{q}$$

Anpassung an allgemeine FEM-Programme	1 Steuermodul, Basisprogramme
	2 Preprozessor für Netz
	3 Preprozessor für Belastung
	4 Preprozessor für Randbedingungen
	5 Preprozessor für Ergebniswerte
Eingabeaktuelle	6 Netz zeichnen (Glaskörper)
	7 Knotenmarkieren
	8 Knoten nummerieren
	9 Elemente nummerieren
	10 Randbedingungen zeichnen
	11 Belastungen zeichnen
Ergebnisauswertung	12 Verformungen / Spannungsgebiete
	13 Isolinien
	14 Vektorpfeile
	15 veränderliche Schraffuren
Erhöhung der Anschaulichkeit	16 Stereoskopie – Anaglyphenverfahren
	17 Stereoskopie – beliebige Stereoskopie
	18 Sichtbarkeitstest (3 Stufen)
	19 Schnittalgorithmus
	20 Konturen zeichnen
	21 Schriftfeld mit Eintragungen, Berandung

Bild 3  
Modulare Gliederung des Programmsystems FEGRAF

Für linear elastisches Materialverhalten gilt weiter

$$\underline{\sigma} = \mathbf{E} \cdot \underline{\epsilon}$$

mit dem HOOKEschen Tensor  $\mathbf{E}$ .

Die so eingeführten Beziehungen erlauben es, Gl. (3) in der Form

$$\mathbf{A}\mathbf{q} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (4)$$

zu schreiben. Hierbei ermittelt sich die Massenmatrix  $\mathbf{A}$  aus

$$\mathbf{A} = \int_{(V)} \mathbf{G}^T \mathbf{G} \rho dV \quad (5)$$

die Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{C}$  aus

$$\mathbf{C} = \int_{(V)} (\mathbf{D}\mathbf{G})^T \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}\mathbf{G} dV \quad (6)$$

und der Vektor der äußeren Kräfte aus

$$\mathbf{f} = \int_{(V)} \mathbf{G}^T \mathbf{f}_V dV + \int_{(O_f)} \mathbf{G}^T \mathbf{f}_O dO. \quad (7)$$

Der Eigenschaft der in  $\mathbf{G}$  enthaltenen Approximationsfunktionen, nur innerhalb jeweils eines finiten Elementes ungleich Null zu sein, entsprechend, werden die in den Gln. (5) bis (7) enthaltenen Integrationen elementweise mit sich (in bezug auf das krummlinige lokale Koordinatensystem  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ ) wiederholenden Ansatzfunktionen durchgeführt. Die Integration wird gewöhnlich

durch eine Summation des Integranden über endlich viele Stützpunkte bei Multiplikation mit geeigneten Gewichtsfunktionen ersetzt [1]. Beim isoparametrischen 20-Knoten-Hexaederelement genügen als Stützpunkte die 8 sogenannten „Gaußpunkte“ mit den Koordinaten  $\xi_1, \xi_2, \xi_3 = \pm 1/\sqrt{3}$  und den „Gewichten“ 1, ohne dabei einen Verlust in der Konvergenzrate zuzulassen. Wählt man davon abweichend bei der Integration in Gl. (5) als Stützpunkte die Knoten aus, so ergibt sich die Massenmatrix in der für die Lösung des Gleichungssystems vorteilhaften Diagonalf orm. Einen Konvergenzverlust vermeidet man allerdings nur dann, wenn man für die Eckknoten negative „Gewichte“ zuläßt. Man nimmt damit eine indefinite Massenmatrix in Kauf, was bei der Wahl der Lösungsverfahren berücksichtigt werden muß.

Auf weitergehende Fragen der Aufstellung des Gleichungssystems, die rechentechnische Bewältigung der Daten, Einarbeitung der Randbedingungen u. ä. kann im Rahmen dieses Beitrages nicht eingegangen werden. Näheres hierzu ist [10] zu entnehmen.

### 3. Problemorientierte Zweige des Programmsystems COSAR

Der mit der Erarbeitung von FEM-Programmen für die Analyse dreidimensionaler Probleme verbundene große Aufwand ist nur im Zusammenhang mit der Entwicklung eines vielseitig einsetzbaren Programmsystems vertretbar. Bild 4 gibt einen Überblick über die problemorientierten Zweige von COSAR, die z. Zt. bearbeitet werden. Der Stand der Bearbeitung ist unterschiedlich und durchläuft im allgemeinen die Etappen:

- theoretische Voruntersuchungen,
- Testprogramme,
- einsatzfähige Spezialprogramme
- COSAR-Konzeption,
- Programmierung, Testung und Koppelung der COSAR-Prozessoren,
- Einfahren des Programmzweiges.

Die folgenden Ausführungen beschränken sich auf lineare statische Probleme, lineare dynamische Probleme und Probleme der linear-elastischen Bruchmechanik.

Einen ausführlichen Überblick über den Bearbeitungsstand der nichtlinearen Probleme gibt [11], Hinweise zu

allgemeinen Feldproblemen findet man in [12] und [13], Darstellungen zum Gesamtsystem in [10], [39], [40] und [41].

#### 3.1. Elastostatische Aufgaben

Für die lineare Elastostatik folgt aus (3) das Prinzip vom Minimum des elastischen Potentials in der Form

$$\delta \left\{ \frac{1}{2} \int_{(V)} \underline{\sigma} \cdot \underline{\epsilon} dV - \int_{(V)} \underline{f}_V \underline{u} dV - \int_{(O_f)} \underline{f}_O \underline{u} dO \right\} = 0 \quad (8)$$

$$\underline{\epsilon} = \underline{D} \underline{u} \in V; \quad \underline{u} = \bar{\underline{u}} \in O_u$$

$\underline{f}_V$  und  $\underline{f}_O$  sind die eingepprägten Kräfte,  $\bar{\underline{u}}$  die vorgegebenen Verschiebungen. Versteht man in (3) das Oberflächenintegral als Stieltjes - Integral, brauchen Einzelkräfte nicht gesondert betrachtet zu werden. Im allgemeinen wird jedoch (8) durch ein Glied

$$\sum_k \underline{f}_{Ek} \underline{u}_k$$

für die Einzelkräfte ergänzt. Die Berücksichtigung von Anfangsverzerrungen  $\underline{\epsilon}_0$  erfolgt über das Stoffgesetz. Das Differentialgleichungssystem (4) reduziert sich auf ein lineares Gleichungssystem,

$$\underline{C} \underline{q} = \underline{f} \quad (9)$$

mit dem verallgemeinerten Vektor der äußeren Kräfte

$$\underline{f} = \int_{(V)} \underline{G}^T \underline{f}_V dV + \int_{(O_f)} \underline{G} \underline{f}_O dO + \sum_k \underline{G}_k^T \underline{f}_{Ek}$$

und der Steifigkeitsmatrix

$$\underline{C} = \int_{(V)} (\underline{D} \underline{G})^T \cdot \underline{E} \cdot \underline{D} \underline{G} dV. \quad (10)$$

Typisch für dreidimensionale Probleme sind lineare Gleichungssysteme mit mehreren tausend Unbekannten und symmetrischen Matrizen  $\underline{C}$  mit großer Bandweite.

Für die Lösung der linearen Gleichungssysteme wird in COSAR ein Block-Cholesky-Algorithmus verwendet, der optimal mit dem Datenverwaltungssystem FEDAM zusammenarbeitet [6], [10] und [14].

Die Spannungsberechnung führt auch bei Verwendung kompatibler Verschiebungselemente auf Probleme, die

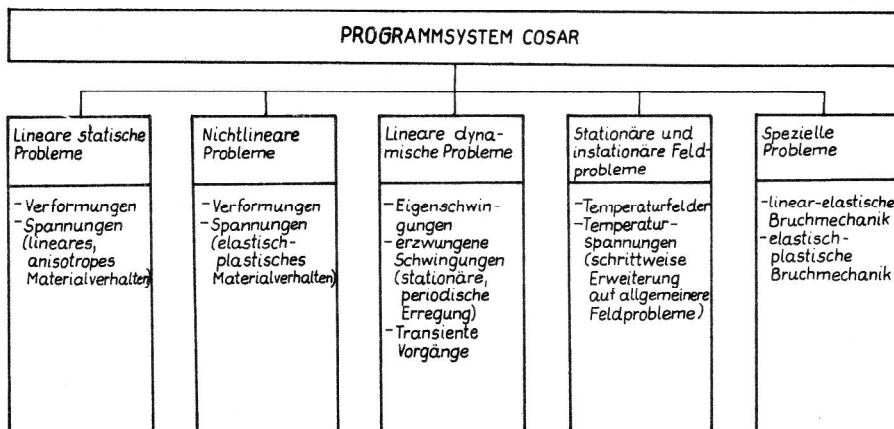


Bild 4  
Problemorientierte Zweige des Programmsystems COSAR



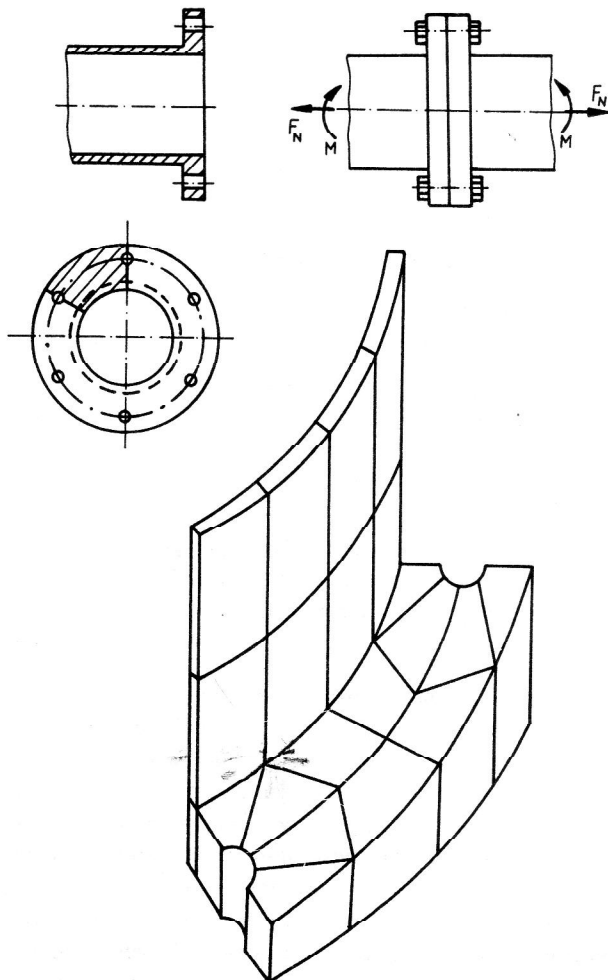
bei der Interpretation der berechneten Spannungswerte beachtet werden müssen. Die Näherungslösung auf der Grundlage des Prinzips vom Minimum des elastischen Gesamtpotentials sichert für die Spannungen die Erfüllung der Gleichgewichtsbedingungen nur im Mittel. Die Berechnung der lokalen Spannungswerte  $\underline{\sigma}^e$  für ein Element „e“ aus den Knotenverschiebungen  $\underline{q}$  des diskretisierten Gesamtsystems nach Gl. (11),

$$\underline{\sigma}^e = E^e \cdot \cdot \left[ (DG)^e \underline{q} - \underline{\epsilon}_0^e \right] \quad (11)$$

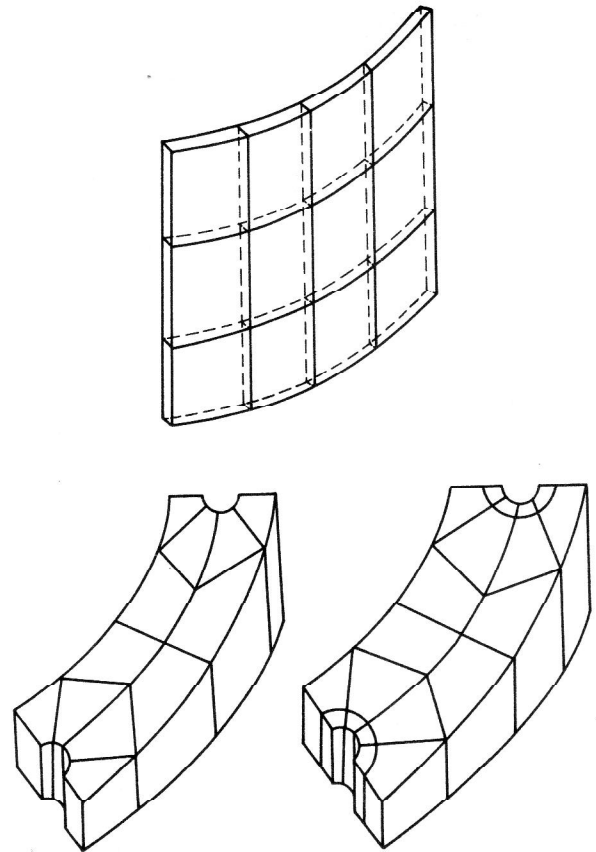
führt zu Spannungsfeldern, die erhebliche Diskontinuitäten entlang benachbarter Elementflächen aufweisen können. COSAR enthält spezielle Routinen zur Glättung der Spannungsverläufe und Indikatoren zur Abschätzung der Genauigkeit der berechneten Werte. Einen Überblick über mögliche Methoden zur Erhöhung der Genauigkeit der Spannungswerte bei FEM-Rechnung gibt [15].

Der Einsatz von finiten Elementen 3D für die Berechnung dreidimensionaler Modelle wurde an zahlreichen Testbeispielen überprüft. Dazu wurden auch spezielle Testprogramme eingesetzt.

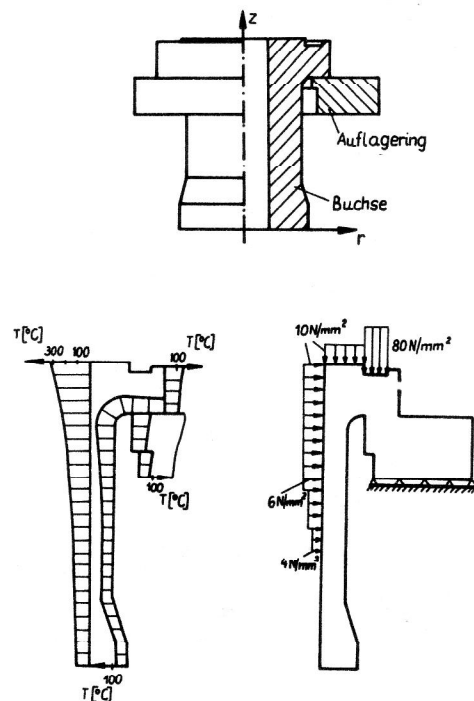
Die Bilder 5 und 6 zeigen ein Beispiel für ein dreidimensionales Berechnungsmodell [37], Bild 7 bis 10 das



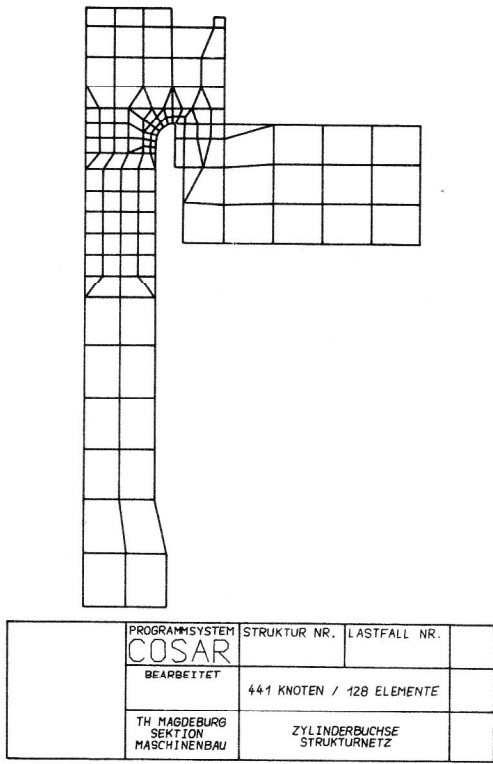
**Bild 5**  
Berechnungsmodell einer Flanschverbindung



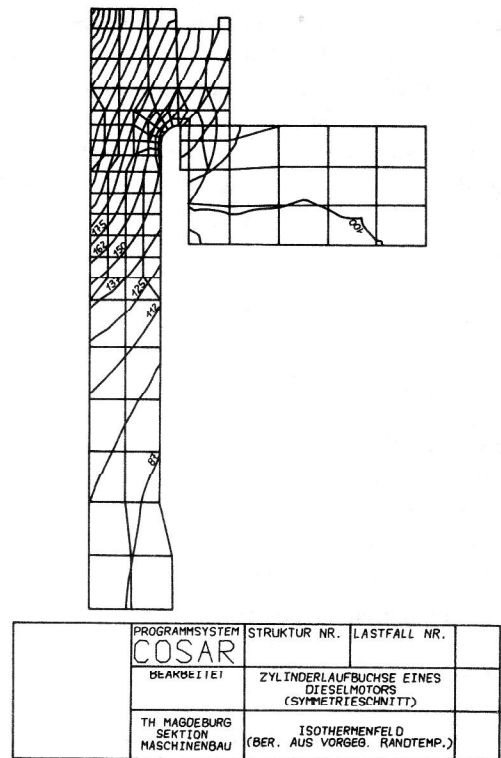
**Bild 6**  
Vernetzungsvarianten für das Berechnungsmodell „Flanschverbindung“



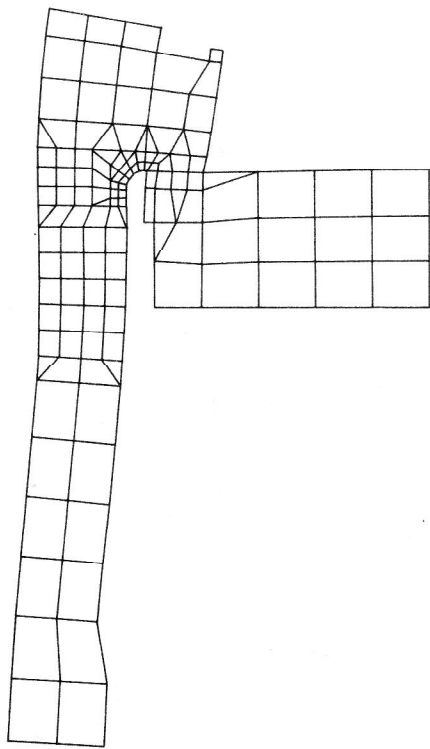
**Bild 7**  
Berechnungsmodell einer Zylinderbuchse



**Bild 8**  
FE-Strukturierung des Berechnungsmodells „Zylinderbuchse“



**Bild 10**  
Isothermenfeld für die Zylinderbuchse



PROGRAMMSYSTEM	STRUKTUR NR.	LASTFALL NR.
COSAR		
BEARBEITET	ZYLINDERBUCHSE 441 KNOTEN / 128 ELEMENTE	
TH MAGDEBURG SEKTION MASCHINENBAU	VERFORMUNGEN *100-FACH*	

**Bild 9**  
Deformation der Zylinderbuchse infolge der Belastung

Berechnungsmodell, die vernetzte Struktur und ausgewählte Ergebnisdarstellungen für ein Bauteil mit axial-symmetrischer Geometrie und Belastung. Die Spannungs- und Verformungsanalyse für Rotationskörper mit rotationssymmetrischer oder allgemeiner Belastung kann auch mit leistungsfähigen Spezialprogrammen erfolgen [16], [17], [18].

### 3.2. Dynamik elastischer Systeme

Im Mittelpunkt der bisherigen Untersuchungen stehen folgende Aufgabenstellungen:

- Berechnung des Eigenschwingungsverhaltens
- Berechnung erzwungener stationärer Schwingungen bei periodischer Erregung
- Berechnung von transienten Vorgängen.

Für die Berechnung des Eigenschwingungsverhaltens ist der homogene Teil des Systems (4) maßgebend. Ein harmonischer Ansatz für das Zeitverhalten von  $q$  führt auf das allgemeine Eigenwertproblem

$$(C - \omega^2 A) x = 0. \quad (12)$$

Das Format der darin enthaltenen symmetrischen Bandmatrizen hängt wesentlich von der Elementeinteilung ab und diese wiederum von der Geometrie des zu untersuchenden Körpers und von der Anzahl der zu berechnenden Eigenschwingungsformen. Abschätzungen haben ergeben [23], daß zur Bestimmung der Grundfrequenz die Elementeinteilung im wesentlichen durch die Forderung nach guter Approximation der Bauteilgeometrie bestimmt ist. Das ergibt sich aus einer Abschätzung für den relativen Fehler von Eigenfrequenzen für ein unendlich ausgedehntes Kontinuum, das in würfelförmige finite Elemente quadratischer Approximation mit der

Kantenlänge  $l$  eingeteilt ist [28]. Bei Eigenschwingungen mit einer Wellenlänge  $\lambda$  beträgt dieser Fehler

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} \approx \frac{1}{1440} \left(\frac{2\pi l}{\lambda}\right)^4 \quad \text{oder} \quad -\frac{1}{2880} \left(\frac{2\pi l}{\lambda}\right)^4 \quad (13)$$

je nachdem, ob bei der Bildung des Integrals in Gl. (5) die „Gaußpunkte“ oder die Knotenpunkte als Stützpunkte gewählt wurden.

Zur Lösung des Eigenwertproblems sind bisher mehrere Verfahren getestet worden. Als günstigster Algorithmus unter der Voraussetzung, daß nur eine Anzahl von Eigenfrequenzen und Eigenvektoren bestimmt werden soll, die klein ist gegenüber der Anzahl der Freiheitsgrade, hat sich die reziproke simultane Vektoriteration mit Unterraumtransformation erwiesen [24]. Als eine besonders effektive Variante kann das sog. Subspaceiterationsverfahren nach McCormick/Noe [29] angesehen werden, das für die Anwendung im System COSAR vorgesehen ist. Ein in [30] angegebenes Verfahren zur Bestimmung der kleinsten Eigenwerte symmetrischer Matrizen durch direkte Vektoriteration vermeidet die der Subspaceiteration anhaftende Notwendigkeit der Cholesky-Zerlegung der Matrix  $C$ . Es ist jedoch an die Diagonalform der Massenmatrix gebunden und kann dem Subspaceverfahren nur für sehr große Eigenwertprobleme bei vorteilhafter Datenstruktur überlegen sein.

Bei der Berechnung erzwungener stationärer Schwingungen mit periodischer Erregung kann man nur dann ohne Dämpfungsansätze auskommen, wenn die Erregerfrequenz genügenden Abstand von den benachbarten Eigenfrequenzen hat. Bei einfrequenter Erregung  $f(t) = f \sin \Omega t$  sind die Amplituden der Knotenverschiebungen  $q$  entsprechend Gl. (4) aus der Bezeichnung

$$(C - \Omega^2 A) q = f \quad (14)$$

zu errechnen, wobei alle Algorithmen der Elastostatik, einschließlich derer der Superelementtechnik, genutzt werden können.

Ist die Möglichkeit der Dämpfungsvernachlässigung nicht gegeben, so ist Gl. (4) durch Hinzunahme eines Dämpfungsgliedes zu modifizieren:

$$A\ddot{q} + B\dot{q} + Cq = f(q, \dot{q}, t) \quad (15)$$

Wegen der ohnehin vorhandenen Unsicherheit der Elemente der Dämpfungsmatrix (für die Werkstoffdämpfung ist das Modell des Voigt-Kelvin-Körpers bedingt geeignet [25]), empfiehlt es sich, von Hauptdämpfungsparametern auszugehen, die sich auf die Eigenschwingungsformen des ungedämpften Systems beziehen und zur Lösung von Gl. (15) die modale Methode anzuwenden. Das schließt eine vorherige Lösung des Eigenwertproblems (11) ein [26].

Transiente Vorgänge kann man entweder durch numerische Integration von Gleichungen vom Typ (15) im Zeitbereich oder auch unmittelbar durch Einführung vierdimensionaler raum-zeitlicher Approximationsfunktionen in Gl. (3) untersuchen [9]. Die mit der Untersuchung solcher Probleme verbundenen hohen Anforderungen an die Feinheit der Elementeinteilung und die

Genauigkeit des Integrationsverfahrens bzw. die Schranken für die Zeitschritte stellen sehr hohe Anforderungen an Speichervolumen und Rechengeschwindigkeit [27]. Das trifft insbesondere bei Stoß- und Wellenfortpflanzungsproblemen zu. Läßt man z. B. für die Fortpflanzung einer harmonischen Welle der Länge  $\lambda$  über eine Laufstrecke  $L$  einen Phasenfehler von  $\pi/4$  zu, so darf die Kantenlänge eines finiten Elementes quadratischer Approximation den Wert

$$l = \frac{\lambda}{2\pi} \sqrt[4]{180 \frac{\lambda}{L}} \quad (16)$$

nicht überschreiten [27].

Bei der hohen Anzahl von Freiheitsgraden bei Wellenfortpflanzungsproblemen verbietet sich eine Entwicklung des Anfangswertproblems nach Eigenfunktionen. Unter den numerischen Lösungsverfahren bieten sich vor allem solche an, die bei linearen Problemen unbedingt stabil sind, d. h., daß diese Verfahren eine beliebig große Zeitschrittweite zulassen, ohne instabil zu werden. Dazu zählen das Newmark- und das Wilson- $\Theta$ -Verfahren [24]. Trotzdem sind für die Schrittweite  $h$  bei Wellenfortpflanzungsproblemen enge Grenzen gesetzt, die durch die gewünschte Genauigkeit gegeben sind. Die Schrittweite  $h$  muß mindestens in der Größenordnung  $l/c$  bleiben, wobei  $l$  eine charakteristische Elementlänge und  $c$  die Schallgeschwindigkeit im untersuchten Medium darstellt. Die Anforderungen an die Feinheit der Zeiteinteilung steigen selbstverständlich mit der Dauer des Zeitintervalls, für den der Prozeß zu berechnen ist [27]. Zur Lösung solcher Aufgaben wird es wahrscheinlich nötig sein, vom Konzept der Bandmatrizenverarbeitung zur Kompaktdatenverarbeitung überzugehen. Außerdem sind alle Möglichkeiten der Reduktion räumlicher Systeme durch Fouriertransformation u. ä. zu nutzen.

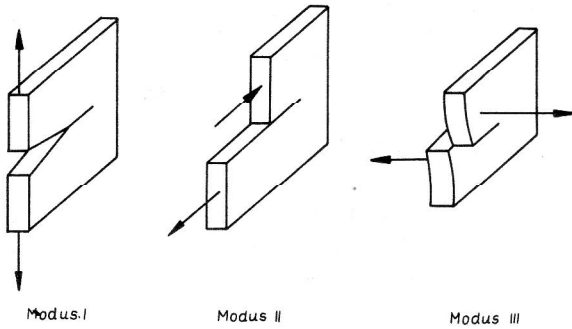
### 3.3. Linear-elastische Bruchmechanik (LEBM)

Das verstärkte Interesse verschiedener Industriezweige an einer bruchmechanischen Analyse dreidimensionaler Probleme führte zur Entwicklung eines gesonderten Programmzweiges COSAR-CRACK im Programmsystem COSAR.

Die LEBM beschränkt sich in ihrer Anwendung auf spröde Körper, die kontinuumsmechanische Grundlage ist die lineare Elastizitätstheorie. Die kontinuumsmechanische Betrachtung des Bruchvorgangs macht die Einführung eines Bruchkriteriums erforderlich, um das instabile Rißwachstum und damit das Versagen des Bauteiles durch Bruch bei Erreichen des kritischen Wertes einer geeigneten Bruchkenngröße zu erklären.

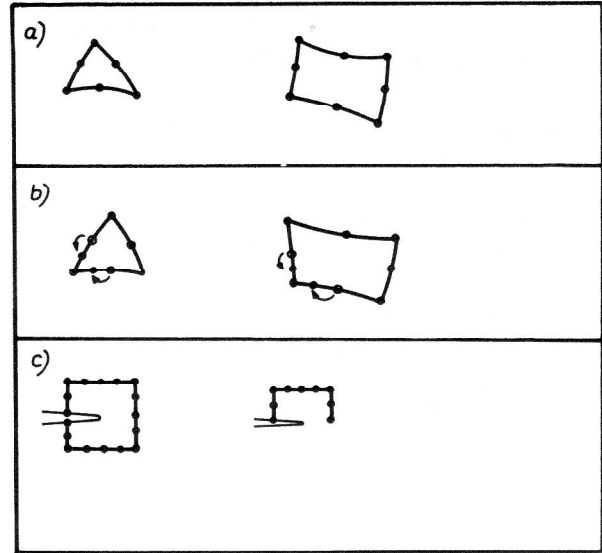
Die Konzentration der eigenen Arbeiten auf dreidimensionale Aufgaben der LEBM führte zu einer Bevorzugung des Energiedichtekriteriums von Sih [31] als Bruchkriterium.

Das Energiedichtekriterium hat den Vorteil, daß auch bei der für 3D-Probleme typischen Überlagerung der Rißöffnungsarten I, II und III nach Bild 11 der Verschiebungszustand nur durch eine Größe, die Energiedichte  $S$ , beschrieben wird und die Rißausbreitungsrichtung mit erfaßt werden kann. Für den Sonderfall des Rißöffnungs-

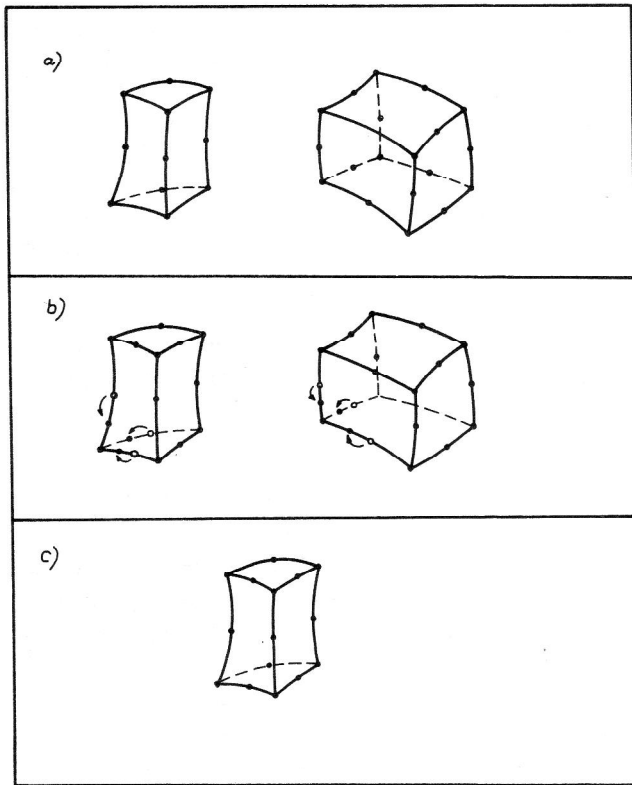


**Bild 11**  
Rißöffnungsarten

modus I ist das Sih-Kriterium mit dem  $K_I$ -Konzept des Bruchkriteriums auf der Basis des Spannungsintensitätsfaktors identisch. Einen Überblick über die Grundlagen und Methoden zur Lösung von Aufgaben der LEBM-3D findet man in [32].



**Bild 13**  
Elementkatalog für CRACK 2D  
(1. Version)



**Bild 12**  
Elementkatalog COSAR-CRACK 3D  
(1. Version)

Entsprechend der jeweiligen Aufgabenstellung und den Genauigkeitsanforderungen werden verschiedene Elementtypen für die bruchmechanische Analyse entwickelt und eingesetzt:

- isoparametrische Verschiebungselemente
- isoparametrische Verschiebungselemente mit Knotendistorsion
- spezielle isoparametrisch-singuläre Verschiebungselemente [33].

Bild 12 zeigt den derzeitigen Elementkatalog für COSAR-CRACK-3D. Gemeinsam mit dem Institut für Festkörperphysik und Elektronenmikroskopie der AdW der DDR wurde eine spezielle Variante CRACK 2D ausgearbeitet, deren Elementkatalog auch ein hybrides Element enthält (Bild 13), [38]. Eine zusammenfassende Übersicht über die mit CRACK 2D gegebenen Möglichkeiten zeigt Bild 14. Auf der Grundlage des Programmzweiges COSAR-CRACK wurden für theoretische und praktische Aufgabenstellungen bruchmechanische Untersuchungen für 2D- und 3D-Modelle durchgeführt. Als Beispiel sei hier auf die 3D-Untersuchung einer CT-Probe hingewiesen [32]. Für die Berechnung des Verschiebungs- und Spannungsfeldes war trotz relativ grober Vernetzung die Lösung eines Systems von 2400 Gleichungen erforderlich, die symmetrische Koeffizientenmatrix hatte eine halbe Bandweite von 255. Für die rationelle Lösung angewandter 3D-Aufgaben der LEBM gilt somit auch die für 3D-Modelle der Kontinuumsmechanik typische Forderung nach besonders effektiven Lösungsverfahren und konsequenter Anwendung der Substrukturtechnik.

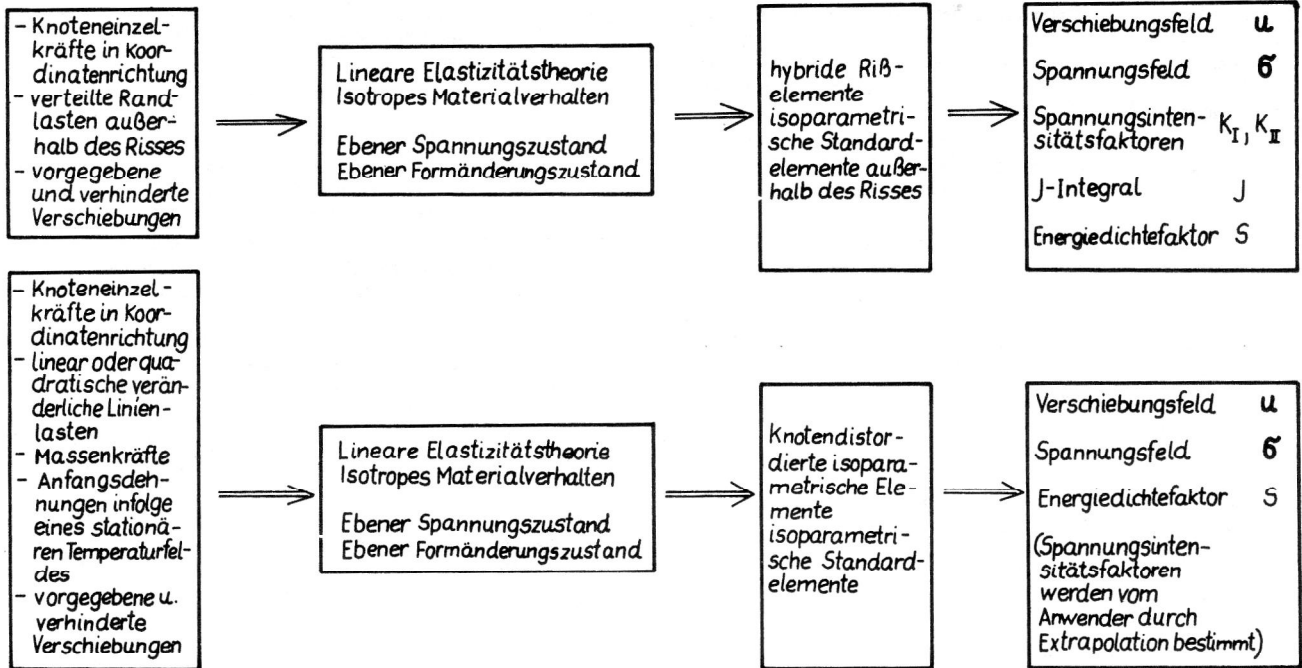


Bild 14  
Anwendungsmöglichkeiten des FEM-Programms CRACK 2D zur bruchmechanischen Analyse ebener, elastostatischer Rißprobleme

#### LITERATUR

- [1] Gabbert, U.: Berechnung der Spannungen und Verformungen in räumlichen Bauteilen mit Hexaederelementen. Berichte der Tagung Festkörpermechanik an der Techn. Univ. Dresden 1976, A IX/1-10.
- [2] Zienkiewicz, O.C.: The Finite Element Method. Mc GRAW-Hill Book Company (UK) Limited 3rd. Ed. 1977.
- [3] Newton, R.E.: Degeneration of brick-Type isoparametric elements. Int. J. Num. Meth. Eng. Vol. 7 (1973) No. 4, p. 579-581.
- [4] Altenbach, J., Dankert, J., Gabbert, U.: Finite-Elemente-3D-Programme. JfL-Mitteilungen 2 (1979), 85-91.
- [5] Altenbach, J., Todorow, M.: Ein Beitrag zur Anwendung hybrider finiter Elemente 3D. VIII. IKM, Weimar 1978.
- [6] Dankert, J., Limpert, H.: FEDAM 77, Programm-dokumentation Techn. Hochsch. Magdeburg 1977.
- [7] Börgers, H., Altenbach, J., Dankert, J.: FEGRAF, ein Programmsystem zur grafischen Kontrolle und Auswertung von Berechnungen nach der Methode der finiten Elemente. Techn. Hochsch. Magdeburg 1979, Theoretische Grundlagen u. Programmkonzeption.
- [8] Börgers, H., Börgers, M.: FEGRAF, ein Programmsystem zur grafischen Kontrolle und Auswertung von Berechnungen nach der Methode der finiten Elemente. Anwenderhandbuch, Techn. Hochsch. Magdeburg 1979.
- [9] Altenbach, J., Fischer, U.: Prinzipien der Mechanik als Grundlage effektiver numerischer Verfahren zur Berechnung des Spannungs- und Formänderungszustandes in deformierbaren festen Körpern. Wiss. Z. Techn. Hochsch. Magdeburg 22 (1978), S. 349 - 353.
- [10] Dankert, J.: Konzeption und Realisierung eines FEM-Programmsystems zur Berechnung dreidimensionaler Kontinua. Diss. B an der Techn. Hochsch. Magdeburg 1979.
- [11] Koczyk, S.: Kontinuumstheorie der Plastizität und ihre Anwendung auf Festigkeitsprobleme. Diss. B, Techn. Hochsch. Magdeburg 1979.
- [12] Gabbert, U., Strümke, M.: Die Berechnung von Feldproblemen mit der Methode der finiten Elemente. Wiss. Z. Techn. Hochsch. Magdeburg 21 (1977), S. 509 - 514.
- [13] Gabbert, U.: Anwendung der Methode der finiten Elemente (FEM) im Pumpen- und Verdichterbau. Pumpen und Verdichter. Informationen (1978) 1, S. 23 - 29.
- [14] Dankert, J.: Numerische Methoden der Mechanik. VEB Fachbuchverlag Leipzig 1977.
- [15] Altenbach, J.: Probleme der Spannungsberechnung bei Anwendung der FEM in der Festkörpermechanik. Soprotilvenije Materialov i Teorija Sooruzenij (im Druck).
- [16] Fritzsche, G.: Zur Berechnung des Verschiebungs- und Spannungszustandes von Rotationskörpern unter beliebig verteilter Belastung. Dissertation A, Techn. Hochsch. Magdeburg 1978.
- [17] Altenbach, J., Berger, H., Koczyk, S., Weese, W.: ROKO2T-FEM-Programm zur Berechnung axialsymmetrischer stationärer Temperaturfelder und axialsymmetrischer Spannungs- und Verformungszustände infolge statischer und thermischer Belastung in axialsymmetrischen Bauteilen. Techn. Hochsch. Magdeburg 1979.
- [18] Weese, W.: Saint Venantsche Torsion. Anwenderbeschreibung zum FEM-Programm SAVETO. Techn. Hochsch. Magdeburg 1978.
- [19] Weese, W., Altenbach, J., Todorow, M.: Sravnitelni izledvanija odnosno točnosťta na rešenieto pri izpolzuvane na ravninni chibridni i deformacionni krajni elementi. Naučni trudov na Vimmes (Russe) 21 (1979), S. 183 - 186.
- [20] Altenbach, J.: Zur Entwicklung hybrider finiter Elemente. Beiträge des II. FEM Seminar, Techn. Univ. Dresden 1977, S. 4 - 27.
- [21] Todorow, M.: Anwendung finiter hybrider Spannungselemente in der Elasto-Statik. Dissertation A, Techn. Hochsch. Magdeburg 1978.
- [22] Altenbach, J., Todorow, M.: Verallgemeinerte Variationsprinzipien und hybride finite Elemente in der Elastostatik. Tagungsbericht „Numerische Methoden in der Kontinuumsmechanik“, Hohe Tatra, CSSR 1978, S. 76 - 87.
- [23] Fischer, U.: Möglichkeiten der Berechnung dynamischer Beanspruchung in Bauteilen. Berichte des VI. Kolloquiums „Ausrüstungen der Metallurgie“, Techn. Hochsch. Magdeburg, August 1978, S. 89 - 101.
- [24] Bathe, K.-J., Wilson, E.-L.: Large eigenvalue problems of the engineering Mechanics Division. ASCE Proceedings. Vol. 98, (1972) EM 6, S. 1471 - 1485.
- [25] Fischer, U.: Untersuchung dynamischer Probleme an dreidimensionalen Modellen mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode. Maschinenbautechnik 26 (1977), S. 388 - 391.
- [26] Fischer, U., Mang, H., Zehn, M.: Anwendung der Finite-Element-Methode zur Untersuchung dynamischer Probleme an festen Körpern (russisch). Uspechi mechaniki (in Vorbereitung).



- [27] Fischer, U.: Zur Berechnung der Fortpflanzung elastischer Wellen in mit Hilfe von Finite-Element-Ansätzen diskretisierten dreidimensionalen Modellen. Proc. VIIIth International Conference on Nonlinear Oscillation. Prague 1978, S. 251 – 256.
- [28] Fischer, U., Grochla, J.: Otnosno točnosti na aproksimacija pri izledavne na dinamični problemi za elastični tela kroz krajni elementi. Naučni trudive na VIMMES (Russe) 21 (1979), S. 87 – 90.
- [29] McCormick, S.F., Noe, T.: Simultaneous Iteration for Matrix Eigenvalue Problem lineare Algebra and Its Appl., Vol. 16, 1977, Nr. 1, S. 43 – 66.
- [30] Fischer, U.: Bestimmung der kleinsten Eigenwerte symmetrischer positiv definiten Matrizen durch direkte Vektoriteration. ZAMM 60 (1980), A. 49 – 50.
- [31] Sih, G.C.: Three dimensional crack problems. Noordhoff int. Publ. Leyden 1975.
- [32] Altenbach, J., Wiltinger, L.: Methoden und Lösungen in der linearelastischen Bruchmechanik. Tagungsbericht „Numerische Methoden in der Kontinuumsmechanik, Hohe Tatra, CSSR 1978, S. 311 – 327.
- [33] Wiltinger, L.: Spezielle Verschiebungselemente 3D zur Lösung von Aufgaben der Bruchmechanik. V. Symposium Verformung und Bruch. Techn. Hochsch. Magdeburg 1979, Tagungsberichte II, S. 176 – 179
- [34] Kuna, M.: Zur Anwendung der Methode der finiten Elemente in der Bruchmechanik elastischer und elastisch-plastischer Körper. Diss. A, Universität Halle 1978.
- [35] Wolf, M.: Lösung von ebenen Kerb- und Rißproblemen mit der Methode der finiten Elemente. Diss. bei der Techn. Hochsch. München, Fachbereich Maschinenwesen 1977.
- [36] Kuna, M., Khang, D.Q.: Ein spezielles Hybrid-Rißelement für die Spannungsanalyse ebener Körper mit Rissen. VIII. IKM, Weimar 1978, Berichte Bd. 2, S. 71 – 76.
- [37] Koczyk, S.: Forschungsbericht THM 1979, unveröffentlicht.
- [38] Altenbach, J., Kuna, M., Wiltinger, L.: CRACK2D - Rechenprogramm zur bruchmechanischen Analyse ebener, elastostatischer Rißprobleme mit der Methode der finiten Elemente. Techn. Hochsch. Magdeburg 1979.
- [39] Altenbach, J., Dankert, J.: Anwendung von „Finite-Element-3D-Programmen“ auf die Berechnung der Spannungen und Verformungen im Maschinenbau und Baukonstruktionen und die Entwicklung komplexer Programmsysteme. The 3rd Seminar about Finite-Element-Method and Variational Methods. Plzn, CSSR 1977, Dil. 5, S. 752 – 771.
- [40] Altenbach, J., Dankert, J.: K rešeniju prostranstvennych zadač mechaniki tverdogo tela pomoščju konečnych elementov. Uspechi Mechaniki, tom 1, vypysk 3/4 (1978), S. 71 – 89.
- [41] Dankert, J., Gabbert, U.: Universelles Finite-Element-Programmsystem COSAR. Maschinenbautechnik 8 (1979), S. 352 – 358.

Anschrift der Verfasser:  
 Prof. Dr. sc. techn. Johannes Altenbach,  
 Prof. Dr. sc. techn. Udo Fischer  
 Technische Hochschule Otto von Guericke  
 Sektion Maschinenbau  
 301 Magdeburg, Bierutplatz 5