TECHNISCHE MECHANIK 1 (1980) Heft 1
Manuskripteingang: 4. 4. 1980

Das Deformationsgesetz in Rechenprogrammen für Bauteile aus inelastischem Material

Helge Bergander

Durch Verallgemeinerung des formalen Aufbaus von Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen entsteht ein Deformationsgesetz, das noch speziell genug ist, um in EDV-Programme eingebaut werden zu können. Es ist linear in den Zuwüchsen von Spannung, Verzerrung und internen Variablen. Alle bekannten Deformationsgesetze fügen sich entweder unmittelbar nach gewissen Umformungen oder nach bestimmten Approximationen ein.

1. Einleitung

Die Lösungsmöglichkeiten für komplizierte Berechnungsprobleme sind mit dem umfassenden Einsatz von Rechenautomaten enorm gewachsen. In der Festkörpermechanik wurden in den letzten Jahrzehnten besonders die Berechnungen von elastischen Bauteilen so entwickelt, daß komplizierte Geometrien der Bauteile unter Berücksichtigung beliebiger Formen der Ränder, beliebige Lagerungen und komplizierte Lasteinleitungen numerisch beherrscht werden. Die strengeren Forderungen nach hoher Sicherheit bei hoher Materialauslastung sowie die Möglichkeiten, die numerische Algorithmen einer Erweiterung des Modells stets bieten, führten zum Ausbau dieser Programme auch für nichtelastische Probleme.

Da insbesondere die Forderung nach hoher Anwenderfreundlichkeit der Programme die Entwicklung heute immer teurer werden läßt, steht zur Zeit eine Frage sehr dringlich. Dies ist die Frage nach der Möglichkeit, die Vielfalt des Materialverhaltens ebenso variabel in allgemeinen Programmen erfassen zu können, wie das heute schon auf Geometrie, Randbedingungen und Belastungen zutrifft.

Eine derartige Möglichkeit besteht, da alle inelastischen Probleme mathematisch auf einem einheitlichen Algorithmus beruhen, der durch den physikalischen Vorgang bedingt ist. Es handelt sich stets um Anfangs-Randwertprobleme[1]). Alle Algorithmen, die auf reine Randwertprobleme führen, gehören zur Klasse der elastischen Aufgaben. Das gilt auch dann, wenn sie auf physikalisch inelastische Werkstoffe angewendet werden (z. B. finite Plastizitätsgesetze, Zeitverfestigung beim Metallkriechen). In diesen Fällen handelt es sich lediglich um Näherungen für das Anfangs-Randwertproblem mit begrenztem Anwendungsgebiet.

Da außerdem auch nichtlineare (elastische) Randwertprobleme als Anfangs-Randwertproblem lösbar sind (z. B. in der FEM mit der Methode der tangentialen Steifigkeit), lassen sich alle inelastischen und nichtlinearen Berechnungsaufgaben einheitlich als Anfangs-Randwertproblem untersuchen.

Bei Vernachlässigung der Trägheitskräfte (sogenannte quasistatische Probleme) resultiert das Anfangswertproblem allein aus den Beziehungen zwischen Spannungen und Verzerrungen, dem Deformationsgesetz. Das Deformationsgesetz ist ein Gesetz aus der Klasse der Stoffgesetze; daher soll letzterer Begriff, der häufig für den Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhang gebraucht wird, hier wegen seiner allgemeineren Bedeutung vermieden werden.

Für die aufgeworfene Frage ist es von entscheidender Bedeutung, ob es gelingt, die Vielfalt von Deformationsgesetzen, die in der Literatur zu finden ist und ein Abbild der eingesetzten Konstruktionswerkstoffe darstellt, in eine allgemeine Form zu bringen. Diese allgemeine Form muß einerseits so speziell sein, daß sie programmierfähig ist, andererseits so allgemein, daß vorgegebene Deformationsgesetze stets in diese Form gebracht werden können.

Eine solche Form als Standard für beliebiges inelastisches Material läßt sich finden. Sie wurde in mehreren Arbeiten des Autors vorgestellt und diskutiert, so für alle Materialtypen am Beispiel des ebenen Hauptspannungszustandes [1], im Bezug auf die FEM [2], [3], für die Viskoelastizität [4] und für komplizierte Verfestigungshypothesen der Plastizitätstheorie [5]. Hier soll eine kurze zusammenfassende Übersicht gegeben werden.

2. Standardformulierung eines allgemeinen Deformationsgesetzes

Als Variable des Deformationsgesetzes werden $\underline{\sigma}$, $\underline{\epsilon}$, h und T als Funktionen der Zeit t eingeführt. Die Vektoren $\underline{\sigma}$ und $\underline{\epsilon}$ enthalten nur die Komponenten des Spannungs- und Verzerrungstensors, die beim konkreten Feldproblem einen Beitrag zur mechanischen Leistung pro Volumeneinheit $\dot{W}$ liefern. Die Leistung definiert auch über

$$\dot{W} = \underline{\sigma}^T \dot{\underline{\varepsilon}} \tag{1}$$

die Zuordnung beider Vektoren. Werden aus Gründen der Umformung des Deformationsgesetzes oder durch das Feldproblem Komponenten des Spannungs- bzw. Verzerrungstensors benötigt, die nicht identisch ver-

1) Es gibt hier nur eine – allerdings praktisch sehr bedeutsame – Ausnahme: die Traglastbestimmung einer Konstruktion aus plastischem Material.

schwinden, aber keinen Beitrag zu $\dot{W}$ liefern können, so werden diese Komponenten in **h** eingegliedert. Der Vektor **h** enthält sämtliche interne Variable des Deformationsgesetzes, die alle dadurch ausgezeichnet sind, daß sie nicht in die raumbezogenen Differentialgleichungen des Feldes eingehen. T ist das Temperaturfeld, das in der Regel als Differenz zu einem Bezugszustand angegeben wird.

Im Zusammenhang mit Bauteilberechnungen soll vorausgesetzt werden, daß die Verzerrungen klein sind sowie daß das Temperaturfeld bekannt ist und nicht von Dissipationsvorgängen wesentlich beeinflußt wird.
Die Standardformulierung lautet [1], [2], [3]:

$$\dot{\underline{\epsilon}} = \mathbf{J}\dot{\underline{\sigma}} + \mathbf{b}_T\dot{T} + \mathbf{b} \tag{2.1}$$

$$\dot{\mathbf{h}} = \mathbf{A}\dot{\underline{\sigma}} + \mathbf{c}_T\dot{T} + \mathbf{c}\ . \tag{2.2}$$

Die Matrizen **J**, **A** und die Vektoren **b**, **c**, $\mathbf{b}_T$ und $\mathbf{c}_T$ charakterisieren das konkrete Materialverhalten und hängen im allgemeinen (nichtlinearen) Fall von $\underline{\sigma}$, $\underline{\epsilon}$, **h** und T ab. Im praktisch sehr selten vorkommenden Sonderfall der Alterung (d. h. von Belastung und Temperatur unabhängiger Änderungen der Materialeigenschaften mit der Zeit) können sie auch von t abhängen. Der Punkt bedeutet die Ableitung nach t.
Die Matrizen **A** und **J** sind den skleronomen (zeitunabhängigen) Materialeigenschaften zugeordnet. Die Vektoren **b** und **c** sind für das zeitabhängige Verhalten verantwortlich, sie verschwinden daher für elastisches oder elastoplastisches Material. Die Vektoren $\mathbf{b}_T$ und $\mathbf{c}_T$ treten nur bei zeitlich veränderlichem Temperaturfeld auf und resultieren aus der Temperaturdehnung und dem Temperatureinfluß auf das skleronome Material.
Die Gleichung (2) wird für Berechnungsprobleme häufig in inverser Form benötigt

$$\begin{aligned}\dot{\underline{\sigma}} &= \mathbf{J}^{-1}\dot{\underline{\epsilon}} - \mathbf{J}^{-1}\mathbf{b}_T\dot{T} - \mathbf{J}^{-1}\mathbf{b}\\ &= \mathbf{C}\dot{\underline{\epsilon}} + \mathbf{d}_T\dot{T} + \mathbf{d}\end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{h}} &= \mathbf{A}\mathbf{J}^{-1}\dot{\underline{\epsilon}} - \mathbf{A}\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{b}_T\dot{T} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}_T\dot{T} + \mathbf{c}\\ &= \mathbf{B}\dot{\underline{\epsilon}} + \mathbf{e}_T\dot{T} + \mathbf{e}\ .\end{aligned} \tag{3.2}$$

Kern der Inversion ist

$$\mathbf{C} = \mathbf{J}^{-1}\ . \tag{4}$$

Wesentlich für die numerische Arbeit mit (2) bzw. (3) ist daher die Analyse, unter welchen Bedingungen **J** oder **C** entarten.
Formal haben (2) bzw. (3) für die Zuwüchse von $\underline{\sigma}$ und $\underline{\epsilon}$ den gleichen Aufbau wie ein Elastizitätsgesetz mit eingeprägten Anfangsspannungen oder -verzerrungen. Daß **J** und **C** symmetrisch und positiv (semi-) definit sind, gilt auch im inelastischen Fall überwiegend, jedoch sind auch Matrizen möglich, die von diesen Eigenschaften abweichen.

Im isothermen Fall ist die Eigenschaft, daß **J** bzw. **C** positiv semidefinit sind, abzuleiten aus der Materialannahme Stabilität nach Drucker [6].

Zum Anliegen dieser Arbeit soll nochmals betont werden, daß hier ausschließlich der formale Aspekt, der Aufbau eines programmierbaren Deformationsgesetzes, interessiert. Die Erfüllung der Prinzipien der rationalen Mechanik sollen vorausgesetzt und nicht mit Hilfe von (2) oder (3) studiert werden. Obwohl (2) bzw. (3) nach der modernen Materialtheorie nur eine ganz spezielle Gruppe von „rate type"-Gesetzen mit internen Zustandsparametern darstellt, erweist sie sich als so allgemein, daß sich alle bisher angewandten Deformationsgesetze einordnen lassen. Diese Aussage trifft nicht nur auf kleine Verzerrungen zu.

3. Spezialfälle

Zunächst wird der isotherme Fall vorausgesetzt.

Nichtlineare Elastizität

In diesem Fall ist der Spannungszustand eine Funktion des Verzerrungszustandes und umgekehrt. Diese Funktion muß ein übergeordnetes Potential haben:

$$\underline{\sigma} = \frac{\partial W(\underline{\epsilon})}{\partial \underline{\epsilon}} = \mathbf{g}(\underline{\epsilon}) \tag{5}$$

$$\underline{\epsilon} = \frac{\partial U(\underline{\sigma})}{\partial \underline{\sigma}} = \mathbf{f}(\underline{\sigma}) \tag{6}$$

Durch Differentiation nach t entsteht sofort die spezielle Variante von (2) bzw. (3):

$$\dot{\underline{\sigma}} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \underline{\epsilon}}\dot{\underline{\epsilon}} = \mathbf{C}_E(\underline{\epsilon})\dot{\underline{\epsilon}} \tag{7}$$

$$\dot{\underline{\epsilon}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \underline{\sigma}}\dot{\underline{\sigma}} = \mathbf{J}_E(\underline{\sigma})\dot{\underline{\sigma}}\ . \tag{8}$$

Infolge der bekannten Beziehungen zwischen spezifischer mechanischer Arbeit W und spezifischer Ergänzungsarbeit U erfüllen (7) und (8) die Gleichung (4), so daß numerisch auch alternativ $\mathbf{C}_E(\underline{\sigma})$ und $\mathbf{J}_E(\underline{\epsilon})$ berechnet werden können.
Die Matrizen $\mathbf{J}_E$ und $\mathbf{C}_E$ sind wegen (5) bzw. (6) symmetrisch. Für umkehrbar eindeutige Funktionen **f** und **g** sind sie zudem positiv definit. Es gibt nur einen praktisch bedeutsamen Fall, wo $\mathbf{J}_E$ positiv semidefinit wird und $\mathbf{C}_E$ nicht existiert. Das ist die Inkompressibilität. Abhilfe bringt das Streichen einer Normaldehnungskomponente und der zugeordneten Spannung. Die reduzierte Matrix ist positiv definit. Für die Bestimmung der gestrichenen Komponenten müssen die Inkompressibilitäts- und die Gleichgewichtsbedingungen genutzt werden.

Elastoplastizität

Wichtiges Beispiel ist die Fließtheorie mit assoziiertem Fließgesetz, die dem Drucker'schen Postulat genügt. Sie beruht bekanntlich auf folgenden Annahmen:

Die Dehnung addiert sich aus einem elastischen und einem plastischen Anteil:

$$\underline{\epsilon} = \underline{\epsilon}^E + \underline{\epsilon}^P\ . \tag{9}$$

Plastisches Fließen tritt nur auf, wenn die Fließbedingung erfüllt ist

$$F(\underline{\sigma}, \mathbf{h}) = 0 \tag{10}$$

und keine Entlastung stattfindet:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}}\right)^T \dot{\underline{\sigma}} \geqslant 0\,. \qquad (11)$$

Es gilt die Normalenregel:

$$\dot{\underline{\epsilon}}^P = \dot{\lambda}\,\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} = \dot{\lambda}\underline{\varphi} \quad (\dot{\lambda} \geqslant 0) \qquad (12)$$

Die Verfestigungsparameter **h**, die für die Änderung von Größe, Lage und Form der Fließbedingung verantwortlich sind, bestimmen sich aus

$$\dot{\mathbf{h}} = \mathbf{q}\,\dot{\lambda}\,. \qquad (13)$$

Während (9) bis (12) den „klassischen" Formelsatz der Fließtheorie bilden, wurde (13) von Verfasser durch eine Analyse verschiedener Verfestigungstheorien für isotrope, kinematische und anisotrope Verfestigung verallgemeinert [5].

Wird (10) nach t differenziert, folgt für den plastischen Fall

$$\dot{F} = \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}}\right)^T \dot{\underline{\sigma}} + \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{h}}\right)^T \dot{\mathbf{h}} = \underline{\varphi}^T \dot{\underline{\sigma}} - V\dot{\lambda} = 0\,, \qquad (14)$$

wobei (13) eingesetzt, die durch (12) gegebene Definition von $\underline{\varphi}$ beachtet und die Abkürzung

$$V = -\left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{h}}\right)^T \mathbf{q} \qquad (15)$$

eingeführt wurde. Mit (11) gilt im plastischen Fall

$$V \geqslant 0\,. \qquad (16)$$

Gleichung (14) ist Grundlage der Bestimmung des unbekannten skalaren Faktors $\dot{\lambda}$, der als lineare Funktion von $\dot{\underline{\sigma}}$ oder von $\dot{\underline{\epsilon}}$ angegeben werden kann. Für $\underline{\epsilon}^E$ wird (8) bzw. (7) eingeführt, wobei für elastisch – plastische Stoffe die Matrizen C_E und J_E in der Regel konstant sind. Mit bekanntem $\dot{\lambda}$ ergibt sich dann als konkrete Form für (2)

$$\dot{\underline{\epsilon}} = (J_E + \frac{1}{V}\underline{\varphi}\underline{\varphi}^T)\,\dot{\underline{\sigma}} = J(\sigma, \mathbf{h})\,\dot{\underline{\sigma}} \qquad (17.1)$$

$$\dot{\mathbf{h}} = \frac{1}{V}\,\mathbf{q}\underline{\varphi}^T \dot{\underline{\sigma}} = A(\underline{\sigma}, \mathbf{h})\,\dot{\underline{\sigma}} \qquad (17.2)$$

bzw. für (3)

$$\dot{\underline{\sigma}} = (C_E - \frac{C_E \underline{\varphi}\underline{\varphi}^T C_E}{V + \underline{\varphi}^T C_E \underline{\varphi}})\,\dot{\underline{\epsilon}} = C(\underline{\sigma}, \mathbf{h})\,\dot{\underline{\epsilon}} \qquad (18.1)$$

$$\dot{\mathbf{h}} = \frac{\mathbf{q}\underline{\varphi}^T C_E}{V + \underline{\varphi}^T C_E \underline{\varphi}}\,\dot{\underline{\epsilon}} = B(\underline{\sigma}, \mathbf{h})\,\dot{\underline{\epsilon}}\,. \qquad (18.2)$$

Da J_E bzw. C_E symmetrisch und positiv definit sind, sind für das assoziierte Fließgesetz diese verallgemeinerten Prandtl – Reuß – Gleichungen ebenfalls durch symmetrische Matrizen J und C gekennzeichnet. Außer im Sonderfall V = 0 sind sie zudem positiv definit. Im Fall V = 0, d. h., für ideal –plastisches Verhalten (auch als Grenzfall) wird C positiv semidefinit und J entartet [7]. Geht dem idealplastischen Zustand keine Verfestigung voraus, so wird keine Gleichung (18.2) benötigt.

$$\dot{\underline{\sigma}} = (C_E - \frac{C_E \underline{\varphi}\underline{\varphi}^T C_E}{\underline{\varphi}^T C_E \underline{\varphi}})\,\dot{\underline{\epsilon}} = C(\underline{\sigma})\,\dot{\underline{\epsilon}}\,. \qquad (19)$$

Diese Gleichung ist natürlich nicht mehr umkehrbar.

Auch für andere Fälle als den durch (9) bis (13) gegebenen sehr allgemeinen Rahmen entsteht die Standardform durch ganz ähnliche Umformungen. In [1] gibt es ein Beispiel für eine Anzahl verschiedener kinematisch verschieblicher Fließflächen. Der Rahmen positiv definiter symmetrischer C – Matrizen wird dabei nicht verlassen. Dies geschieht erst für nichtassoziierte Fließgesetze, die in der Bodenmechanik für die plastische Volumenänderung Anwendung finden (z. B. [8]). Es bleibt zwar die Standardform erhalten, aber man muß auf Algorithmen verzichten, die bewußt die genannten Eigenschaften von C bzw. J nutzen.

Die Dimension des Vektors **h** wird eindeutig durch die Normalform des Verfestigungsgesetzes (13) bestimmt. Für isotrope Verfestigung enthält er nur eine einzige Variable. Bei kinematischer Verfestigung kommen mindestens so viele Größen hinzu, wie $\underline{\sigma}$ und $\underline{\epsilon}$ enthalten, und bei anisotroper Verfestigung und quadratischen Fließbedingungen mindestens die Elemente einer symmetrischen Matrix mit der Dimension von $\underline{\sigma}$ bzw. $\underline{\epsilon}$ zum Quadrat. Bei komplizierten Ansätzen aller Verfestigungstypen steigt die Zahl der Variablen von **h**, die ein Maß für den Integrationsaufwand des Anfangswertproblems sind, rapid an [5].

Viskoelastizität

Voraussetzung für die Anwendung der Standardform ist hier die Approximation der allgemeinen Mehrfachintegraltheorie durch eine der beiden Grundtypen der Einfachintegraltheorie („Haupttheorie" gemäß [9]). In [4] wird ausführlich die Berechtigung einer solchen Approximation diskutiert. Anschließend müssen lediglich die Kernfunktionen durch Exponentialreihen beschrieben werden. Theoretisch gelingt dies mit unendlich vielen Reihengliedern für jede Funktion. Da unendlich viele Reihenglieder aber zugleich unendlich viele Variable von **h** bedeuten, ist eine endliche Reihe mit möglichst wenig Termen anzustreben. Hierzu stehen leistungsfähige Approximationsmethoden zur Verfügung [10].

Wird die Haupttheorie des Kriechens als beste Approximation vorausgesetzt, so läßt sie sich nach einigen Umformungen und Zusammenfassungen in den allgemeinen Rahmen [4]

$$\underline{\epsilon}(t) = f(\underline{\sigma}(t)) + \int_{-\infty}^{t} \Big[\underline{\varphi}_o(\underline{\sigma}(\tau)) + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{T_n}\,\underline{\varphi}_n(\underline{\sigma}(\tau))\, e^{-\frac{t-\tau}{T_n}}\Big]\, d\tau \qquad (20)$$

eingliedern. Als Sonderfall enthält (20) auch eine sehr oft angewendete Spezialform

$$\underline{\epsilon}(t) = \mathbf{f}(\underline{\sigma}(t)) + \int_{-\infty}^{t} J(t-\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\underline{\varphi}(\underline{\sigma}(\tau))\, d\tau \tag{21}$$

mit

$$J(t) = J_o\frac{t}{T_o} + \sum_{n=1}^{N} J_n(1-e^{-\frac{t}{T_n}}). \tag{22}$$

Der Integraloperator (20) (bzw. (21)) ist folgendem Differentialoperator äquivalent:

$$\dot{\underline{\epsilon}} = \frac{\partial g(\underline{\sigma})}{\partial\underline{\sigma}}\dot{\underline{\sigma}} + \underline{\varphi}_o(\underline{\sigma}) + \sum_{n=1}^{N} \mathbf{c}_n(\underline{\sigma}, \mathbf{h}_n) \tag{23.1}$$

$$\dot{\mathbf{h}}_n = \frac{1}{T_n}(\underline{\varphi}_n(\underline{\sigma}) - \mathbf{h}_n) = \mathbf{c}_n(\underline{\sigma}, \mathbf{h}_n). \tag{23.2}$$

Wird

$$\mathbf{h} = \left[\mathbf{h}_1^T, \mathbf{h}_2^T, \ldots, \mathbf{h}_N^T\right]^T \tag{24}$$

gebildet, so ist mit

$$J(\underline{\sigma}) = \frac{\partial g(\underline{\sigma})}{\partial\underline{\sigma}} \tag{25.1}$$

$$\mathbf{b}(\underline{\sigma}, \mathbf{h}) = \underline{\varphi}_o(\underline{\sigma}) + \sum_{n=1}^{N} \mathbf{c}_n(\underline{\sigma}, \mathbf{h}_n) \tag{25.2}$$

$$\mathbf{c}(\underline{\sigma}, \mathbf{h}) = \left[\mathbf{c}_1^T, \mathbf{c}_2^T, \ldots, \mathbf{c}_N^T\right]^T \tag{25.3}$$

die Standardform erreicht. Die Zahl der Elemente von **h** ist nach (24) und (23.2) gleich der Zahl der Elemente von $\underline{\epsilon}$, multipliziert mit der Zahl der Reihenglieder N in (20) bzw. (22).

Viskoplastizität

Die für die Berechnung wichtigsten Grundtypen viskoplastischer Gesetze sind die Deformationsgesetze des Metallkriechens mit Verfestigung (z. B. [11]) und die verallgemeinerten Bingham- bzw. Prager-Hohenemser-Beziehungen (z. B. [12]), die für Hochgeschwindigkeitsumformungen von Metallen Anwendung finden. Diese Gleichungen haben von vornherein die Grundform (2.1), so daß sich Umformungen erübrigen. Die Gleichungen (2.2) haben in allen bisher angewendeten Fällen die Besonderheit, daß A und zugeordnet $\mathbf{b}_T$ Nullmatrizen sind. Sie werden selten konsequent zu (2.1) hinzugeschrieben, liegen jedoch stets vor und beschränken sich meist auf eine einzige Variable in **h**. Diese wird hauptsächlich durch eine akkumulierte Vergleichsdehnung (ähnlich der isotropen skleronom – plastischen Verfestigung) oder durch die Dissipationsarbeit vertreten. Einen theoretischen Rahmen für den Aufbau eines größeren Vektors **h** gibt Robotnow [11] S. 223, S. 298 als „kinetische Gleichungen des Kriechens" an. Diese Gleichungen sind ohne weiteres in die Standardform zu bringen. Da bislang für eine solche Erweiterung experimentelle Untersuchungen fehlen, ist sie jedoch noch nicht anwendungsreif.

Temperatureinfluß im skleronomen Fall

In (6) wird **f**, in (10) F und in (13) **q** eine Funktion von T. Außerdem tritt in (9) noch eine Wärmedehnung

$$\underline{\epsilon}^{Th} = \underline{\beta}(T) = \int_{T_0}^{T} \underline{\alpha}(\overline{T})\, d\overline{T} \tag{26}$$

als dritter Summand auf. Dann gilt

$$\dot{\underline{\epsilon}} = (J_E + \underline{\frac{1}{V}\underline{\varphi}\,\underline{\varphi}^T})\,\dot{\underline{\sigma}} + (\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial T} + \underline{\frac{1}{V}\frac{\partial F}{\partial T}\underline{\varphi}} + \underline{\alpha})\,\dot{T} \tag{27.1}$$

$$\dot{\mathbf{h}} = \underline{\frac{1}{V}\mathbf{q}\,\underline{\varphi}^T\dot{\underline{\sigma}}} + \underline{\frac{1}{V}\frac{\partial F}{\partial T}\mathbf{q}\,\dot{T}}\,. \tag{27.2}$$

Die unterstrichenen Ausdrücke verschwinden im elastischen Fall. V ist weiterhin durch (15) definiert und es gilt auch (16), da die Bedingung (11) nun

$$(\frac{\partial F}{\partial\underline{\sigma}})^T\dot{\underline{\sigma}} + \frac{\partial F}{\partial T}\dot{T} \geqslant 0 \tag{28}$$

lautet (z. B. [13]). Der Vergleich von (27) mit (2) legt $\mathbf{b}_T$ und $\mathbf{c}_T$ fest.

Temperatureinfluß im rheonomen Fall

Dieser Einfluß liefert zusätzlich zu (27) nur noch, daß **b** und **c** Funktionen von T sind. Die Schwierigkeit besteht hier darin, diesen Einfluß experimentell zu erfassen. Eine erhebliche Erleichterung, die natürlich mit einer wesentlichen Einschränkung erkauft werden muß, ist die Annahme thermorheologisch einfachen Materials (z. B. [14]). Sie beruht auf der phänomenologischen Idee, daß erhöhte Temperaturen Kriechprozesse schneller ablaufen lassen und daß dies durch die Nutzung einer scheinbaren Zeit

$$\vartheta(t) = \int_{t_0}^{t} a_T(T(\tau))\, d\tau \tag{29}$$

in beliebigen Deformationsgesetzbeziehungen simuliert werden kann. Von (29) werden die Beziehungen (27) natürlich nicht beeinflußt. Dagegen wurden die beiden Vektoren **b** und **c** einfach mit $a_T(T)$ multipliziert, wenn (2) wieder auf die wirkliche Zeit t bezogen wird.

4. Anfangs-Randwertprobleme

Werden alle Feldgleichungen nach t differenziert, so entsteht mit (2.1) oder (3.1) ein lineares Randwertproblem für die Zuwüchse aller Feldgrößen. Die Lösung dieses linearen Randwertproblems mit geeigneten numerischen Methoden (als Anfangswertproblem = Übertragungsmatrizenverfahren, gegebenenfalls mit Separationsansätzen; Differenzenverfahren; FEM) stellt die Zuwüchse aller Feldgrößen als Funktion der Feldgrößen zur Verfügung. Sind diese bekannt, können auch die internen Variablen berechnet werden. Damit liegt die klassische Formulierung eines nichtlinearen Anfangswertproblems vor, das allerdings durch eine sehr große Variablenzahl gekennzeichnet ist.

Werden Programme für diesen Algorithmus so ausgelegt, daß die Dimension von **h** leicht variiert werden kann, so ist eine Anwendung des Programmes auf verschiedene Materialklassen möglich. Die ersten Anwendungsbeispiele für den Algorithmus in der DDR (Herrlich 1969, Kiesewetter 1974, zitiert in [1], Höfer 1973, zitiert in [3]) sind auf elastoplastisches bzw. viskoplastisches Materialverhalten (Friedrich 1974, vgl. [1]) mit maximal einem Element in **h** bezogen. Einen größeren Vektor **h** verwendet zuerst (für isotrop – kinematische Verfestigung) Weber 1972.

Elastisch – plastische, viskoelastische und viskoplastische Materialgesetze wurden in ein Programm zur Berechnung symmetrisch belasteter Rotationsschalen mit großen Verformungen von Röhle und Ulbricht 1975 eingebaut [15]. Dieses Programm wurde infolge seiner Universalität für sehr viele unterschiedliche Probleme eingesetzt, so z. B. für elastoplastische Bauteile wie eine Kugelgabel und einen Wellrohrkompensator [16], für linear – viskoelastische (Kuppel aus Polystyrolschaum) und nichtlinear viskoelastische (Rohre aus PE [17]) und viskoplastische Konstruktionen (Transportbehälter für radioaktives Material [16]). Die Allgemeinheit der Ansätze (2) gestattet es, künftige Programmsysteme so vorzubereiten, daß beliebiges Materialverhalten durch den Einbau kleiner spezifischer Unterprogramme berücksichtigt werden kann.

LITERATUR

[1] Bergander, H.: Eine verallgemeinerte Darstellung inelastischer Deformationsgesetze zur Erleichterung der numerischen Lösung von Anfangs-Randwertproblemen. ZAMM 58 (1978), S. 489 – 499.

[2] Bergander, H.: Einheitliches Konzept der Gleichungen des nichtlinear-inelastischen Materialverhaltens für FEM – Programmentwicklung. Weiterbildungszentrum Festkörpermechanik, Konstruktion und rationeller Werkstoffeinsatz, Vorträge zum Problemseminar Finite Elemente II, Heft 5/77, TU Dresden 1977.

[3] Bergander, H.: Die Berücksichtigung des nichtelastischen Materialverhaltens bei der Methode der finiten Elemente. IfL-Mitt. 18 (1979), S. 93 – 96.

[4] Bergander, H.: Die Aufbereitung der Grundgleichungen der nichtlinearen Viskoelastizitätstheorie für die numerische Lösung von Anfangs-Randwertproblemen. Diss. B Techn. Univ. Dresden 1976.

[5] Bergander, H.: Plastische Deformationsgesetze in differentieller Standardformulierung. ZAMM 60 (1980) (im Druck).

[6] Drucker, D.C.: A Definition of Stable Inelastic Material. J. Appl. Mech. 26 (1959), S. 101 – 106.

[7] Bergander, H.: Zur Inversion allgemeiner inelastischer Deformationsgesetze. IfL-Mitt. 19 (1980) (im Druck).

[8] Richter, T.: Vergleichende Berechnungen mit einigen in der Bodenmechanik bekannten Stoffgesetze unter Verwendung der Methode der finiten Elemente. Die Bautechnik 56 (1979), S. 267 – 273.

[9] Ильюшин, А.А.; Победря, Б.Е.: Основы математической теории термовязкоупругости, Москва 1970.

[10] Bergander, H.: Exponentialfunktionen zur Beschreibung von Kriechkurven. Plaste und Kautschuk 25 (1978), S. 287 – 291.

[11] Работнов, Ю.Н.: Ползучесть элементов конструкций, Москва 1966.

[12] Perzyna, P.: Fundamental problems in viscoplasticity. Advan. Appl. Mech. 9 (1966), S. 243 – 377.

[13] Green, A. E., Naghdi, P.M.: A General Theory of an Elastic Plastic Continuum. Arch. Rational Mech. Aral. 18 (1965), S. 251 – 281.

[14] Lockett, F.J.: Nonlinear Viscoelastic Solids. London, New York 1972.

[15] Röhle, H., Ulbricht, V.: Berechnung von Rotationsschalen bei nichtlinearem Deformationsverhalten. Diss. Techn. Univ. Dresden 1975.

[16] Landgraf, G.: Anwendung der Schalentheorie in der Industrie. IfL-Mitt. 18 (1979), S. 66 – 71.

[17] Balke, H., Ulbricht, V., Tränkner, M.: Nichtlineare Berechnung von Spannungen und Verformungen in Flächentragwerkn aus isotropem Plastmaterial. Plaste und Kautschuk 25 (1978), S. 98 – 101.

Anschrift des Verfassers:

Doz. Dr. sc. techn. Helge Bergander
Technische Universität, Sektion Grundlagen des Maschinenwesens
8027 Dresden, Mommsenstraße 13