

Die Methode des kleinen Parameters bei der Berechnung dreischichtiger Schalen

Albert Duda

Die für die anisotrope dreischichtige Schale mit nichtsymmetrischer Querschnittsstruktur entwickelte allgemeine lineare Theorie wird auf symmetrisch belastete Rotationsschalen mit rotationssymmetrischer Anisotropie und symmetrischer Querschnittsstruktur angewendet. Ausgehend von der Tatsache, daß durch das verwendete Deformationsmodell der gebrochenen Normalen in den lösenden Differentialgleichungen und Randbedingungen ein kleiner Parameter vor den höchsten Ableitungen erscheint, wird zur Untersuchung der Randstörung die iterative Methode des kleinen Parameters nach Wischik/Lusternik benutzt. Es zeigt sich, daß bei dreischichtigen Schalen zwei Typen von Randeffecten auftreten: ein Randeffect erster Art, der sich aus der geometrischen Form der Schale erklärt und beim Übergang zur Platte verschwindet, sowie ein Randeffect zweiter Art, der durch die Art des Querschnittsaufbaus bedingt ist und auch bei dreischichtigen Platten vorhanden ist.

Dreischichtige Konstruktionen, die durch den zweckentsprechenden Verbund geeigneter Werkstoffe eine hohe Materialökonomie ermöglichen, haben sich einen festen Platz in der Technik, besonders auch im Ingenieurbauwesen, erobert. Der vorliegende Beitrag bezieht sich auf die Berechnung dreischichtiger anisotroper Schalen mit Berücksichtigung der Schubnachgiebigkeit der Kernschicht. Ausgehend von den aus [1] entnommenen Grundgleichungen einer allgemeinen Theorie, die auf der Hypothese der gebrochenen Normalen beruht, werden die Grundgleichungen für die symmetrisch belastete orthotrope Rotationsschale mit symmetrischer Querschnittsstruktur entwickelt. Diese Gleichungen und die zugehörigen Randbedingungen, die sich durch Kombination von Ergebnissen aus [4] und [5] ergeben, enthalten einen kleinen Parameter vor den höchsten Ableitungen der Lösungsfunktionen. Diese Eigenschaft der Grundgleichungen wird für die näherungsweise Untersuchung der Randstörung unter Anwendung des Lösungsalgorithmus nach [6] ausgenutzt.

1. Grundgleichungen einer allgemeinen Theorie

Betrachtet wird die anisotrope dreischichtige Schale mit nichtsymmetrischer Querschnittsstruktur nach Bild 1. Hier sind h_1 , h_2 die Dicken der Tragschichten, $h_3 = 2c$ die Dicke der Kernschicht, $h = h_1 + h_2 + h_3$ die Gesamtdicke der Schale. Als Bezugsfläche S dient die Mittelfläche der Kernschicht, mit den Flächenkoordinaten x^1 , x^2 . Die Koordinate z zählt positiv in Richtung der Normalen n zur Bezugsfläche. Mit r_i , r^i werden die kovarianten bzw. kontravarianten Basisvektoren der Bezugsfläche bezeichnet, wobei hier und im folgenden alle Indizes die Werte 1, 2 annehmen (mit Ausnahme des Schichtindex $k = 1, 2, 3$). Mit den Vektoren $r_i = \partial r / \partial x^i$, $n_i = \partial n / \partial x^i$ ergeben sich die Flächentensoren der 1. und 2. quadratischen Form: $a_{ij} = r_i \cdot r_j$, $b_{ij} = -r_i \cdot n_j$.

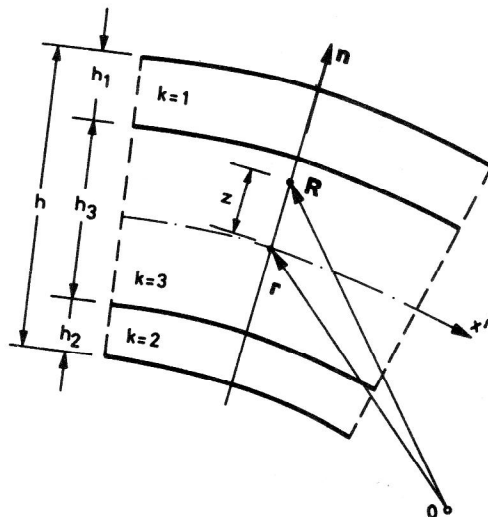


Bild 1
Zur Metrik des Schalenraumes

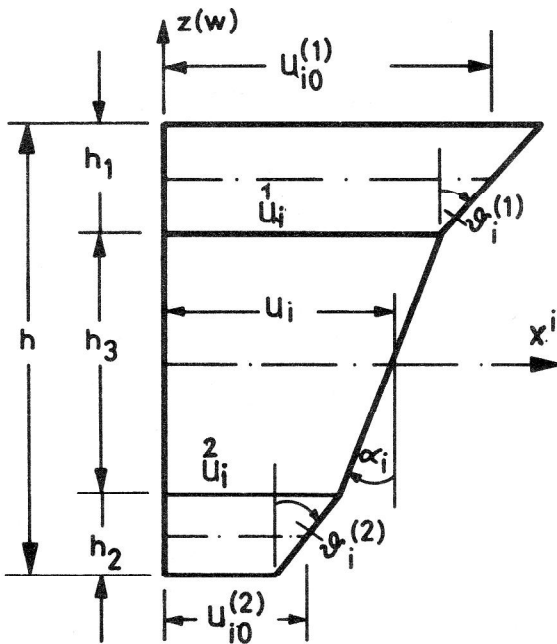


Bild 2
Deformationsmodell der gebrochenen Normalen

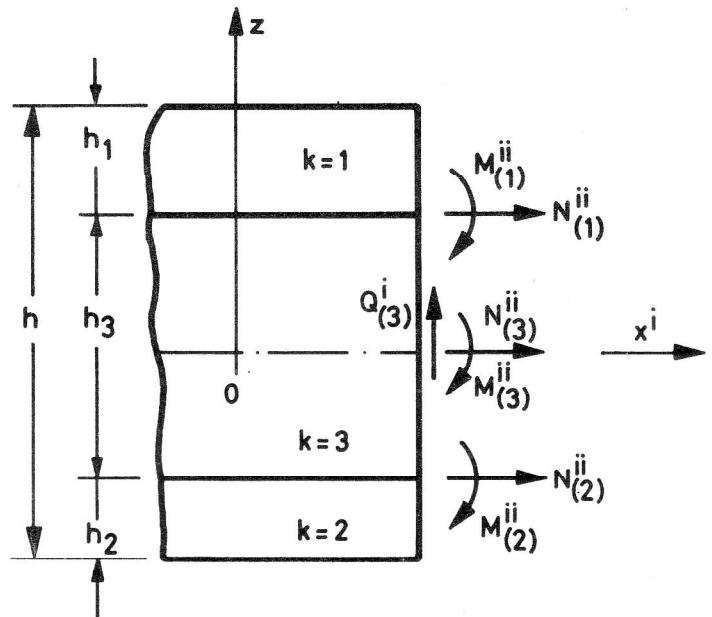


Bild 3
Innere Kräfte und Momente der Schichten

Die Lage eines beliebigen Schalenpunktes ist durch den Vektor $R = r(x^1, x^2) + zn$ gegeben. Damit sind die Basisvektoren des Schalenraumes [2]:

$$R_i = r_i + z n_i = r_i - z b_{ij} r^j, \quad R_3 = n.$$

Für die insgesamt *dünne Schale* ergeben sich wegen $z b_{ij} \ll 1$ die kovarianten Komponenten des Metrik-Tensors zu: $g_{ij} = R_i R_j \approx r_i r_j = a_{ij}$, $g_{i3} = 0$, $g_{33} = 1$. Andererseits gilt für den Tensor der 2. quadratischen Form einer Fläche im Abstand z von der Bezugsfläche S :

$$b_{ij}^{(z)} = -R_i n_j = b_{ij} - z \nu_{ij} \approx b_{ij}, \quad \text{weil } \nu_{ij} = n_i n_j = b_{i\alpha} b_j^\alpha.$$

Im nichtdeformierten Zustand der Schale wird daher mit gleichem Koeffizienten der 1. und 2. quadratischen Form für alle Schichten gerechnet.

Der Berechnung wird das *Modell der gebrochenen Normalen* [5] zu Grunde gelegt, bei dem für die Tragschichten die Hypothese von Kirchhoff/Love (Erhaltung der Normalen) und für die Kernschicht die Hypothese von Timoshenko (Geradebleiben der Normalen) gilt. Dehnungen der Kernschicht in Querrichtung werden nicht berücksichtigt. Aus Bild 2 erkennt man die folgenden Abhängigkeiten der Verschiebungen in den Schichten:

$$u_i^{(1,2)} = u_i \pm c \alpha_i + (z \mp c) \vartheta_i^{(1,2)}, \quad u_i^{(3)} = u_i + z \alpha_i \quad (1.1)$$

Hier sind: u_i die Tangentialverschiebungen der Bezugsfläche, α_i die Drehwinkel der Kernschicht, $\vartheta_i^{(1,2)}$ die Drehwinkel der Tragschichten, wobei die aus der Schalentheorie bekannte Beziehung

$$\vartheta_i^{(1,2)} = -(w_{,i} + b_i^j u_{j0}^{(1,2)}), \quad b_i^j = b_{i\alpha} a^{\alpha j}$$

gilt. Dabei sind: w -die für alle Schichten gleiche Durchbiegung ($w_{,i} \equiv \partial w / \partial x^i$) und $u_{j0}^{(1,2)}$ -die Tangentialverschiebungen der Tragschichtmittelflächen. Als Bezugsflächen für die Tragschichtgrößen werden wir im folgenden die Kontaktflächen zwischen den Tragschichten und dem Kern verwenden. Die Tangentialverschiebungen in diesen Schichten sind

$$u_i^{1,2} = u_{i0}^{(1,2)} \mp 0,5 h_{1,2} \vartheta_i^{(1,2)},$$

woraus mit Rücksicht auf die Dünnwandigkeit der Tragschichten folgt:

$$\vartheta_i^{(1,2)} = -w_{,i} - b_i^j [u_i^{1,2} \pm 0,5 h_{1,2} \vartheta_i^{(1,2)}] \approx -(w_{,i} + b_i^j u_j^{1,2}). \quad (1.2)$$

Wir untersuchen zunächst die *Deformationsbeziehungen*. Der durch R gekennzeichnete Schalenpunkt geht während der Deformation in die Lage $R^* = R + u_i^{(k)} r^i + wn$ über, wobei $u_i^{(k)}$ die kovarianten Komponenten der Tangentialver-

schiebungen in der k-ten Schicht und w die für alle Schichten als gleich angenommene Normalverschiebung sind. Die tangentialen Deformationen und die querverrichteten Schubdeformationen ergeben sich aus den Formeln

$$2\epsilon_{ij}^{(k)} = R_i^* R_j^* - R_i R_j, \quad 2\epsilon_{i3}^{(k)} = R_i^* R_3^* - R_i R_3 \quad (1.3)$$

Mit Rücksicht auf (1.1) ergibt sich hieraus für die Tragschichten:

$$\epsilon_{ij}^{(1,2)} = \epsilon_{ij} \pm c \mu_{ij} + (z \mp c) \kappa_{ij}^{(1,2)}, \quad 2\epsilon_{i3}^{(1,2)} = 0 \quad (1.4)$$

und für den Kern

$$\epsilon_{ij}^{(3)} = \epsilon_{ij} + z \mu_{ij}, \quad 2\epsilon_{i3}^{(3)} \equiv \gamma_{i3} = \alpha_i - \vartheta_i \quad (1.5)$$

wobei $\vartheta_i = -(w_{,i} + b_i^j u_j)$. Die in (1.4) und (1.5) verwendeten Deformationskomponenten sind im Falle kleiner Durchbiegungen:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i) - b_{ij} w, \quad \mu_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i \alpha_j + \nabla_j \alpha_i), \quad \kappa_{ij}^{(1,2)} = \frac{1}{2} (\nabla_i \vartheta_j^{(1,2)} + \nabla_j \vartheta_i^{(1,2)}) \quad (1.6)$$

Mit Rücksicht auf (1.2) schreiben wir die Komponenten des Krümmungstensors der Tragschichten in der Form

$$\kappa_{ij}^{(1,2)} = \kappa_{ij} \pm c \eta_{ij}, \quad \text{wobei} \quad (1.7)$$

$$\kappa_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i \vartheta_j + \nabla_j \vartheta_i), \quad \eta_{ij} = -\frac{1}{2} (\nabla_i b_j^\lambda \alpha_\lambda + \nabla_j b_i^\lambda \alpha_\lambda);$$

∇_i – Operator der kovarianten Differentiation auf der Bezugsfläche S mit der Metrik a_{ij} .

Aus dem Variationsprinzip von Lagrange:

$$\delta \Pi = \iint_S \left[\sum_{k=1}^3 \int_{(k)} \sigma_{(k)}^{ij} \delta \epsilon_{ij}^{(k)} dz + \int_{-c}^c \sigma_{(3)}^{i3} \cdot 2\epsilon_{i3}^{(3)} dz \right] \sqrt{a} dx^1 dx^2 - \delta A =$$

$$= \iint_S \left[N^{ij} \delta \epsilon_{ij} + H^{ij} \delta \mu_{ij} + M_{(+)}^{ij} \delta \kappa_{ij} + M_{(-)}^{ij} c \delta \eta_{ij} + Q_{(3)}^i \delta \gamma_i \right] \sqrt{a} dx^1 dx^2 - \delta A = 0$$

mit den verallgemeinerten Kräften

$$N^{ij} = N_{(1)}^{ij} + N_{(2)}^{ij} + N_{(3)}^{ij}, \quad H^{ij} = [N_{(1)}^{ij} - N_{(2)}^{ij}] c + M_{(3)}^{ij}, \quad M_{(+)}^{ij} = M_{(1)}^{ij} + M_{(2)}^{ij}, \quad M_{(-)}^{ij} = M_{(1)}^{ij} - M_{(2)}^{ij} \quad (1.8)$$

und

$$N_{(1)}^{ij} = \int_c^{c+h_1} \sigma_{(1)}^{ij} dz, \quad N_{(2)}^{ij} = \int_{-c-h_2}^{-c} \sigma_{(2)}^{ij} dz, \quad N_{(3)}^{ij} = \int_{-c}^c \sigma_{(3)}^{ij} dz, \quad Q_{(3)}^i = \int_{-c}^c \sigma_{(3)}^{ij} dz, \quad (1.9)$$

$$M_{(1)}^{ij} = \int_c^{c+h_1} \sigma_{(1)}^{ij} (z-c) dz, \quad M_{(2)}^{ij} = \int_{-c-h_2}^{-c} \sigma_{(2)}^{ij} (z+c) dz, \quad M_{(3)}^{ij} = \int_{-c}^c \sigma_{(3)}^{ij} z dz,$$

wobei die inneren Kräfte und Momente in den Tragschichten auf die Kontaktflächen $z = \pm c$ bezogen sind (vgl. Bild 3), erhalten wir nach Ausführung der Teilintegration das folgende System der Gleichgewichtsgleichungen

$$\nabla_i N^{ij} - b_i^j Q^i + p^j = 0,$$

$$\nabla_i Q^i + b_{ij} + q = 0, \quad (1.10)$$

$$\nabla_i [H^{ij} - c b_\lambda^j M_{(-)}^{i\lambda}] - Q_{(3)}^j + m^j = 0,$$

wobei $Q^i = Q_{(3)}^i + \nabla_j M_{(+)}^{ij}$ die Gesamtquerkraft im Schalenquerschnitt ist.

Für praktische Rechnungen kann in (1.10) das unterstrichene Glied als klein im Vergleich zum Hauptmoment H_{ij} vernachlässigt werden. Setzt man außerdem $m^j = 0$ (Vernachlässigung äußerer Flächenmomente), so kann anstelle von (1.10) auch das System

$$\begin{aligned} \nabla_i N^{ij} - b_i^j Q^i + p^j &= 0, \\ \nabla_i \nabla_j M^{ij} + b_{ij} N^{ij} + q &= 0, \\ \nabla_i H^{ij} - Q_{(3)}^j &= 0. \end{aligned} \quad (1.11)$$

verwendet werden, wobei $M^{ij} = H^{ij} + M_{(+)}^{ij}$ das Gesamtmoment im Schalenquerschnitt ist.

Wie man leicht feststellt, sind die ersten drei Gleichungen in (1.10) und (1.11) mit den Gleichgewichtsgleichungen der allgemeinen Theorie dünner einschichtiger Schalen identisch, während durch die beiden zusätzlichen Gleichungen $\nabla_i H^{ij} - Q_{(3)}^j = 0$, ($j = 1, 2$) die Spezifik der Sandwichschale – die Schubnachgiebigkeit der Kernschicht – berücksichtigt wird.

Aus dem Lagrangeschen Variationsprinzip ergeben sich ebenfalls die den eingeführten verallgemeinerten Kräften adäquaten natürlichen *Randbedingungen* des Problems.

Die kontravarianten Komponenten des Spannungstensors seien mit den kovarianten Komponenten des Deformationstensors durch das Hookesche Gesetz verbunden (über den Index k nicht summieren!):

$$\sigma_{(k)}^{ij} = A_{(k)}^{ijmn} \epsilon_{mn}^{(k)}, \quad \sigma_{(3)}^{i3} = G_{(3)}^{ij} \cdot 2 \epsilon_{j3}^{(3)} \quad (1.12)$$

Hiermit ergeben sich aus (1.8) – (1.9) die *physikalischen Gleichungen*:

$$\begin{aligned} N^{ij} &= C_{11}^{ijmn} \epsilon_{mn} + C_{12}^{ijmn} \mu_{mn} + C_{13}^{ijmn} \kappa_{mn}, \\ H^{ij} &= C_{12}^{ijmn} \epsilon_{mn} + C_{22}^{ijmn} \mu_{mn} + C_{23}^{ijmn} \kappa_{mn}, \\ M_{(+)}^{ij} &= C_{13}^{ijmn} \epsilon_{mn} + C_{23}^{ijmn} \mu_{mn} + C_{33}^{ijmn} \kappa_{mn}, \\ Q_{(3)}^i &= G_{(3)}^{ij} \cdot 2c \gamma_{i3} \quad (\gamma_{i3} = \alpha_i - \vartheta_i). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Die kontravarianten Komponenten der verwendeten Steifigkeitstensoren sind:

$$\begin{aligned} C_{11}^{ijmn} &= h_1 A_{(1)}^{ijmn} + h_2 A_{(2)}^{ijmn} + h_3 A_{(3)}^{ijmn}, & C_{22}^{ijmn} &= \frac{1}{4} h_3^2 [h_1 A_{(1)}^{ijmn} + h_2 A_{(2)}^{ijmn} + \frac{1}{3} h_3 A_{(3)}^{ijmn}], \\ C_{12}^{ijmn} &= \frac{1}{2} h_3 [h_1 A_{(1)}^{ijmn} - h_2 A_{(2)}^{ijmn}], & C_{23}^{ijmn} &= \frac{1}{4} h_3 [h_1^2 A_{(1)}^{ijmn} + h_2^2 A_{(2)}^{ijmn}], \\ C_{13}^{ijmn} &= \frac{1}{2} [h_1^2 A_{(1)}^{ijmn} - h_2^2 A_{(2)}^{ijmn}], & C_{33}^{ijmn} &= \frac{1}{3} [h_1^3 A_{(1)}^{ijmn} + h_2^3 A_{(2)}^{ijmn}]. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Für das Gesamtmoment $M^{ij} = H^{ij} + M_{(+)}^{ij}$ gilt die Beziehung

$$M^{ij} = K^{ijmn} \epsilon_{mn} + D_{(1)}^{ijmn} \mu_{mn} + D_{(2)}^{ijmn} \kappa_{mn} \quad (1.15)$$

mit

$$K^{ijmn} = C_{12}^{ijmn} + C_{13}^{ijmn}, \quad D_{(1)}^{ijmn} = C_{22}^{ijmn} + C_{23}^{ijmn}, \quad D_{(2)}^{ijmn} = C_{23}^{ijmn} + C_{33}^{ijmn} \quad (1.16)$$

2. Spezialfall der dreischichtigen Rotationsschale

Für die symmetrisch belastete dreischichtige Rotationsschale mit symmetrischer Querschnittsstruktur und orthotropen Schichten (Hauptachsen der Orthotropie fallen mit den Koordinatenrichtungen s, θ zusammen; vgl. Bild 4) ergeben sich aus den Beziehungen der allgemeinen Theorie folgende Grundgleichungen:

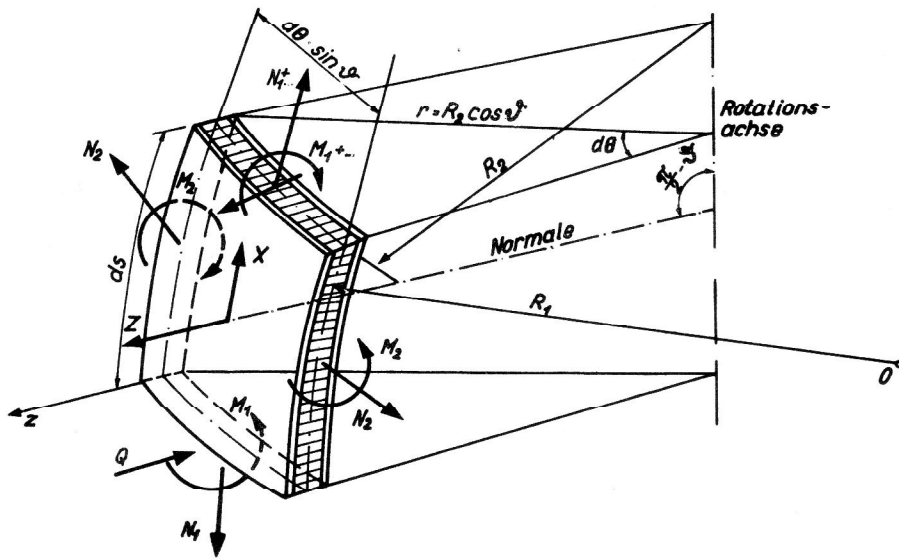


Bild 4
Element der dreischichtigen Rotationsschale
 ϑ – Winkel der Meridiantangente mit der Rotationsachse
 r – Radius des Breitenkreises ($r = R_2 \cos \vartheta$)

geometrische Gleichungen

$$\epsilon_1 = \frac{du}{ds} + \frac{w}{R_1}, \quad \epsilon_2 = \frac{1}{r} (w \cos \vartheta - u \sin \vartheta), \quad \mu_1 = \frac{d\alpha}{ds}, \quad \mu_2 = -\frac{\sin \vartheta}{r} \alpha, \quad (2.1)$$

$$\kappa_1 = -\frac{dW}{ds}, \quad \kappa_2 = \frac{\sin \vartheta}{r} W, \quad \gamma_{13} = \alpha + W, \quad \gamma_{23} = 0, \quad W = \frac{dw}{ds} - \frac{u}{R_1},$$

wobei

$$r \frac{d\epsilon_2}{ds} - (\epsilon_2 - \epsilon_1) \sin \vartheta - W \cos \vartheta = 0; \quad (2.2)$$

Gleichgewichtsgleichungen

$$\frac{d}{ds} (r N_1) + N_2 \sin \vartheta + r \frac{Q}{R_1} = -r X,$$

$$\frac{d}{ds} (r Q) - r \left(\frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} \right) = -r Z, \quad (2.3)$$

$$\frac{d}{ds} (r H_1) + H_2 \sin \vartheta - r Q^3 = 0,$$

wobei

$$Q = Q^3 + \frac{1}{r} \left[\frac{d}{ds} (r M_1^+) + M_2^+ \sin \vartheta \right]; \quad (2.4)$$

physikalische Gleichungen

$$\begin{aligned} N_1 &= B_{11} \epsilon_1 + B_{12} \epsilon_2, & N_2 &= B_{12} \epsilon_1 + B_{22} \epsilon_2, & M_1 &= D_{11}^{(1)} \mu_1 + D_{12}^{(1)} \mu_2 + D_{11}^{(2)} \kappa_1 + D_{12}^{(2)} \kappa_2, \\ H_1 &= C_{11}^{22} \mu_1 + C_{12}^{22} \mu_2 + C_{11}^{23} \kappa_1 + C_{12}^{23} \kappa_2, & M_2 &= D_{12}^{(1)} \mu_1 + D_{22}^{(1)} \mu_2 + D_{12}^{(2)} \kappa_1 + D_{22}^{(2)} \kappa_2, \\ H_2 &= C_{12}^{22} \mu_1 + C_{22}^{22} \mu_2 + C_{12}^{23} \kappa_1 + C_{22}^{23} \kappa_2, & Q^3 &= G_{13}^3 h_3 (\alpha + W) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Die Steifigkeitskoeffizienten in (2.5) sind:

$$\begin{aligned}
 B_{ij} &= C_{ij}^{11} = h_1 A_{ij}^1 + h_2 A_{ij}^2 + h_3 A_{ij}^3, & C_{ij}^{22} &= \frac{1}{4} h_3^2 (h_1 A_{ij}^1 + h_2 A_{ij}^2 + \frac{1}{3} h_3 A_{ij}^3), \\
 C_{ij}^{23} &= \frac{1}{4} h_3 (h_1^2 A_{ij}^1 + h_2^2 A_{ij}^2), & C_{ij}^{33} &= \frac{1}{3} (h_1^3 A_{ij}^1 + h_2^3 A_{ij}^2), \\
 D_{ij}^{(1)} &= C_{ij}^{22} + C_{ij}^{23}, & D_{ij}^{(2)} &= C_{ij}^{23} + C_{ij}^{33}, & A_{11}^k &= \frac{E_1^k}{1 - \nu_1^k \nu_2^k}, & A_{22}^k &= \frac{E_2^k}{1 - \nu_1^k \nu_2^k}
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Die weiteren Beziehungen werden für die von Oberflächenkräften freie Schale abgeleitet. Bei Verwendung der Meissner/Lurjeschen Funktion V (vgl. [4]):

$$r N_1 = -V \sin \vartheta, \quad N_2 = \frac{dV}{ds}; \quad r Q = V \cos \vartheta \tag{2.7}$$

bleibt von den Gleichgewichtsgleichungen (2.3):

$$\frac{d}{ds} (r M_1) + M_2 \sin \vartheta - V \cos \vartheta = 0, \tag{2.8}$$

$$\frac{d}{ds} (r H_1) + H_2 \sin \vartheta = G_{13}^3 h_3 (\alpha + W). \tag{2.9}$$

Die Auflösung der physikalischen Gleichungen für N_1, N_2 nach ϵ_1 und ϵ_2 ergibt:

$$\epsilon_1 = -\frac{1}{\Omega_0} (B_{22} \frac{\sin \vartheta}{r} V + B_{12} \frac{dV}{ds}), \quad \epsilon_2 = \frac{1}{\Omega_0} (B_{12} \frac{\sin \vartheta}{r} + B_{11} \frac{dV}{ds}) \tag{2.10}$$

wobei $\Omega_0 = B_{11} B_{22} - (B_{12})^2$.

Die Beziehungen (2.2), (2.8) und (2.9) bilden die Ausgangsgleichungen für die Lösung des Problems. Unter der in Analogie zu [4] eingeführten näherungsweise Voraussetzung

$$\frac{B_{22}}{B_{11}} = \frac{D_{22}^{(1)}}{D_{11}^{(1)}} = \frac{D_{22}^{(2)}}{D_{11}^{(2)}} = \frac{C_{22}^{22}}{C_{11}^{22}} = \frac{C_{22}^{23}}{C_{11}^{23}} = n^2$$

ergeben sich durch Einsetzen von ϵ_1, ϵ_2 aus (2.10) in (2.2) und M_1, M_2, H_1, H_2 aus (2.5) in (2.8) – (2.9) folgende Gleichungen:

$$L(V) + \frac{B_{12}}{B_{11}} \frac{1}{R_1 R_2} V = \frac{\Omega_0}{B_{11}} \frac{1}{R_2} W, \tag{2.11}$$

$$-D_{11}^{(1)} \left[L(\alpha) - \frac{D_{12}^{(1)}}{D_{11}^{(1)}} \frac{1}{R_1 R_2} \alpha \right] + D_{11}^{(2)} \left[L(W) - \frac{D_{12}^{(2)}}{D_{11}^{(2)}} \frac{1}{R_1 R_2} W \right] = -\frac{1}{R_2} V, \tag{2.12}$$

$$\alpha + W = \Omega_1 L(\alpha) - \Omega_2 L(W) \tag{2.13}$$

mit dem linearen Operator

$$L = \frac{d^2}{ds^2} - \frac{\sin \vartheta}{r} \frac{d}{ds} - n^2 \frac{\sin^2 \vartheta}{r^2} \tag{2.14}$$

und den Koeffizienten

$$\begin{aligned}
 D_{11}^{(1)} &= \frac{1}{12} B_{11} h^2 (\theta_1 + \theta_2), & D_{11}^{(2)} &= \frac{1}{12} B_{11} h^2 (\theta_2 + \theta_3), \\
 \Omega_1 &= \frac{1}{12} B_{11} h^2 \frac{\theta_1}{G_{13}^3 h_3}, & \Omega_2 &= \frac{1}{12} B_{11} h^2 \frac{\theta_2}{G_{13}^3 h_3}.
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Hier werden die in [5] eingeführten dimensionslosen Parameter

$$\begin{aligned}\theta_1 &= t_3^2 [1 + 2(\gamma_1 + \gamma_2)], & \theta_2 &= 3 t_3 (\gamma_1 + \gamma_2 t_2), \\ \theta_3 &= 4(\gamma_1 t_1^2 + \gamma_2 t_2^2), & t_k &= \frac{h_k}{h}, & \gamma_k &= \frac{B_{11}^k}{B_{11}}\end{aligned}\quad (2.16)$$

verwendet.

Die Gl (2.13) wird durch den Ansatz

$$W = U - \Omega_1 L(U), \quad -\alpha = U + \Omega_2 L(U) \quad (2.17)$$

identisch erfüllt. $U(s)$ ist eine zu bestimmende Hilfsfunktion. Für die Schubdeformation der Kernschicht gilt

$$\gamma_{13} = \gamma = \alpha + W = -(\Omega_1 + \Omega_2) L(U). \quad (2.18)$$

Durch Einsetzen von W und α aus (2.17) in die Gln. (2.11), (2.12) erhalten wir bei Vernachlässigung kleiner Glieder folgendes System zweier lösender Differentialgleichungen für die Funktionen U und V :

$$L(V) + \frac{B_{12}}{B_{11}} \frac{V}{R_1 R_2} = \frac{\Omega_0}{B_{11}} \frac{1}{R_2} [U - \Omega_1 L(U)], \quad (2.19)$$

$$-\epsilon_0^2 L L(U) + L(U) - \frac{D_{22}}{D_{11}} \frac{U}{R_1 R_2} = -\frac{1}{D_{11}} \frac{V}{R_2}, \quad (2.20)$$

wobei

$$\epsilon_0^2 = \frac{1}{D_{11}} (\Omega_1 D_{11}^{(2)} - \Omega_2 D_{11}^{(1)}), \quad D_{11} = D_{11}^{(1)} + D_{11}^{(2)}. \quad (2.21)$$

Für hinreichende steile Schalen können in (2.19) und (2.20) die unterstrichenen Glieder gegenüber $L(U) \sim \lambda^2 U$ und $L(V) \sim \lambda^2 V$ (λ - Abklingungszahl des Randeffectes) vernachlässigt werden. Durch Elimination der Funktion V ergibt sich in diesem Falle folgende Differentialgleichung für die Funktion U :

$$-\epsilon_0^2 L L L(U) + L L(U) - 2 \omega^2 L(U) + k^4 U = 0 \quad (2.22)$$

mit ϵ_0^2 aus (2.21) und

$$2 \omega^2 = \Omega_1 \left(\frac{A}{R_2} \right)^2, \quad k^4 = \left(\frac{A}{R_2} \right)^2, \quad A = \sqrt{\frac{\Omega_0}{B_{11} D_{11}}}, \quad (2.23)$$

Zur Formulierung der Randbedingungen werden folgende Ausdrücke der Momente H_1 und M_1 benötigt, die sich durch Einsetzen von

$$\mu_1 = -\frac{dU}{ds} - \Omega_2 L \left(\frac{dU}{ds} \right), \quad \kappa_1 = -\frac{dU}{ds} + \Omega_1 L \left(\frac{dU}{ds} \right)$$

und $\mu_2 \approx \kappa_2 \approx 0$ in die entsprechenden physikalischen Gleichungen (2.5) ergeben:

$$H_1 = -D_{11} \eta \frac{dU}{ds}, \quad M_1 = -D_{11} \left[\frac{dU}{ds} - \epsilon_0^2 L \left(\frac{dU}{ds} \right) \right] \quad (2.24)$$

mit

$$\eta = \frac{\theta_1 + \theta_2}{\theta}, \quad \theta = \theta_1 + 2\theta_2 + \theta_3. \quad (2.25)$$

Außerdem führen wir ein

$$\epsilon_0^2 = \vartheta \Omega_1, \quad \vartheta = \frac{\theta_1 \theta_3 - \theta_2^2}{\theta_1 \theta}. \quad (2.26)$$

Selbst bei relativ dicken Tragschichten ist $\vartheta \ll 1$, so daß ϵ_0^2 in Gl. (2.22) i. a. die Rolle eines kleinen Parameters vor der höchsten Ableitung spielt.

Von praktischer Bedeutung ist die für $\epsilon_0^2 \rightarrow 0$ verschwindende Momentenkombination

$$m_1 = M_1 - \eta^{-1} H_1 = D_{11} \epsilon_0^2 L \left(\frac{dU}{ds} \right) \quad (2.27)$$

Der Randteil der Lagrangeschen Variationsgleichung lautet für die symmetrisch belastete Rotationsschale

$$\delta \Pi_C = \int_C (N_1 \delta u + Q \delta w + H_1 \delta \alpha - M_1^+ \delta W) r d\theta$$

Indem wir hier einsetzen

$$\delta u = -\delta \Delta_r \sin \vartheta + \delta \Delta_z \cos \vartheta, \quad \delta w = \delta \Delta_r \cos \vartheta + \delta \Delta_z \sin \vartheta$$

(Δ_r, Δ_z – Radial- und Axialverschiebungen der Koordinatenfläche) und die Gl. (2.26) beachten, erhalten wir mit $\psi = -W + \eta\gamma$ und mit Rücksicht auf $\delta \Delta_z = 0$:

$$\delta \Pi_C = \int_C [N_r \delta \Delta_r + M_1 \delta \psi - m_1 \delta(\eta\gamma)] r d\theta$$

mit

$$N_r = -N_1 \sin \vartheta + Q \cos \vartheta = \frac{1}{r} V, \quad \Delta_r = r \epsilon_2 \approx \frac{B_{11}}{\Omega_0} r \frac{dV}{ds} \quad (2.28)$$

Aus (2.20) ergibt sich

$$V = -D_{11} R_2 [-\epsilon_0^2 L L(U) + L(U)]. \quad (2.29)$$

Aus $\delta \Pi_C = 0$ entnehmen wir folgende Zuordnung der statischen und kinematischen Größen in den Randbedingungen:

$$N_r \leftrightarrow \Delta_r \approx \frac{B_{11}}{\Omega_0} r \frac{dV}{ds}, \quad M_1 \leftrightarrow \psi = -[U - \epsilon_0^2 L(U)], \quad m_1 \leftrightarrow \eta\gamma = -\Omega_1 (1 - \vartheta) L(U) \quad (2.30)$$

Die Bedingungen bezüglich ($m_1, \eta\gamma$) werden konstruktiv durch *Stirnplatten* realisiert (vgl. [5]).

Setzt man für die Berechnung der Schale (die Randzonen ausgenommen) $\epsilon_0^2 \rightarrow 0$, so ergibt sich aus (2.22) und (2.30) das *vereinfachte Randwertproblem*

$$L L(U) - 2\omega^2 L(U) + k^4 U = 0 \quad (2.31)$$

mit den Randbedingungen:

$$N_r \leftrightarrow \Delta_r \approx \frac{B_{11}}{\Omega_0} r \frac{dV}{ds}, \quad M_1 \leftrightarrow \psi = -U \quad (2.32)$$

wobei $V = -D_{11} R_2 L(U)$.

Das vereinfachte Randwertproblem entspricht der Anwendung der Hypothese von Timoshenko auf den gesamten dreischichtigen Querschnitt. Die durch $\epsilon_0^2 \rightarrow 0$ bedingte Erniedrigung der Ordnung der lösenden Differentialgleichung um Zwei und der Fortfall einer Randbedingung an jedem Rand ist mechanisch durch die Ausschaltung eines Freiheitsgrades beim Übergang vom kinematischen Modell der gebrochenen Normalen zum Modell der geraden Normalen begründet.

3. Untersuchung der Randstörungseffekte

Für hinreichende steile Ränder der Rotationsschale kann $L(\cdot) \approx d^2/ds^2$ angenommen werden. Bei Verwendung der dimensionslosen Koordinate $x = \lambda s$ und der Parameter

$$\lambda = \sqrt{\frac{A}{2R_2}}, \quad \xi = \Omega_1 \lambda^2, \quad \epsilon^2 = \epsilon_0^2 \lambda^2 = \xi \vartheta \quad (3.1)$$

erscheint die lösende Differentialgleichung (2.22) in der Form (Striche bedeuten Ableitungen nach x):

$$-\epsilon^2 U^{VI} + U^{IV} - 4\xi U^{II} + 4U = 0$$

Der gleichen Differentialgleichung muß die durch $U = d\chi/ds$ eingeführte Hilfsfunktion $\chi(s)$ genügen, die man zweckmäßigerweise bei der Untersuchung der dreischichtigen *Kreiszyinderschale* verwendet:

$$L_c \chi \equiv -\epsilon^2 \chi^{VI} + \chi^{IV} - 4\xi \chi^{II} + 4\chi = h(x) \quad (3.2)$$

Bei der ausschließlichen Wirkung von Randkräften ist das Belastungsglied $h(x) = 0$ zu setzen.

Die zur Formulierung der Randbedingungen erforderlichen Größen sind

$$\begin{aligned}
 Q &= -D_{11} \lambda^3 (-\epsilon^2 \chi^V + \chi^{III}), & \Delta_r &= w = \chi - \xi \chi^{II}, \\
 M_1 &= -D_{11} \lambda^2 (-\epsilon^2 \chi^{IV} + \chi^{II}), & m_1 &= D_{11} \lambda^2 \epsilon^2 \chi^{IV}, \\
 \psi &= -\lambda(\chi^I - \epsilon^2 \chi^{III}), & \eta \gamma &= -\lambda \xi (1 - \vartheta) \chi^{III}.
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

Tabelle 1

Nr.	Lagerungsart		Randbedingungen	Randbedingungen für χ		Vereinfachte Randbed. \mathfrak{B}_0	
				$\mathfrak{B}_{0\epsilon}$	\mathfrak{B}_1		
1		Gelenkige Lagerung	ohne Stirnplatte	$w = 0$ $M_1 = 0$ $m_1 = 0$	$\chi = 0$ $\chi'' = 0$	$\chi = 0$	
2			mit Stirnplatte	$w = 0$ $M_1 = 0$ $\gamma = 0$	$\chi - \xi \chi'' = 0$ $\chi' - \epsilon^2 \chi''' = 0$	$\chi'' = 0$	$\chi'' = 0$
3		Starre Einspannung	ohne Stirnplatte	$w = 0$ $\psi = 0$ $m_1 = 0$	$\chi - \xi \chi'' = 0$ $\chi' - \epsilon^2 \chi''' = 0$	$\chi'' = 0$	$\chi - \xi \chi'' = 0$
4			mit Stirnplatte	$w = 0$ $\psi = 0$ $\gamma = 0$	$\chi - \xi \chi'' = 0$ $\chi' = 0$	$\chi'' = 0$	$\chi = 0$
5		Freier Rand	ohne Stirnplatte	$Q_1 = 0$ $M_1 = 0$ $m_1 = 0$	$\chi''' - \epsilon^2 \chi^V = 0$ $\chi'' = 0$	$\chi^{IV} = 0$	$\chi''' = 0$
6			mit Stirnplatte	$Q_1 = 0$ $M_1 = 0$ $\gamma = 0$	$\chi''' - \epsilon^2 \chi^V = 0$ $\chi'' - \epsilon^2 \chi^{IV} = 0$	$\chi''' = 0$	$\chi'' = 0$
7		Vertikal geführte Einspannung	ohne Stirnplatte	$Q_1 = 0$ $\psi = 0$ $m_1 = 0$	$\chi''' - \epsilon^2 \chi^V = 0$ $\chi' - \epsilon^2 \chi^{III} = 0$	$\chi^{IV} = 0$	$\chi''' = 0$
8			mit Stirnplatte	$Q_1 = 0$ $\psi = 0$ $\gamma = 0$	$\chi''' - \epsilon^2 \chi^V = 0$ $\chi' = 0$	$\chi''' = 0$	$\chi' = 0$

In der Tabelle 1 sind die homogenen Randbedingungen für 8 typische Fälle der Randlagerung zusammengestellt. Beim Übergang $\epsilon^2 \rightarrow 0$ entfallen die Randbedingungen \mathfrak{B}_1 vollständig und die gestörten Bedingungen $\mathfrak{B}_{0\epsilon}$ gehen in \mathfrak{B}_0 über. Dabei verschwindet der Unterschied zwischen den Randlagerungen mit und ohne Stirnplatte.

Das durch $\epsilon^2 \rightarrow 0$ vereinfachte Randwertproblem

$$L_0 \chi \equiv \chi^{IV} - 4\xi \chi^{II} + 4\chi = h(x) \quad \text{mit} \quad \mathfrak{B}_0 \tag{3.4}$$

beschreibt den *Randeffekt erster Art*, der sich aus der geometrischen Form der Schale ergibt und beim Übergang zur Platte (d. h. für $R \rightarrow \infty$) verschwindet. Die Lösung der Differentialgleichung (3.4) ist bekannt [3]. Wir schreiben die mit zunehmender Entfernung vom Rand $x = 0$ abklingende Lösung von (3.4) in der Form

$$\chi = y_0 = A_1^0 \theta(x) + B_1^0 \zeta(x) + y_{0p}, \tag{3.5}$$

wobei die Lösungsfunktionen $\theta(x)$, $\zeta(x)$ vom Vorzeichen des „Sandwichparameters“ ξ abhängen (vgl. Tabelle 2).

Durch den kleinen Parameter ϵ^2 vor der höchsten Ableitung des vollständigen Problems

$$L_\epsilon \chi \equiv -\epsilon^2 \chi^{VI} + L_0 \chi = h(x) \quad \text{mit} \quad \mathfrak{B}_\epsilon = \mathfrak{B}_{0\epsilon} + \mathfrak{B}_1 \tag{3.6}$$

wird ein *Randeffekt zweiter Art* beschrieben, der durch die Art des Querschnittsaufbaus bedingt ist und nur bei Berücksichtigung der Schubnachgiebigkeit der Kernschicht auftritt (er tritt auch bei dreischichtigen Platten auf, verschwindet aber für $G_{13}^3 \rightarrow \infty$).

Wenn die Lösung $\chi = y_0$ des vereinfachten Problems $L_0 \chi = h(x)$ mit \mathfrak{B}_0 bekannt ist, dann läßt sich nach Wischik/Lusterik [6] unter bestimmten Voraussetzungen für die Lösung des vollständigen Problems $L_\epsilon \chi = h(x)$ mit $\mathfrak{B}_\epsilon = \mathfrak{B}_{0\epsilon} + \mathfrak{B}_1$ eine asymptotische Näherungslösung finden. Diese Lösung besteht aus der Kombination zweier Iterationsprozesse:

Tabelle 2

1. *Iterationsprozeß*. Die Lösung $\chi = y_\epsilon(x)$ des vollständigen Problems (3.6) wird als Polynom nach Potenzen des Parameters ϵ konstruiert:

$$y_\epsilon = \sum_{i=0}^m \epsilon^i y_i(x) \quad (\epsilon < 1). \quad (3.7)$$

Lösungsfall	$\theta(x) =$	$\varphi(x) =$	Parameter
$\xi < 1$	$e^{-\alpha x} \cos \beta x$	$e^{-\alpha x} \sin \beta x$	$\alpha = \sqrt{1 + \xi}, \beta = \sqrt{1 - \xi}$
$\xi < 1$	$e^{-r_1 x}$	$e^{-r_2 x}$	$r_{1,2} = \sqrt{2\xi \pm 2\sqrt{\xi^2 - 1}}$
$\xi = 1$	$e^{-r x}$	$x e^{-r x}$	$r = \sqrt{2}$

Durch (3.7) werden die Differentialgleichung $L_\epsilon \chi = h(x)$ und die „gestörten“ Randbedingungen $\mathfrak{B}_0 \epsilon$ mit der Genauigkeit des Ansatzes erfüllt. Wir erhalten ein System von Differentialgleichungen für die Ansatzfunktionen $y_i(x)$. Auf der Stufe $i = 0$ ergibt sich die bereits bekannte Lösung $y_0(x)$ des Problems (3.4).

2. *Iterationsprozeß*. Zur Erfüllung der zusätzlichen Randbedingungen \mathfrak{B}_1 wird die sogenannte *Grenzschichtfunktion* benötigt, die für jeden Lagerungsfall gesondert zu konstruieren ist. Dazu wird im Randbereich die Maßstabsstreckung $x = \epsilon \cdot t$ eingeführt und die Grenzschichtfunktion mit $\bar{y}(x) = \bar{y}(\epsilon \cdot t) = u(t)$ bezeichnet. Sie wird als Teil der allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung $L_\epsilon \chi = 0$ bestimmt. Mit Rücksicht auf die Beziehung

$$\frac{d\bar{y}}{dx} = \epsilon^{-1} \frac{du}{dt} \quad \left(t = \frac{x}{\epsilon}\right) \quad (3.8)$$

erhalten wir aus (3.6) folgende Differentialgleichung für die Grenzschichtfunktion $u(t)$:

$$-u^{VI} + u^{IV} - \epsilon^2 \cdot 4\xi u^{II} + \epsilon^4 \cdot 4u = 0 \quad (3.9)$$

(durch Striche sind hier die Ableitungen nach t bezeichnet). Mit dem Ansatz

$$u(t) = \sum_{r=0}^n \epsilon^r u_r(t) \quad (3.10)$$

ergibt sich aus (3.9) durch Nullsetzen der Koeffizienten vor ϵ^r ein System von Differentialgleichungen für die Ansatzfunktionen $u_r(t)$.

Die Erfüllung der Randbedingungen erfolgt auf jeder Stufe des zweifachen Iterationsprozesses. Die vollständige Lösung ist dann durch $\chi_\epsilon = y_\epsilon(x) + \epsilon^k u(t)$ gegeben, wobei sich der Exponent k nach der Ordnung der höchsten Ableitung richtet, die in \mathfrak{B}_1 vorkommt.

Voraussetzung für die Anwendbarkeit dieser Methode ist die *reguläre* Entartung der Randwertaufgabe (3.6) in die Aufgabe (3.4). Das bedeutet, daß die aus (3.9) ablesbare „zusätzliche“ charakteristische Gleichung $Q_0(\lambda) \equiv -\lambda^6 + \lambda^4 = 0$ ebenso viele Wurzeln mit negativem Realteil haben muß, wie zusätzliche Bedingungen \mathfrak{B}_1 an dem betreffenden Rand vorliegen.

4. Zahlenbeispiel

Berechnet wurde eine durch konstanten Innendruck beanspruchte anisotrope dreischichtige GUP-Kreiszyinderschale für die Randlagerungsfälle 3 und 4 (Tabelle 1). Die nach der Methode des kleinen Parameters gefundene Lösung wird der exakten Lösung gegenübergestellt [1].

Vorgegebene Größen:

$$R = 120 \text{ cm}, h_1 = h_2 = 1,2 \text{ cm}, h_3 = 3,6 \text{ cm}$$

$$p = 500 \text{ N/cm}^2 \text{ (Innendruck)}$$

$$\text{Tragschichten: } E_1 = 1,75 \cdot 10^6 \text{ N/cm}^2, E_2 = 2,45 \cdot 10^6 \text{ N/cm}^2,$$

$$\nu_1 = 0,10, \nu_2 = 0,14$$

$$\text{Kernschicht: } E_1 = E_2 = 2,6 \cdot 10^4 \text{ N/cm}^2, \nu = 0,3,$$

$$G_{13} = E_1/2(1+\nu) = 1,0 \cdot 10^4 \text{ N/cm}^2.$$

Die für die Rechnung wesentlichen Konstruktionsparameter ergaben sich zu

$$\lambda = 0,04506 \text{ cm}^{-1}, \xi = 0,7848, \alpha = \sqrt{1 + \xi} = 1,3360,$$

$$\eta = 0,7359, \vartheta = 0,02079, \epsilon = 0,12775$$

Der Iterationsprozeß nach Wischik/Lusternik wurde bis zur Stufe ϵ^2 geführt.

In den Bildern 5 und 6 sind die Kurven der Funktionen $\bar{\chi}^{II}$, $\bar{\chi}^{III}$, $\bar{\chi}^{IV}$ nach der vollständigen Lösung den Funktionsverläufen nach der vereinfachten Theorie gegenübergestellt. Hierbei ist $\chi = \bar{\chi} w^0$ mit $w^0 = B_{11} \Omega_0^{-1} p R^2$.

5. Schlußfolgerungen

Ausgehend von der Lösung des Problems der dreischichtigen Schale mit momentenfreien Tragschichten (vereinfachte Theorie), die den Randeffekt erster Art bereits richtig beschreibt, gestattet die Methode des kleinen Parameters die näherungsweise Beschreibung des durch die Eigenbiegesteifigkeit der Tragschichten bedingten Randeffektes zweiter Art mit beliebig vorgegebener Genauigkeit. In entsprechendem Abstand vom Rand $s^{**} = \epsilon \cdot \pi/\lambda$ genügt die Lösung nach der vereinfachten Theorie zur Beschreibung der Randstörung, bei $s^* = \pi/\alpha\lambda$ ist auch diese abgeklungen.

Der Vorzug der Methode besteht darin, daß die in beiden Iterationsprozessen zu lösenden Differentialgleichungen sich jeweils nur durch ihre rechten Seiten unterscheiden, sodaß es bei der Durchführung der Iteration auf die schrittweise Bestimmung von Konstanten vor gleichen Lösungsfunktionen ankommt. Die Methode eignet sich daher besonders für die Anwendung der EDV.

Die Effizienz der Methode des kleinen Parameters kommt in all den Fällen voll zur Geltung, in denen die Grundlösung des Problems nach der vereinfachten Theorie bereits vorliegt und eine exakte Lösung des vollständigen Problems nicht möglich bzw. umständlich ist. Da es sich um eine *universelle Methode* handelt, die immer dann anwendbar ist, wenn der Übergang zu einem vereinfachten Deformationsmodell mit einer geringeren Zahl von Freiheitsgraden vollzogen wird, bleibt die Methode auch bei komplizierteren Fragestellungen, wie Berücksichtigung nichtlinearer Stoffgesetze, Anwendung der Viskoelastizitätstheorie auf die Kernschicht, Verallgemeinerung der Theorie auf vielschichtige Konstruktionen aktuell.

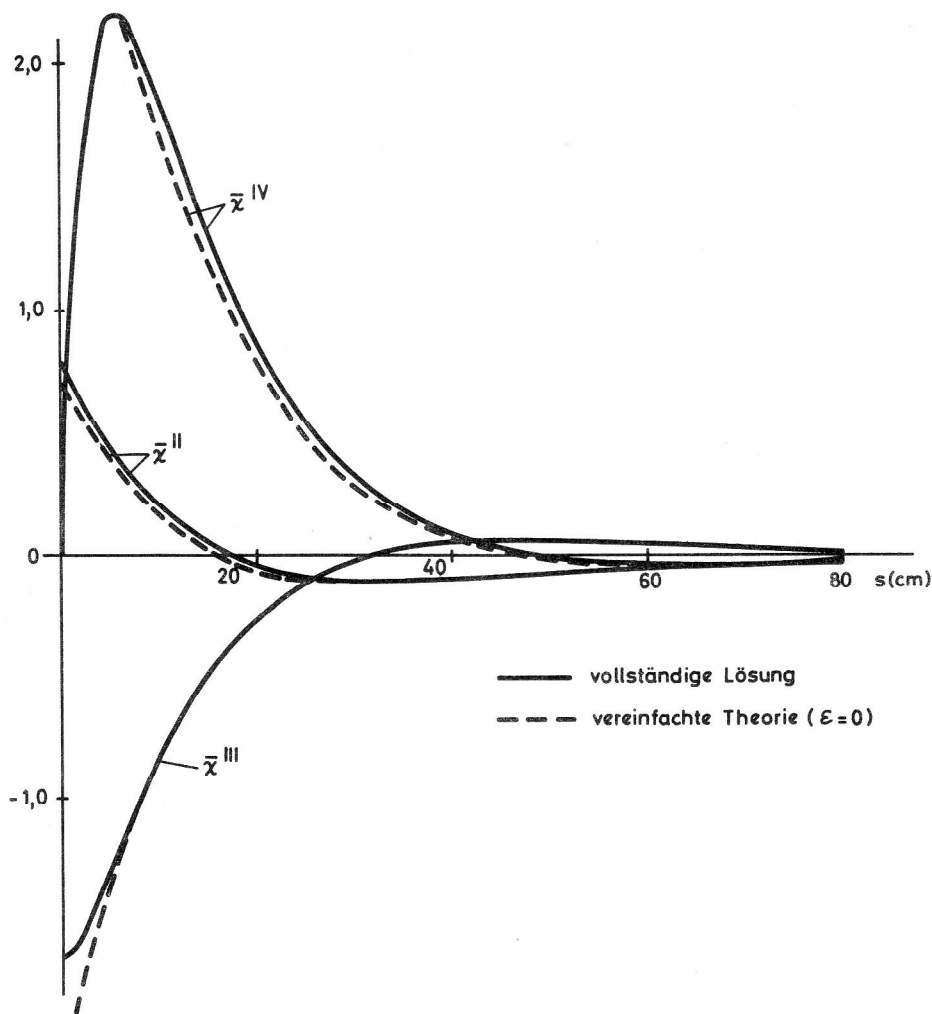


Bild 5
Vergleich der Randstörungen mit den Lösungen der vereinfachten Theorie (ohne Stirnplatte)

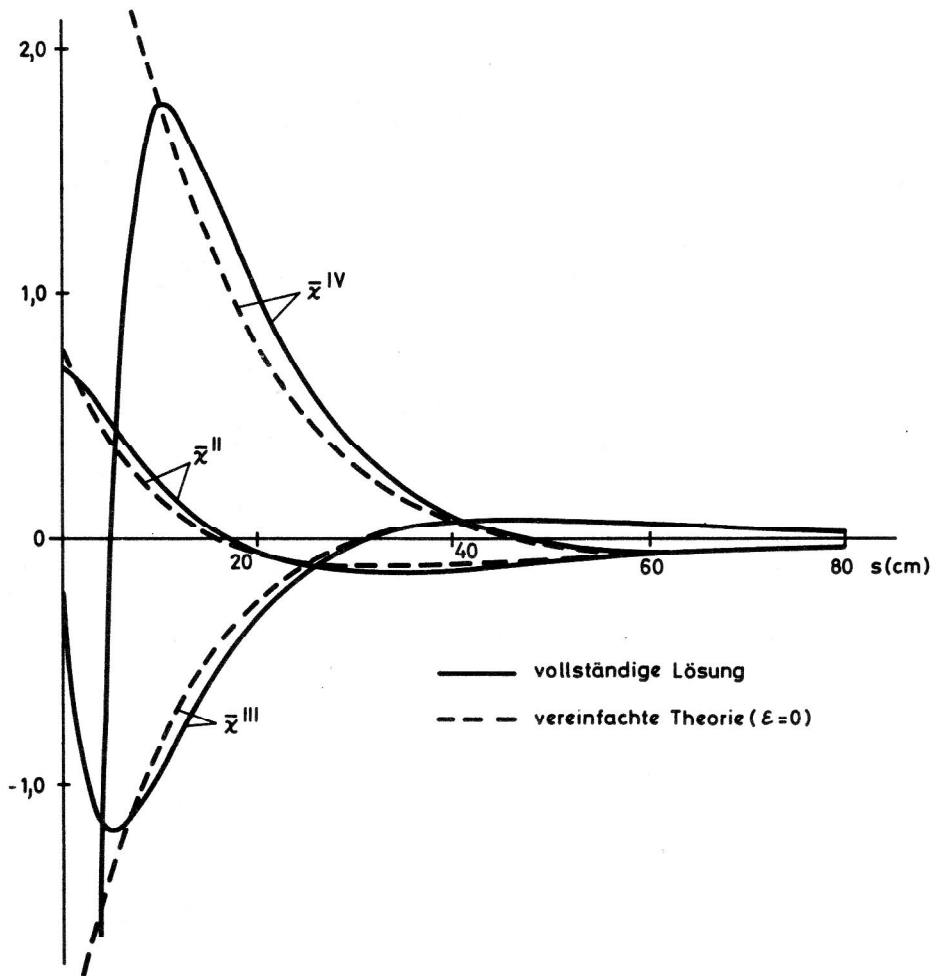


Bild 6
Vergleich der Randstörungen mit den Lösungen der vereinfachten Theorie (mit Stirnplatte)

LITERATUR

- [1] Duda, A.: Eine technische Theorie der dreischichtigen Flächentragwerke mit Anwendungen aus dem Bereich der symmetrisch belasteten Rotationsschalen und Kreisplatten. Diss. B, TU Dresden 1976.
- [2] Green, A.E., Zerna, W.: Theoretical Elasticity. 2nd Edition. Oxford at the Clarendon Press 1968.
- [3] Wlassow, W.S.: Dünnwandige elastische Stäbe. Bd. 1 2. VEB Verlag für Bauwesen, Berlin 1964.
- [4] Амбарцумян, С.А.: Общая теория анизотропных оболочек. Изд. Наука, Москва 1974.
- [5] Григорюк, Э.И.; Чулков, П.П.: Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. Москва 1973.
- [6] Вишик, М.И., Люстерник, Л.А.: Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. „Успехи матем. наук“, 1957, т. XII, вып. 5 (77).

Anschrift des Verfassers:

Dr. sc. techn. Albert Duda,
Ministerium für Bauwesen, 1026 Berlin, Scharrenstr. 2-3