

Behandlung doppelt gekrümmter Schalen mit der Methode der Finiten Elemente

H. Franeck, G. Kämmel und H.-G. Recke

Ausgehend von den Grundgleichungen der elastischen, homogenen, isotropen Schale wird die aus dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen folgende Variationsgleichung angegeben. Als Näherungsansätze für die Komponenten des Verschiebungsvektors innerhalb eines finiten Elementes finden Hermitesche Polynome Verwendung. Sie führen die Variationsgleichung in einen algebraischen Ausdruck über, aus dem ein lineares Gleichungssystem zur Berechnung der unbekanntenen Komponenten des Systemknotenvektors folgt. Spezielle Untersuchungen sind zur Berücksichtigung kinematischer Randbedingungen erforderlich. Das vorgestellte Schalenprogramm S1 ist so aufgebaut, daß sich durch Wahl bestimmter Schalenklassen eine Vielzahl technisch interessanter Tragwerke erfassen läßt. Eine Reihe von Beispielen demonstriert die Anwendungsbreite des Programmes.

1. Einleitung

Die Berechnung doppelt gekrümmter elastischer Schalen ist nur in relativ wenigen Fällen exakt möglich. Sowohl die oft komplizierte Geometrie als auch die Erfassung der vorgeschriebenen Belastungen und Randbedingungen zwingen zur Aufstellung von Näherungslösungen bei der elastizitätstheoretischen Untersuchung derartiger Probleme.

Die Methode der finiten Elemente kann zur numerischen Behandlung einer Variationsaufgabe benutzt werden. Bei Verwendung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen ergeben sich als Eulersche Gleichungen des entstehenden Variationsproblems die Gleichgewichtsbedingungen des Kontinuums, und die natürlichen Randbedingungen sind die statischen Randbedingungen.

In dem vorliegenden Beitrag wird ein auf der Grundlage der konsistenten Flüggeschen Schalentheorie [1], [2] entstandenes Schalenprogramm beschrieben. Der Einsatz gekrümmter Dreieckelemente garantiert eine gute Modellbildung und damit eine hohe Genauigkeit der Ergebnisse. Bei Benutzung von Polynomen als Ansatzfunktionen für die Verschiebungsfelder ist die Starrkörperverschiebung zwar nicht explizit in diesen enthalten, jedoch sichert ein genügend hoher Grad der Polynome eine hinreichende Konvergenzgeschwindigkeit. Die kinematischen Randbedingungen sind im Falle gekrümmter finiter Elemente im allgemeinen besser zu erfüllen.

Natürlich kann man die Vielfalt aller in der Technik vorkommenden Schalentypen nicht ohne weiteres mit einem Algorithmus behandeln, aber durch geschickte Wahl geeigneter Schalenklassen und Koordinatensysteme ist die Berechnung aller analytisch beschreibbaren Flächentragwerke möglich.

2. Grundgleichungen der Schalentheorie

In einem kartesischen Koordinatensystem kann jeder Punkt A der undeformierten Schalenmittelfläche (Bezugsfläche) durch den Ortsvektor

$$r^q(x^1, x^2) = \{r^{\bar{1}}(x^1, x^2), r^{\bar{2}}(x^1, x^2), r^{\bar{3}}(x^1, x^2)\} \quad (1)$$

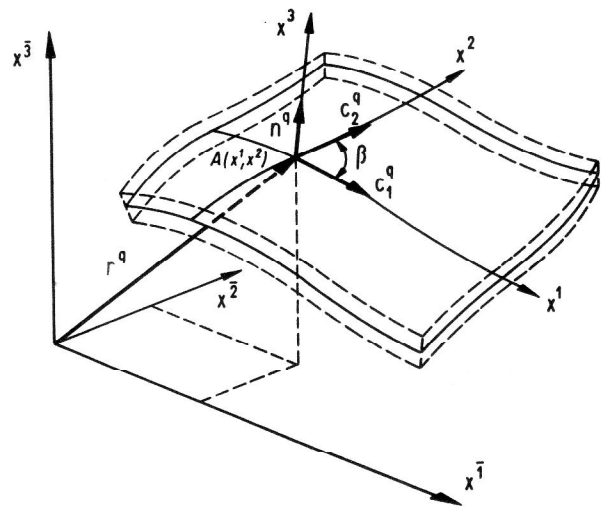


Bild 1
Beschreibung der Schalenmittelfläche

festgelegt werden (Bild 1). Dabei sind x^1, x^2 krummlinige Koordinaten, die auf der Schalenmittelfläche ein schiefwinkliges Koordinatensystem beschreiben.

Die nichtnormierten Tangentialvektoren

$$c_\alpha^q = \frac{\partial r^q}{\partial x^\alpha} = r^q_{|\alpha}; \quad q = \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}; \quad \alpha = 1, 2 \quad (2)$$

sind entlang der Koordinatenlinien $x^\alpha = \text{konst.}$ gerichtet und bilden in jedem Punkt A eine Tangentialebene, deren Normalenvektor

$$n^q = \epsilon^q_{pr} \epsilon^{\alpha\beta} c_\alpha^p c_\beta^r \quad (3)$$

in Richtung x^3 zeigt.

Aus den Beziehungen (2), (3) folgen die Komponenten $g_{\alpha\beta}$ der ersten Fundamentalform (Maßtensor), die Komponenten $b_{\alpha\beta}$ der zweiten Fundamentalform (Krümmungstensor) und die Komponenten $c_{\alpha\beta}$ der dritten Fundamentalform der Flächentheorie.

Mit dem Schalentensor

$$F_{\alpha}^{\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta} - x^3 b_{\alpha}^{\beta}; \quad F = \det F_{\alpha}^{\beta} = 1 - 2x^3 H + (x^3)^2 K \quad (4)$$

können aus den Komponenten $S^{\alpha\beta}$, $S^{\alpha 3}$ des Spannungstensors im Schalenraum der Längskrafttensor

$$n^{\alpha\beta} = \int_h F F_{\mu}^{\beta} S^{\alpha\mu} dx^3, \quad (5)$$

der Querkraftvektor

$$q^{\alpha} = \int_h F S^{\alpha 3} dx^3 \quad (6)$$

und der Momententensor

$$m^{\alpha\beta} = \int_h F F_{\mu}^{\beta} S^{\alpha\mu} x^3 dx^3 \quad (7)$$

gebildet werden. Für diese Größen lauten die Gleichgewichtsbedingungen an einem Schalenelement

$$\left. \begin{aligned} n^{\alpha\beta}|_{\alpha} - b_{\alpha}^{\beta} q^{\alpha} + \bar{p}^{\beta} &= 0, \\ q^{\alpha}|_{\alpha} + b_{\alpha\beta} n^{\alpha\beta} + \bar{p}^3 &= 0, \\ m^{\alpha\beta}|_{\alpha} - q^{\beta} &= 0, \\ \epsilon_{\alpha\beta} (n^{\alpha\beta} + b_{\mu}^{\beta} m^{\mu\alpha}) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\epsilon_{\alpha\beta} (n^{\alpha\beta} + b_{\mu}^{\beta} m^{\mu\alpha}) = 0. \quad (9)$$

Gl. (9) stellt das Momentengleichgewicht um die Schallennormale dar und kann zur Definition eines symmetrischen Tensors

$$\hat{n}^{\alpha\beta} = \hat{n}^{\beta\alpha} = n^{\alpha\beta} + b_{\mu}^{\beta} m^{\mu\alpha} \quad (10)$$

benutzt werden. Der symmetrische Anteil des Momententensors hat die Form

$$\hat{m}^{\alpha\beta} = \hat{m}^{\beta\alpha} = \frac{1}{2} (m^{\alpha\beta} + m^{\beta\alpha}). \quad (11)$$

Unter der Voraussetzung der Kirchhoffschen Hypothese ergibt sich der Verschiebungsvektor eines Punktes des Schalenraumes

$$V^q = v^q + x^3 w^q = (v^{\alpha} + x^3 w^{\alpha}) c_{\alpha}^q + v^3 n^q, \quad (12)$$

wobei v^q der Verschiebungsvektor der Bezugsfläche ist und

$$w^q = w^{\alpha} c_{\alpha}^q = - (b_{\beta}^{\alpha} v^{\beta} + v^3 |_{\alpha}) c_{\alpha}^q \quad (13)$$

bedeutet. Durch den Dehnungstensor

$$P_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (v_{\alpha}|_{\beta} + v_{\beta}|_{\alpha} - 2b_{\alpha\beta} v^3) \quad (14)$$

und den Verkrümmungstensor

$$q_{\alpha\beta} = -b_{\alpha\beta}|_{\lambda} v^{\lambda} - b_{\alpha\lambda} v^{\lambda}|_{\beta} - b_{\lambda\beta} v^{\lambda}|_{\alpha} + c_{\alpha\beta} v^3 - v^3 |_{\alpha\beta} \quad (15)$$

lassen sich die Komponenten des Deformationstensors

$$D_{\alpha\beta} = P_{\alpha\beta} + x^3 q_{\alpha\beta} - (x^3)^2 \left[b_{\alpha}^{\mu} b_{\beta}^{\lambda} P_{\mu\lambda} + \frac{1}{2} (b_{\alpha}^{\lambda} q_{\lambda\beta} + b_{\beta}^{\lambda} q_{\lambda\alpha}) \right] \quad (16)$$

$$D_{\alpha 3} = 0, \quad D_{33} = 0 \quad (17)$$

beschreiben. Die Stoffgleichungen des ebenen Spannungszustandes für ein homogenes, isotropes Medium sind

$$S^{\alpha\beta} = (F_{\nu}^{\alpha})^{-1} (F_{\rho}^{\beta})^{-1} (F_{\epsilon}^{\lambda})^{-1} (F_{\kappa}^{\mu})^{-1} a^{\nu\rho\epsilon\kappa} D_{\lambda\mu}, \quad (18)$$

$$\text{mit} \quad a^{\nu\rho\epsilon\kappa} = \frac{E}{2(1+\mu)} (g^{\nu\epsilon} g^{\rho\kappa} + g^{\nu\kappa} g^{\rho\epsilon} + \frac{2\mu}{1-\mu} g^{\nu\rho} g^{\epsilon\kappa}). \quad (19)$$

Setzt man die Gl. (18) in die Beziehungen (5), (7) ein, so folgt als Stoffgesetz für die Schnittgrößen

$$n^{\alpha\beta} = h a^{\alpha\beta\epsilon\rho} P_{\epsilon\rho} + \frac{h^3}{12} a^{\lambda\beta\epsilon\rho} D_{\lambda\rho} (q_{\epsilon\mu} + 2b_{\mu}^{\gamma} P_{\gamma\epsilon}), \quad (20)$$

$$m^{\alpha\beta} = \frac{h^3}{12} \left[a^{\alpha\beta\epsilon\mu} q_{\epsilon\mu} + a^{\lambda\beta\epsilon\mu} (\delta_{\lambda}^{\alpha} b_{\mu}^{\nu} + D_{\lambda\mu}^{\alpha\nu}) P_{\nu\epsilon} \right]. \quad (21)$$

Dabei gilt

$$D_{\lambda\rho}^{\alpha\mu} = \delta_{\lambda}^{\alpha} b_{\rho}^{\mu} + \delta_{\rho}^{\mu} b_{\lambda}^{\alpha} - \delta_{\lambda}^{\alpha} \delta_{\rho}^{\mu} b_{\nu}^{\nu}. \quad (22)$$

Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen führt auf die Variationsgleichung

$$\delta \Pi = \int_A (\hat{n}^{\alpha\beta} \delta P_{\alpha\beta} + \hat{m}^{\alpha\beta} \delta q_{\alpha\beta}) dA - \int_A (\bar{p}^{\alpha} \delta v_{\alpha} + \bar{p}^3 \delta v_3) dA - \int_C (\bar{N} \delta \tilde{u} + \bar{S} \delta \tilde{v} + \bar{Q} \delta \tilde{w} + \bar{B} \delta \tilde{\varphi}) ds = 0. \quad (23)$$

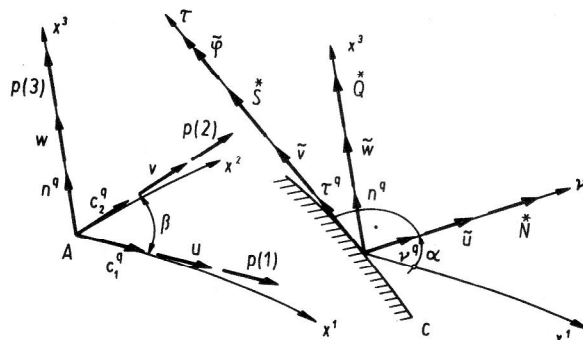


Bild 2
Definition statischer und kinematischer Größen

Das letzte Integral in Gl. (23) enthält die virtuellen Arbeiten der Randbelastungen, die sich aus den vorgeschriebenen Ersatzlinienkräften $\bar{N}, \bar{S}, \bar{Q}$ in Richtung der Achsen eines orthogonalen Randdreiecks (Bild 2) und dem Biegemoment \bar{B} um die Randtangente zusammensetzen. Die zugehörigen Randverformungen sind $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$ und $\tilde{\varphi}$.

Für die numerische Lösung ist eine Überführung der Variationsaufgabe (23) in Matrixschreibweise vorteilhaft. Unter Verwendung der Gln. (10), (11), (20), (21) kann man in Gl. (23) die Schnittgrößen eliminieren und anschließend mittels der Gln. (14), (15) den Dehnungstensor und den Verkrümmungstensor durch den physikalischen Verschiebungsvektor

$$\underline{v} = (v(1), v(2), v(3))^T = (u, v, w)^T \quad (24)$$

und dessen Ableitungen ausdrücken. Hierbei entstehen die von der Schalenengeometrie abhängige Elastizitätsmatrix \underline{C} und eine Differentiationsmatrix \underline{D} . Weiterhin werden benötigt:

Der Flächenlastvektor

$$\underline{\bar{p}} = (\bar{p}(1), \bar{p}(2), \bar{p}(3))^T, \quad (25)$$

der Randlastvektor

$$\underline{\bar{s}}_c = (\bar{N}, \bar{S}, \bar{Q})^T, \quad (26)$$

der Randverschiebungsvektor

$$\underline{v}_c = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})^T \quad (27)$$

und die Transformationsmatrix

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & \cos \beta & 0 \\ \cos \beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \cos \beta = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \quad (28)$$

Damit ergibt sich die Variationsgleichung

$$\begin{aligned} \delta \Pi = & \int_A \delta \underline{v}^T \underline{D}^T \underline{C} \underline{D} \underline{v} \, dA - \int_A \delta \underline{v}^T \underline{A} \underline{\bar{p}} \, dA - \\ & - \int_C \delta \underline{v}_c^T \underline{\bar{s}}_c \, ds - \int_C \delta \tilde{\varphi} \bar{B} \, ds = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

als Grundlage für die Lösung mittels der FEM.

3. Ansatz für den Verschiebungszustand

Aus der Variationsaufgabe folgen für die Tangentialverschiebungen u, v und die Normalverschiebung w unterschiedliche Stetigkeitsforderungen: Während u, v im gesamten Kontinuum stetig sein müssen, ist für w zusätzlich die Stetigkeit der ersten Ableitungen nach den Koordinaten x^α ; $\alpha = 1, 2$ zu gewährleisten. Daher kann man für die Tangentialverschiebungen andere Näherungsansätze wählen als für die Normalverschiebung. In

diesem Sinne sollen in einem Element ν die Verschiebungskomponenten \underline{u} und \underline{v} durch reduzierte Hermite Polynome dritten Grades und die Komponente \underline{w} durch ein reduziertes Hermite Polynom fünften Grades angenähert werden.

Dazu führt man in Dreieckkoordinaten die Variablenvektoren $\underline{\omega}_{10}(a_i, a_j, a_k)$ bzw. $\underline{\omega}_{21}(a_i, a_j, a_k)$ ein. Für ihre 10 bzw. 21 Komponenten $a_i^p a_j^q a_k^r$ gilt $3 = p + q + r$ bzw. $5 = p + q + r$.

Die Stützwerte der drei Ansatzfunktionen werden in dem Elementknotenvektor

$$\underline{z} = (\underline{z}_i, \underline{z}_j, \underline{z}_k)^T \quad (30)$$

zusammengefaßt, wobei der Knotenvektor am Knoten l

$$\underline{z}_l = (u_l, u_{l1}, u_{l2}, v_l, v_{l1}, v_{l2}, w_l, w_{l1}, w_{l2})^T; \quad (31)$$

$$l = 1, 2, \dots, m$$

lautet. Die verwendeten Ansatzfunktionen lassen sich damit in der Form

$$\left. \begin{aligned} \underline{u}(a_i, a_j, a_k) &= \underline{\omega}_{10}^T \underline{H}_u \underline{L} \underline{z}, \\ \underline{v}(a_i, a_j, a_k) &= \underline{\omega}_{10}^T \underline{H}_v \underline{L} \underline{z}, \\ \underline{w}(a_i, a_j, a_k) &= \underline{\omega}_{21}^T \underline{H}_w \underline{L} \underline{z} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

bzw. nach Gl. (24) zusammengefaßt

$$\underline{v}(a_i, a_j, a_k) = \underline{F}(a_i, a_j, a_k) \underline{L} \underline{z} \quad (33)$$

schreiben. Die Interpolationsmatrizen $\underline{H}_u, \underline{H}_v, \underline{H}_w$ und die Transformationsmatrix \underline{L} sind in [3] erklärt. Der in Gl. (29) benötigte Randverschiebungsvektor \underline{v}_c nach Gl. (27) folgt für ein Randstück $a_k = 0$ mit der Transformationsmatrix

$$\underline{L}(a_i, a_j, a_k = 0) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \cos(\beta - \alpha) & 0 \\ -\sin \alpha & \sin(\beta - \alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Big|_{a_k = 0} \quad (34)$$

zu

$$\underline{v}_c(a_i, a_j, a_k = 0) = \underline{L}^T \underline{F} \underline{L} \underline{z}, \quad (35)$$

während sich als Randverdrehung

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(a_i, a_j, a_k = 0) &= (-b_\beta^\alpha \nu_\alpha \nu^\beta, -b_\beta^\alpha \nu_\alpha \tau^\beta, \\ & - \frac{\partial}{\partial \nu}) \underline{v}_c = \underline{b}^T \underline{v}_c \end{aligned} \quad (36)$$

ergibt. Um die kinematischen Randbedingungen der Schalenmittelfläche formulieren zu können, ist der Randknotenvektor

$$\tilde{\underline{z}}_1 = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_1|_{\nu}, \tilde{u}_1|_{\tau}, \tilde{v}_1, \tilde{v}_1|_{\nu}, \tilde{v}_1|_{\tau}, \tilde{w}_1, \tilde{w}_1|_{\nu}, \tilde{w}_1|_{\tau}, \tilde{w}_1|_{\nu\nu}, \tilde{w}_1|_{\tau\tau}, \tilde{w}_1|_{\nu\tau})^T \quad (37)$$

erforderlich. Er hängt mit dem Knotenvektor \underline{z}_1 über die lineare Transformation [3]

$$\underline{z}_1 = \underline{T}_1 \tilde{\underline{z}}_1 \quad (38)$$

zusammen.

4. Algebraisierte Variationsgleichung

Die Näherungsansätze (32) gelten für alle n Elemente der vernetzten Schalenmittelfläche und führen die Variationsgleichung (29) in den algebraischen Ausdruck

$$\begin{aligned} \delta \Pi = & \sum_{\nu=1}^n \delta \underline{z}^{\nu T} \left(\underline{L}^{\nu T} \int_A \underline{F}^{\nu T} \underline{D}^{\nu T} \underline{C} \underline{D}^{\nu} \underline{F}^{\nu} dA \underline{L}^{\nu} \underline{z}^{\nu} - \right. \\ & - \underline{L}^{\nu T} \int_A \underline{F}^{\nu T} \underline{A}^{\nu} \underline{p}^{\nu} dA - \underline{L}^{\nu T} \int_C \underline{F}^{\nu T} \underline{T}^{\nu} \underline{s}_c^{\nu} ds - \\ & \left. - \underline{L}^{\nu T} \int_C \underline{F}^{\nu T} \underline{T}^{\nu} \underline{b}^{\nu} ds \right) \\ = & \delta \underline{z}^T (\underline{K} \underline{z} - \underline{r}) = 0 \end{aligned} \quad (39)$$

über. Dabei sind \underline{K} die Gesamtsteifigkeitsmatrix,

$$\underline{z} = (\underline{z}_1^T, \underline{z}_2^T, \dots, \underline{z}_m^T)^T \quad (40)$$

der Systemknotenvektor und \underline{r} der Belastungsvektor.

Nach Berücksichtigung der kinematischen Randbedingungen kann das lineare Gleichungssystem

$$\underline{K} \underline{z} = \underline{r} \quad (41)$$

gelöst werden. Die Elementsteifigkeitsmatrix

$$\underline{K}^{\nu} = \underline{L}^{\nu T} \int_A \underline{F}^{\nu T} \underline{D}^{\nu T} \underline{C} \underline{D}^{\nu} \underline{F}^{\nu} dA \underline{L}^{\nu} \quad (42)$$

enthält Submatrizen

$$\underline{K}_{ij}^{\nu} = \underline{L}_i^{\nu T} \int_A \underline{F}_i^{\nu T} \underline{D}_i^{\nu T} \underline{C} \underline{D}_j^{\nu} \underline{F}_j^{\nu} dA \underline{L}_j^{\nu} = \underline{L}_i^{\nu} \underline{L}_{ij}^{\nu} \underline{L}_j^{\nu}, \quad (43)$$

deren Integration numerisch erfolgen muß. Für den Aufbau der Systemmatrix \underline{K} ist es zweckmäßig, Untermatrizen

$$\underline{K}_i = \sum_{\nu} \left[\begin{array}{c|c|c|c} \underline{K}_{ii}^{\nu} & & & \\ \hline & \underline{K}_{ii+1}^{\nu} & & \\ \hline & & \dots & \\ \hline & & & \underline{K}_{im}^{\nu} \end{array} \right] \quad (44)$$

zu berechnen.

Die Einarbeitung der kinematischen Randbedingungen erfolgt durch Vorgabe bestimmter Komponenten des Randknotenvektors $\tilde{\underline{z}}_1$. Verlangt man eine kontinuierliche Erfüllung der Randbedingungen, so sind nicht nur die Knotenverschiebungen, sondern auch gewisse Ableitungen im Knoten vorzuschreiben. Das bedeutet z. B. im

Falle eines orthogonalen Koordinatensystems, in dem der Rand $a_k = 0$ mit einer Koordinatenlinie $x^\alpha = \text{konst.}$ zusammenfällt, daß für

$$\tilde{u}(a_i, a_j, a_k = 0) \equiv 0 : \tilde{u}_1 = \tilde{u}_1|_{\tau} = 0 \quad ; l = i, j,$$

$$\tilde{v}(a_i, a_j, a_k = 0) \equiv 0 : \tilde{v}_1 = \tilde{v}_1|_{\tau} = 0 \quad ; l = i, j,$$

$$\tilde{w}(a_i, a_j, a_k = 0) \equiv 0 : \tilde{w}_1 = \tilde{w}_1|_{\tau} = \tilde{w}_1|_{\tau\tau} = 0 \quad ; l = i, j,$$

$$\tilde{\varphi}(a_i, a_j, a_k = 0) \equiv 0 : \tilde{u}_1 = \tilde{u}_1|_{\tau} = 0,$$

$$\tilde{w}_1|_{\nu} = \tilde{w}_1|_{\nu\tau} = 0 \quad ; l = i, j$$

gelten müssen.

5. Schalenprogramm S1

Die in den vorangehenden Abschnitten dargestellten theoretischen Grundlagen zur näherungsweise Berechnung des Spannungs- und Verschiebungszustandes doppelt gekrümmter dünner elastischer Schalen sind in dem an der Bergakademie Freiberg, Sektion Maschinen- und Energietechnik, entwickelten Schalenprogramm S1 enthalten. Es gestattet die elastizitätstheoretische Untersuchung jeder Schale, deren Mittelfläche glatt und gemäß Gl. (1) bereichsweise durch analytische Funktionen bestimmt ist. Dabei kann man die Mehrzahl der in der Technik vorkommenden Schalenformen in sogenannten Schalenklassen zusammenfassen [4], so daß es möglich ist, durch Wahl freier Parameter die unterschiedlichsten Schalenformen, die im Sonderfall zu Scheiben bzw. Platten entarten, zu beschreiben.

In S1 sind zunächst drei universelle Schalenklassen vorgesehen, die jedoch im Bedarfsfalle vom Anwender leicht ergänzt werden können.

Die statische Belastung bildet den für Gl. (41) benötigten Belastungsvektor \underline{r} . Er enthält Anteile aus Einzellasten, Linienlasten, Linienmomenten und Flächenlasten, deren Eingabe besonders anwenderfreundlich gestaltet ist. Für die Erfüllung homogener, kinematischer Randbedingungen müssen Komponenten des Randknotenvektors $\tilde{\underline{z}}_1$ nach Gl. (37) Null gesetzt werden. Durch Angabe gewisser Integergrößen geschieht dies sowohl für kontinuierliche, als auch für punktweise Randabstützungen. Der vorgeschriebene Randverschiebungsvektor kann dabei entweder in dem allgemeinen Koordinatensystem x^α ; $\alpha = 1, 2$ oder in dem kartesischen Koordinatensystem x^q ; $q = \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$ gegeben sein (Bild 1). Bei der Berechnung der Steifigkeitsmatrix entsprechend Gl. (43) wird isotropes und homogenes Materialverhalten vorausgesetzt. Die Schalendicke darf innerhalb eines Dreieckselementes linear veränderlich und zwischen zwei Elementen unstetig sein.

Das EDV-Programm wurde für die Anlage BESM-6 erarbeitet.

Seine Kapazitätsschranken sind:

Anzahl der Knotenpunkte	500,
Anzahl der Elemente	800,
max. Knotennummer-Differenz am Element	49.

6. Anwendungen

Einige Beispiele sollen die Anwendungsbreite des besprochenen Programms demonstrieren. Bild 3 zeigt eine Wendelfläche, deren Mittelfläche allgemein durch

$$r^q = \left\{ (a_0 + a_1 x^1) \cos x^2, (a_0 + a_1 x^1) \sin x^2, b_2 x^2 \right\} \quad (45)$$

bestimmt ist. Für konstante Wandstärke und eine entgegen der x^3 -Achse gerichtete konstante Flächenbelastung p^3 werden die Verschiebungen und Schnittgrößen ermittelt. Am Rand $x^2 = 0$ ist eine Einspannung verwirklicht, während am Rand $x^2 = \pi$ zwei Pendelstützen vorgesehen sind.

Bei der in Bild 4 dargestellten Kuppelschale genügt es, wegen der vorhandenen Symmetrieachsen die Vernetzung auf ein Viertel der Schalenfläche zu beschränken. Diese liegt in der Form

$$r^q = \left\{ e_1 x^1, f_1 x^2, c_0 + c_3 x^1 x^1 + c_5 x^2 x^2 \right\} \quad (46)$$

vor. Die freien Ränder $x^1 = \text{konst.}$ und $x^2 = \text{konst.}$ fallen mit den Koordinatenlinien des schiefwinkligen x^1, x^2 -Systems zusammen. Die kinematischen Rand-

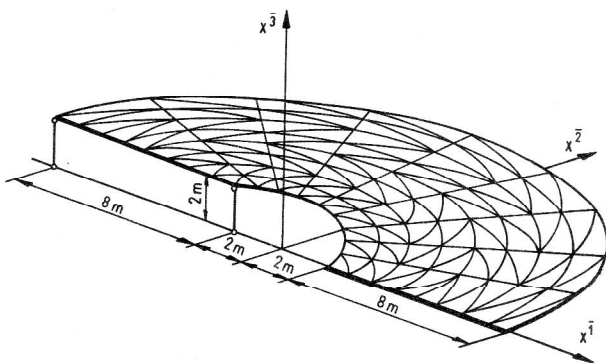


Bild 3
Wendelfläche

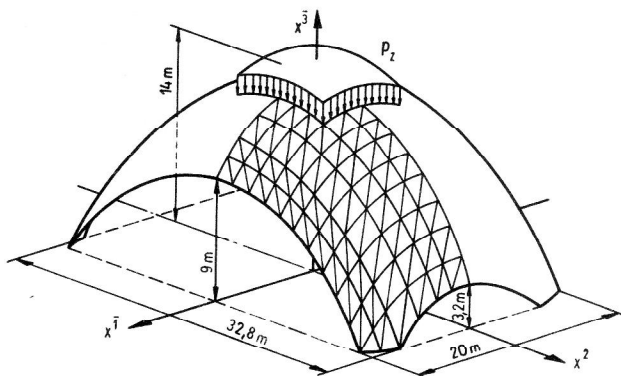


Bild 4
Kuppelschale

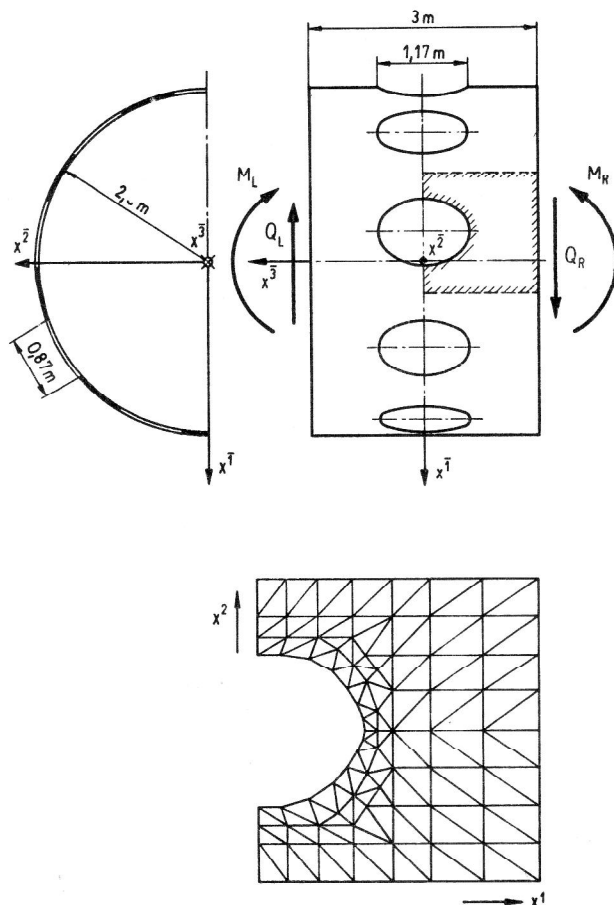


Bild 5
Gelochte Kreiszyklinderschale

bedingungen an den Symmetrierändern lassen sich kontinuierlich erfüllen, die Abstützungen in der Grundrissebene jedoch nur punktwise.

Eine durch eine Gleichgewichtsgruppe beanspruchte Kreiszyklinderschale mit neun gleichmäßig über den Umfang verteilten elliptischen Löchern (Bild 5) läßt sich durch den Ortsvektor

$$r^q = \left\{ a_0 \cos x^2, a_0 \sin x^2, b_1 x^1 \right\} \quad (47)$$

beschreiben. Die Biegemomente M_L, M_R und die Querkräfte Q_L, Q_R werden durch Linienlasten \bar{N} und \bar{S} entlang der Schalenränder realisiert. Es ist zweckmäßig, die Belastung in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Lastfall aufzuspalten, so daß die Vernetzung auf ein Viertel der Gesamtfläche beschränkt bleibt. Dabei kann die in Bild 5 gezeigte Elemententeilung wiederholt verwendet werden.

Ebenfalls durch Gl. (47) ist die Mittelfläche einer Kreiszyklinderschale mit veränderlicher Wandstärke bestimmt (Bild 6). Die konstante Flächenbelastung p^1 wirkt entgegen der x^1 -Achse. Es genügt, die Hälfte der Schale zu vernetzen, da die Linie $x^2 = 0$ eine Symmetrielinie ist. Die kontinuierliche Einspannung des Schalenfußes bei

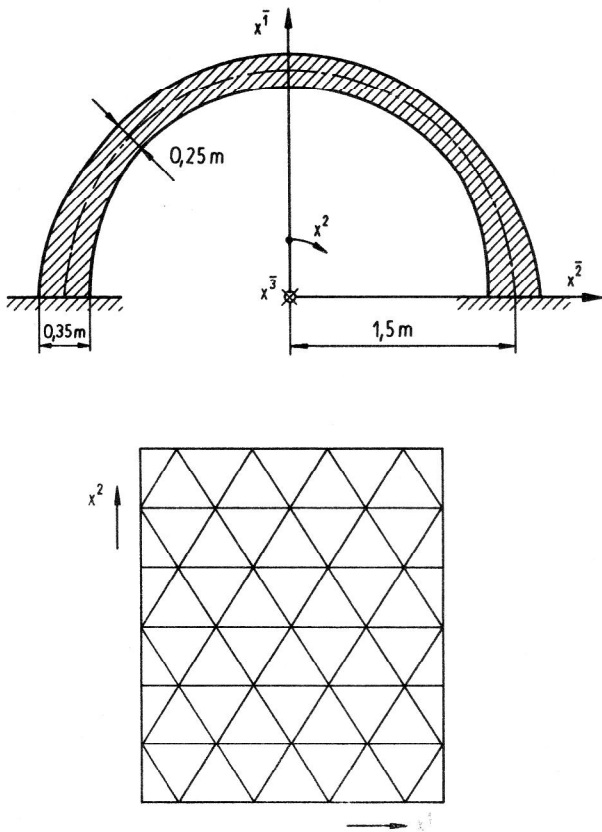


Bild 6
Kreiszylinderschale mit veränderlicher Wandstärke

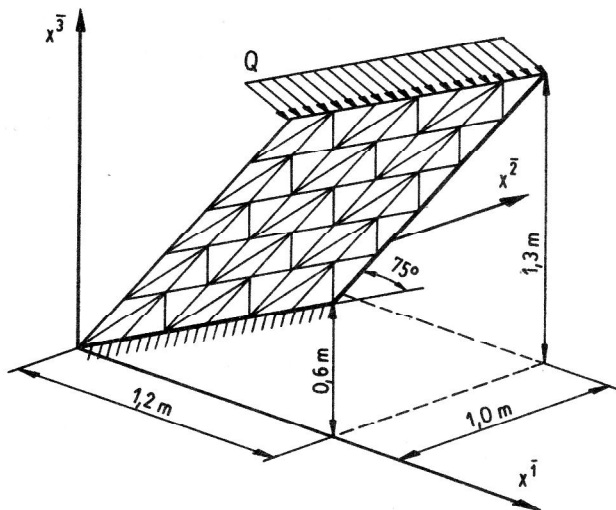


Bild 7
Schiefe Platte

$x^2 = \frac{\pi}{2}$ führt zu einer Stützung, die den Einfluß der variablen Wandstärke auf den Verlauf der Schnittgrößen besonders deutlich zum Ausdruck bringt.

Im letzten Beispiel wird als Sonderfall der doppelt gekrümmten Schale eine einseitig eingespannte schiefe Platte unter Querkraftbeanspruchung gezeigt (Bild 7).

Die Plattenmittelfläche folgt aus der gleichen Schalenklasse, in der auch die Kuppelschale (Gl. (46)) enthalten ist, zu

$$r^q = \left\{ e_1 x^1, f_1 x^2, c_1 x^1 + c_2 x^2 \right\}. \quad (48)$$

Infolge des Verschwindens der zweiten Fundamentform (Krümmungstensor) entkoppelt sich das System der Grundgleichungen, so daß bei der gewählten Belastung die Tangentialverschiebungen u, v identisch Null werden.

7. Zusammenfassung

Ausgehend von den Grundgleichungen der elastischen, homogenen, isotropen Schale wird die aus dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen folgende Variationsgleichung angegeben. Als Näherungsansätze für die Komponenten des Verschiebungsvektors innerhalb eines finiten Elementes finden Hermitesche Polynome Verwendung. Sie führen die Variationsgleichung in einen algebraischen Ausdruck über, aus dem ein lineares Gleichungssystem zur Berechnung der unbekanntenen Komponenten des Systemknotenvektors folgt. Spezielle Untersuchungen sind zur Berücksichtigung kinematischer Randbedingungen erforderlich. Das vorgestellte Schalenprogramm S1 ist so aufgebaut, daß sich durch Wahl bestimmter Schalenklassen eine Vielzahl technisch interessanter Tragwerke erfassen läßt. Eine Reihe von Beispielen demonstriert die Anwendungsbreite des Programmes.

LITERATUR

- [1] Neuber, H.: Allgemeine Schalentheorie. ZAMM (29)1949, S. 97 – 108, S. 142 – 146.
- [2] Krätzig, W.B.: Optimale Schalengrundgleichungen und deren Leistungsfähigkeit. ZAMM (54)1974, S. 265 – 276.
- [3] Franeck, H.: Ermittlung des Spannungs- und Verschiebungszustandes doppelt gekrümmter elastischer Schalen mit Hilfe der FEM. Freiburger Forschungsheft A627 (1980).
- [4] Franeck, H., Recke, H.-G.: Beschreibung und Vernetzung von Flächentragwerken. Maschinenbautechnik 88(1979), S. 175 – 177.

Anschrift der Verfasser:

Doz. Dr. rer. nat. habil. H. Franeck,
Prof. Dr. rer. nat. habil. G. Kämmler,
Dr. sc. techn. H.-G. Recke,
Bergakademie Freiberg, Sektion
Maschinen- und Energietechnik
9200 Freiberg, Lampadiusstr. 4