

Plastizitätstheoretische Untersuchungen von Umformvorgängen mit der Methode der Finiten Elemente

Hubert Günther, Klaus Drey und Wolfgang Strobel

Die plastizitätstheoretische Untersuchung von Umformvorgängen verlangt die Einbeziehung geometrischer und physikalischer Nichtlinearitäten in die kontinuumsmechanische Betrachtung, wenn gegenüber den bekannten Lösungsmethoden der Umformtechnik und Plastizitätstheorie qualitative Verbesserungen in den Ergebnissen erzielt werden sollen.

Auf der Grundlage der Lagrangeschen Betrachtungsweise wird ein Lösungsweg dargestellt, in dem die inkrementelle Lösungsmethode mit einem Iterationsverfahren kombiniert wurde.

Das entwickelte Rechenprogramm auf der Basis der Methode der finiten Elemente ermöglicht die Untersuchung ebener und axialsymmetrischer Umformprobleme; es werden entsprechende lineare und isoparametrische Dreieck-Elemente benutzt.

Als Beispiele sind in der Arbeit einige Ergebnisse für das axialsymmetrische Stauchen zwischen rauen, ebenen Platten und das Rückwärtsfließpressen, wie Ausweitung des plastischen Gebietes, Spannungsverteilung und Formänderungsgeometrie, angegeben.

0. Einleitung

In der technologischen Praxis werden verfahrenstechnische Untersuchungen oft auf empirisch-experimentellem Wege durchgeführt. Das führt für die Gestaltung brauchbarer Werkstückzwischen- und -endformen und der entsprechenden Werkzeuge zu einem teilweise erheblichen Versuchs- und Kostenaufwand. An einer theoretischen Untersuchung der Umform- und Zerteilvorgänge wird deshalb seit geraumer Zeit intensiv gearbeitet. Eine wichtige Rolle dabei spielt die theoretische und experimentelle Ermittlung des Spannungs- und Deformationszustandes, weil damit Aussagen über

den Kraft- und Arbeitsbedarf der Maschinen (Projektierung, Maschinenbelegung)

Spannungs- und Deformationskonzentrationen im Werkstück (Bruch, Grenzformänderungen) und

die technologisch bedingten Eigenspannungszustände getroffen werden können.

Mit den Randkräften des Werkstückes sind die Belastungen der Werkzeuge gegeben. Auch hier sind Gebiete der Spannungskonzentration infolge realer Belastungen für Verschleißuntersuchungen (Werkzeugstandzeiten) von großem praktischem Wert. Dazu wurden in der Vergangenheit einige rechnerische Verfahren auf der Grundlage mehr oder weniger einfacher theoretischer Modelle entwickelt. In der sogen. elementaren Theorie [1], [2] werden starke Vereinfachungen der Kinematik des Umformvorganges vorgenommen (reine Dehnungen oder Gleitungen), die auf ebene Streifenmodelle oder axialsymmetrische Röhren- bzw. Scheibenmodelle führen. Eine Berücksichtigung von Geschwindigkeit und Temperatureinflüssen ist relativ einfach möglich. Der Zusammenhang mit dem Schrankenverfahren der Plastizitätstheorie ist erkannt [3]. Diese Methoden werden in der Umformtechnik bevorzugt benutzt. Sie ergeben für integrale Größen, z. B. den Kraft- und Arbeitsbedarf, brauchbare Ergebnisse für die Praxis, aber in lokalen Bereichen können sie zu erheblichen Ungenauigkeiten führen.

Für ebene Formänderungsvorgänge, z. B. Walzen und Biegen mit großen Breiten, Schmieden von Langformen,

wird häufig die „Gleitlinienmethode“ verwendet. Mathematisch stellt sie ein Charakteristikenverfahren für hyperbolische Differentialgleichungen dar, dessen ingenieurmäßige Aufbereitung [1], [4], [5] zur numerischen oder graphischen Konstruktion des Gleitlinienfeldes und des zugehörigen Hodographen zu einer wirkungsvollen Methode entwickelt wurde. Leider ist für die axialsymmetrische Umformung, z. B. beim Draht- und Rohrziehen, Fließ- und Strangpressen usw., kein solcher relativ einfacher theoretischer Zugang möglich. Nur für sogen. vollplastische Zustände und kinematisch bestimmte Probleme liegen Lösungen vor. Oft werden deshalb in der Praxis Gleitlinienlösungen auf axialsymmetrische Probleme „übertragen“. Der Fehler kann dabei beträchtlich werden [6].

Obwohl an der Weiterentwicklung der o. a. Verfahren gearbeitet wird, wurden in der letzten Zeit die Bemühungen verstärkt, die Finite-Element-Methode auf Probleme der Umform- und Zerteiltechnik anzuwenden. Oft beschränkte man sich dabei auf elastisch-plastische Anlaufvorgänge [7], oder es wurden andere spezielle Annahmen getroffen [8]. Auf der Grundlage einer Theorie endlicher elastisch-plastischer Deformationen wurden in den letzten Jahren einige Lösungsverfahren auf der Grundlage der Methode der finiten Elemente entwickelt [9] bis [12] und u. a. auf technologische Probleme angewendet.

1. Grundgleichungen

In dieser Arbeit wird zur Lösung der geometrisch und physikalisch nichtlinearen Problemstellung ein inkrementelles Lösungsverfahren verwendet.

Die Beziehungen werden in Lagrangescher Betrachtungsweise dargestellt, d. h. alle Größen werden auf die als unabhängige Variable gewählten, allgemein krummlinigen, konvektiven Koordinaten X^k des undeformierten Ausgangszustandes bezogen. Der Verzerrungszustand wird somit eindeutig durch die Änderung des metrischen Fundamentaltensor des körperfesten Koordinatensystems beschrieben. Inkremente werden durch Diffe-

rentiation nach dem zeitähnlichen Parameter t durch $(\dot{})$ bezeichnet. Es sollen nur isotherme Deformationsprozesse betrachtet werden und das Materialverhalten wird als nicht geschwindigkeitsempfindlich angenommen. Weitere Bezeichnungen sind aus Bild 1 zu entnehmen.

Der kovariante metrische Fundamentaltensor im deformierten Zustand ist

$$g_{ij} = \left(\delta_i^k + u_{;i}^k \right) \left(G_{jk} + u_{k;j} \right) \quad (1)$$

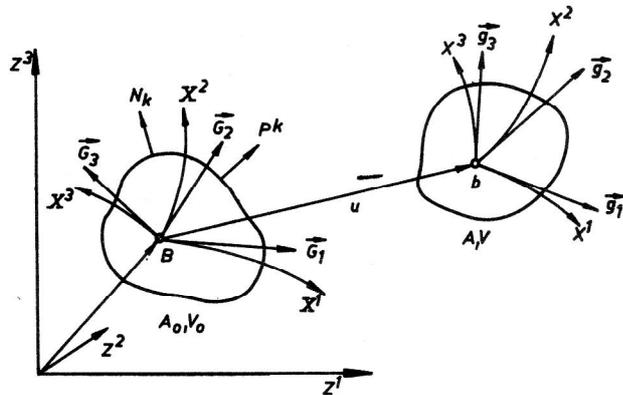


Bild 1
Formänderungsgeometrie

Hierbei bedeutet das Semikolon kovariante Differentiation und δ_i^k stellt den Kroneckertensor dar [13]. Damit ergibt sich der Greensche Verzerrungstensor und dessen Geschwindigkeit zu:

$$2 E_{ij} = g_{ij} - G_{ij} = u_{;ij} + u_{j;i} + u_{k;i} u^k_{;j} \quad (2)$$

bzw.

$$2 \dot{E}_{ij} = \dot{g}_{ij} = \dot{u}_{;ij} + \dot{u}_{j;i} + 2 \dot{u}_{k;i} u^k_{;j} \quad (3)$$

Der Cauchysche Spannungstensor σ_{ij} („wahre Spannung“) wird aus dem Bezug des Spannungsvektors auf das deformierte Flächenelement dA gebildet. Er ist mit dem ebenfalls symmetrischen Kirchhoffschen (2. Piola-Kirchhoffschen) Spannungstensor T_{ij} durch die Beziehung [14]

$$T_{ij} = J \sigma_{ij} \quad (4)$$

verbunden. Dabei ist mit den Volumenelementen dV , dV_0 und Dichten ρ , ρ_0 sowie $g = \det(g_{ij})$, $G = \det(G_{ij})$

$$J = \frac{dV}{dV_0} = \sqrt{\frac{g}{G}} = \frac{\rho_0}{\rho} \quad (5)$$

Geht man davon aus, daß ein Gleichgewichtszustand $T_{ij}(X^k)$ und ein kinematisch zulässiger Verzerrungszustand $E_{ij}(X^k)$ infolge einer Flächenkraft (pro Flächeneinheit im undeformierten Zustand)

$$p^k = \left(T^{ki} + T^{ij} u^k_{;j} \right) N_i$$

besteht, dann erhält man die inkrementelle Gleichgewichtsbedingung [14] (ohne Massenkkräfte)

$$\left(\dot{T}^{ik} + \dot{T}^{ij} u^k_{;j} + T^{ij} \dot{u}^k_{;j} \right)_{;i} = 0 \quad (6)$$

und die inkrementelle Änderung der Flächenkraft

$$\dot{p}^k = \left(\dot{T}^{ki} + \dot{T}^{ij} u^k_{;j} + T^{ij} \dot{u}^k_{;j} \right) N_i \quad (7)$$

2. Virtuelle Arbeit, Steifigkeitsmatrix

Die Multiplikation der inkrementellen Gleichgewichtsbeziehung (6) mit einer virtuellen Verschiebung δu^k und Integration über V_0 ergibt unter Verwendung des Gausschen Integralsatzes folgenden Ausdruck für die virtuelle Arbeit

$$\int_{V_0} \left(\dot{T}^{ij} \delta E_{ij} + T^{ij} \dot{u}_{k;i} \delta u^k_{;j} \right) dV_0 = \int_{A_0} \dot{P}^i \delta u_i dA_0 \quad (8)$$

der für die Stoffgleichungen der Form

$$\dot{T}^{ij} = D^{ijkl} \dot{E}_{kl} \quad (9.1)$$

und der Bedingung

$$D^{ijkl} = D^{klij} \quad (9.2)$$

sowie für richtungstreue Oberflächenkräfte sich in das Funktional für \dot{U}^k [10]

$$I(\dot{u}^k) = \frac{1}{2} \int_{V_0} \left(\dot{T}^{ij} \dot{E}_{ij} + T^{ij} \dot{u}_{k;i} \dot{u}^k_{;j} \right) dV_0 - \int_{A_0} \dot{P}^i \dot{u}_i dA_0 \quad (10)$$

$$I(\dot{u}^k) = \frac{1}{2} \int_{V_0} \left(\dot{T}^{ij} \dot{E}_{ij} + T^{ij} \dot{u}_{k;i} \dot{u}^k_{;j} \right) dV_0 - \int_{A_0} \dot{P}^i \dot{u}_i dA_0$$

überführen läßt.

Für alle kinematisch zulässigen Variationen des Verschiebungsgeschwindigkeitsfeldes wird für das aktuelle Verschiebungsgeschwindigkeitsfeld

$$\delta I(\dot{u}^k) = 0 \quad (11)$$

Die Gleichungen (10) und (11) bzw. (8) bilden den Ausgangspunkt für die FEM-Formulierung des Problems. So ergibt sich mit (9) aus (10) und (11)

$$\begin{aligned} & \int_{V_0} \left[D^{ijkl} \dot{E}_{kl} \delta \dot{E}_{ij} + \frac{1}{2} T^{ij} \delta \left(\dot{u}_{k;i} \dot{u}^k_{;j} \right) \right] dV_0 \\ & = \int_{A_0} \dot{P}^i \delta \dot{u}_i dA_0 \end{aligned} \quad (12)$$

Wird diese Gleichung in Matrixschreibweise unter Verwendung der von Zienkiewicz [15] benutzten Bezeichnungen, z. B.

$$\delta \dot{E}_{ij} = \bar{B} \delta \dot{u} = (B_0 + B_L) \delta \dot{u}$$

dargestellt, erhält man schließlich

$$\delta \dot{u}^T \left\{ [K_0 + K_L + K_\sigma] \dot{u} - \dot{P} = 0 \right\} \quad (13)$$

Daraus folgt

$$[K_0 + K_L + K_\sigma] \dot{u} = K \dot{u} = \dot{P}, \quad (14.1)$$

wobei K die Gesamtsteifigkeitsmatrix darstellt und

$$K_0 = \int_{V_0} B_0^T D B_0 dV_0 \quad (14.2)$$

$$K_L = \int_{V_0} (B_0^T D B_L + B_L^T D B_L + B_L^T D B_0) dV_0 \quad (14.3)$$

$$K_\sigma = \int_{V_0} \delta B_L^T T dV_0 = \int_{V_0} \bar{G}^T M \bar{G} dV_0 \quad (14.4)$$

bedeuten.

3. Stoffgleichungen

Eine zentrale Bedeutung bei der Formulierung inkrementeller Stoffgleichungen für endliche Deformationen besitzt die Verwendung zweckmäßiger Definitionen für die Spannungsgeschwindigkeit infolge ihrer notwendigen Indifferenz gegen Drehung des Bezugssystems. Wird die Jaumannsche Spannungsgeschwindigkeit (*) des Cauchy'schen Spannungstensors als tensorlineare Funktion des Deformationsgeschwindigkeitstensors d_{kl}

$$\dot{\sigma}^{*ij} = \bar{D}^{ijkl} d_{kl} \quad (15)$$

angesetzt, wobei \bar{D}^{ijkl} sich aus den elastischen und plastischen Materialeigenschaften bestimmen läßt, so führt das letztlich auf nichtsymmetrische Steifigkeitsmatrizen [16]. Um das zu vermeiden, wird näherungsweise isochore Deformation d. h. inkompressibles Materialverhalten angenommen.

Im plastischen Materialbereich trifft das für viele Metalle zu, und da die elastischen kompressiblen Volumenänderungen klein sind, können diese ebenfalls vernachlässigt werden, d. h. es ist

$$J = \frac{dV}{dV_0} \simeq 1; \dot{J} = 0$$

und aus (4) folgt somit

$$T^{ij} \simeq \sigma^{ij}, \quad (16)$$

so daß sich (15) in die Form

$$\dot{T}^{ij} = \bar{D}^{ijkl} \dot{E}_{kl} \quad (17)$$

bringen läßt. Des weiteren ergibt sich für die Jaumannsche Spannungsgeschwindigkeit des Kirchhoffschen Spannungstensors folgende Beziehung:

$$\dot{T}^{*ij} = \dot{T}^{ij} + \dot{E}_{kl} (T^{ik} g^{jl} + T^{jk} g^{il}). \quad (18)$$

Daraus erhält man schließlich mit (17) die Stoffgleichung in der Form (9.1) zu

$$\dot{T}^{ij} = [\bar{D}^{ijkl} - (T^{ik} g^{jl} + T^{jk} g^{il})] \dot{E}_{kl} = D^{ijkl} \dot{E}_{kl}, \quad (19)$$

welche die Forderung (9.2) erfüllt.

Die \bar{D}^{ijkl} müssen experimentell bestimmt werden. Sie bieten genügend Möglichkeiten der Anpassung an reales Materialverhalten, wie Anfangs- und Deformationsanisotropie, Inhomogenität usw. Die Schwierigkeit liegt zur Zeit nicht so sehr in der rechtechnischen Beherrschung solchen realen Materialverhaltens als in dessen experimenteller Bestimmung [17].

4. Programmaufbau

Die gleichzeitige Berücksichtigung geometrischer und physikalischer Nichtlinearitäten erforderte eine wesentliche Erweiterung bisher nutzbarer Programme. Damit ist u. a. die Notwendigkeit einer effektiven Datenverwaltung verbunden.

Bei dem hier verwirklichten Lösungsverfahren mit schrittweiser Lasterhöhung bzw. Vergrößerung vorgegebener Verschiebungen werden die nichtlinearen Ausdrücke in erster Näherung aus den Ergebnissen des vorhergehenden Lastschrittes gewonnen. Um eine ausreichende Rechengenauigkeit zu erhalten, hat sich die Vektoriteration innerhalb eines Lastschrittes bewährt. Als Iterationskriterium wird die Veränderung der Umformkraft verwendet, da in sie alle Einflüsse des Verfahrens, der Geometrie und des Werkstoffmodells eingehen. Die Frage nach der Erfüllung des Fließkriteriums wird innerhalb eines Lastschrittes gestellt. Davon unabhängig verläuft die beschriebene Iteration.

Das Flußbild (schematisch) läßt die Realisierung des Verfahrens erkennen (Bild 2).

5. Anwendung auf axialsymmetrische Umformprobleme

Für die Untersuchung praktischer Beispiele wurde zunächst ein für die Belange endlicher Formänderungen modifizierte Form der Spannungs-Formänderungs-Beziehung von Prandtl-Reuss entsprechend Gl. (17) benutzt [18]:

$$\dot{T}^{*ij} = \frac{E}{1+\nu} [(g^{ik} g^{jl} + \frac{\nu}{1-2\nu} g^{ij} g^{kl}) - \frac{\alpha}{\gamma} \dot{T}^{ij} \dot{T}^{kl}] \dot{E}_{kl} \quad (20)$$

In Gleichung (20) ist E der Elastizitätsmodul, ν die Querdehnzahl und \dot{T}^{ij} sind die kontravarianten Komponenten des Spannungsdeviators:

$$\dot{T}^{ij} = T^{ij} - \frac{1}{3} g^{ij} g_{kl} T^{kl}. \quad (21)$$

$$T_e = k \text{ und } \dot{T}_e > 0.$$

Über den skalaren Faktor $1/\gamma$ erfolgt die Berücksichtigung der isotropen Verfestigung [18]:

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{3}{2} \frac{E}{E_t} - 1 \quad (25)$$

$$T_e^2 \left[\frac{2}{3}(1+\nu) + \frac{E}{E_t} - 1 \right]$$

Die Approximation der Fließkurve kann auf verschiedene Weise erfolgen. Wird eine Annäherung der Fließkurve nach Ramberg-Osgood in der Form (E_t Tangentensmodul)

$$\frac{E}{E_t} = 1 + \frac{3}{7} n \left(\frac{\sigma}{\sigma_s} \right)^{n-1} \quad (26)$$

mit $\sigma \approx T_e$ und n als Verfestigungsexponent vorgenommen, so lassen sich die Komponenten der Stoffgesetzmatrix D^{ijkl} der Gl. (19) bestimmen:

$$D^{ijkl} = \frac{E}{1+\nu} \left[g^{ik} g^{jl} + \frac{\nu}{1-2\nu} g^{ij} g^{kl} - \frac{\alpha}{\gamma} T^{ij} T^{kl} \right] - \left(T^{ik} g^{jl} + T^{jk} g^{il} \right). \quad (27)$$

Für axialsymmetrische Probleme lauten die Komponenten des Fundamentaltensors (1) bei Benutzung von Zylinderkoordinaten $X^1 = r$, $X^2 = \Theta$, $X^3 = z$ und den Verschiebungen $u_1 = u$ in r - und $u_3 = v$ in z -Richtung für den Ausgangszustand

$$G_{11} = 1, G_{22} = r^2, G_{33} = 1, G_{13} = 0 \quad (28)$$

und für den deformierten Zustand

$$g_{11} = (1 + u_{1,1})^2 + (u_{3,1})^2 = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2$$

$$g_{22} = (X^1 + u_1)^2 = (r + u)^2 \quad (29)$$

$$g_{33} = (1 + u_{3,3})^2 + (u_{1,3})^2 = \left(1 + \frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$$

$$g_{13} = u_{1,3} + u_{3,1} + u_{1,1} u_{1,3} + u_{3,1} u_{3,3}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial z}$$

Mit diesen Fundamentaltensoren errechnen sich die physikalischen Komponenten des Formänderungs- und Spannungstensors aus den Komponenten des Greenschen Verzerrungstensors (2) bzw. des Kirchhoffschen Spannungstensors (4)

$$E_{(ij)} = E_{ij} \left(\sqrt{G_{ii}} \sqrt{G_{jj}} \right)^{-1}, T_{(ij)} = T^{ij} \sqrt{G_{ii}} \sqrt{G_{jj}}. \quad (30)$$

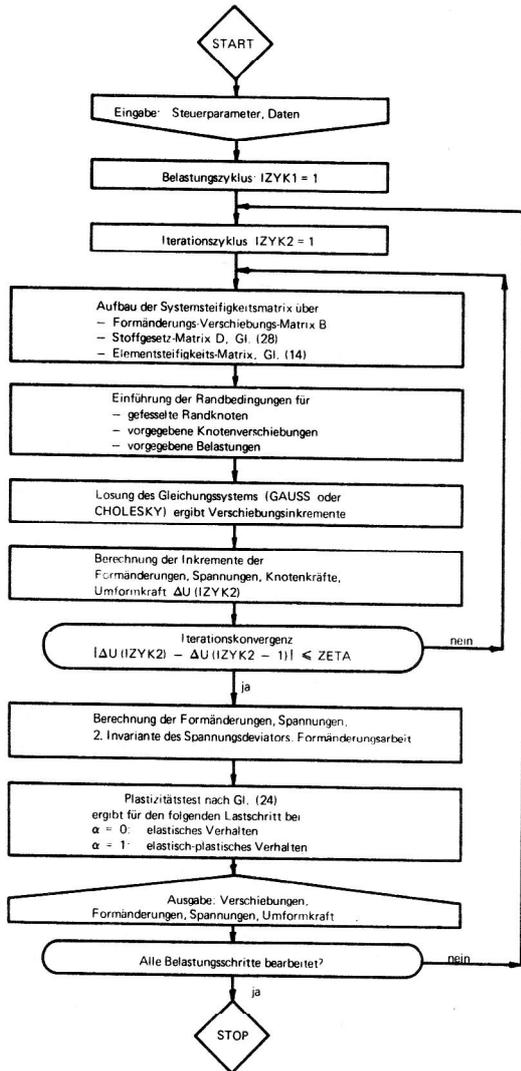


Bild 2
Programmablaufplan (schematisch)

Das Misessche Fließkriterium für isotrope Verfestigung lautet

$$f(\dot{T}^{ij}) = T_e - k \quad (22)$$

mit der Vergleichsspannung

$$T_e = \sqrt{\frac{3}{2} g_{ik} g_{jl} \dot{T}^{ij} \dot{T}^{kl}}. \quad (23)$$

Die aktuelle Fließspannung $k = f(T_e, \sigma_0)$ ist eine Funktion der Anfangsfließspannung σ_0 und der Vergleichsspannung T_e .

Für den Parameter α gilt

$\alpha = 0$ für Belastung im elastischen Bereich oder elastische Entlastung nach plastischer Formänderung oder neutrale Spannungsvariation

$$T_e < k \text{ oder } T_e = k \text{ und } \dot{T}_e \leq 0 \quad (24)$$

$\alpha = 1$ für Belastung im plastischen Bereich

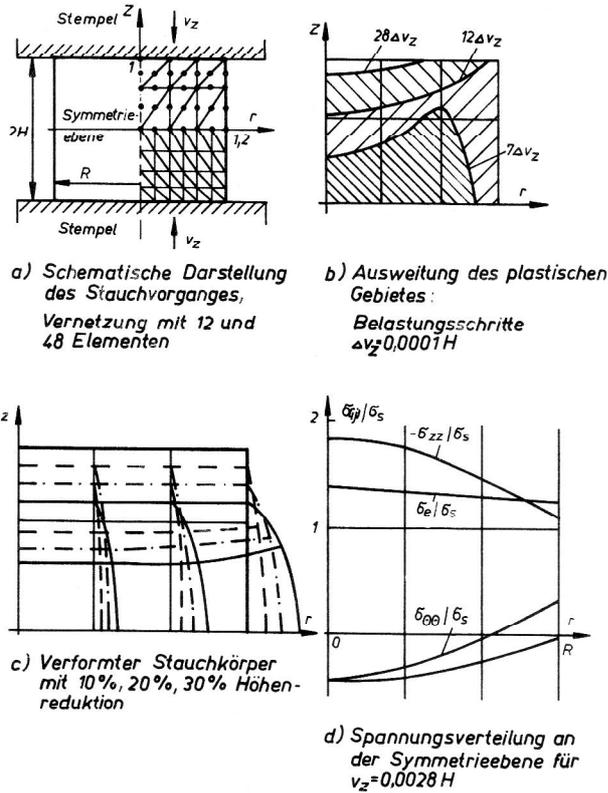


Bild 3
Axialsymmetrischer Stauchkörper

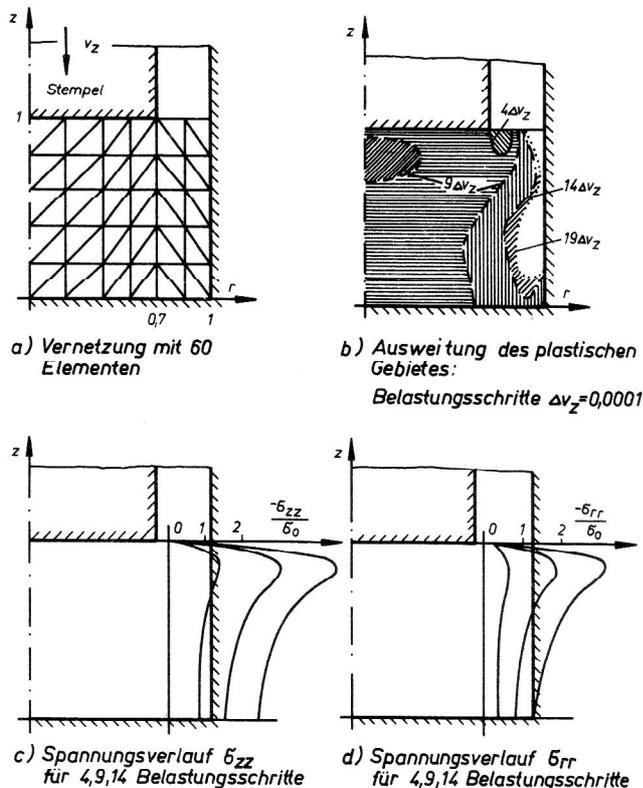


Bild 4
Rückwärtsfließpressen

Numerische Ergebnisse wurden ermittelt am Beispiel des Stauchens eines Zylinders ($R/H = 1,2$) zwischen parallelen Platten mit Haftreibung an den Berührungsflächen (Bild 3a).

Aus Symmetriegründen kann man sich auf die Vernetzung einer Hälfte des Zylinders mit axialsymmetrischen Ringelementen beschränken. Für vergleichende Untersuchungen wurden 3-Knoten-Dreieck-Ring-Elemente und 6-Knoten-Dreieck-Ring-Elemente benutzt. Die Anzahl der Gesamtfreiheitsgrade wurde zwischen 70 und 234 variiert.

Die Werkstoffkennwerte sind Fließspannung $\sigma_s = 150 \text{ N/mm}^2$, Elastizitätsmodul $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$, Querdehnzahl $\nu = 0,33$, Verfestigungsexponent $n = 8$.

Bild 3b zeigt die Zunahme des plastischen Bereiches von der Mitte aus, wobei mit Belastungsschritten von $0,0001H$ bei 3 Iterationen pro Belastungsschritt jeweils eine ausreichende Konvergenz erreicht wurde.

Die für das isoparametrische 6-Knoten-Dreieck-Ring-Element notwendige numerische Integration zur Errechnung der Elementsteifigkeiten wurde mit 12 Stützstellen je Element durchgeführt [19].

Bild 3c zeigt die verformte Geometrie des Stauchkörpers für hypoelastisches Materialverhalten.

Bild 3d zeigt die Verläufe für Normal- und Vergleichsspannungen in der Symmetrieebene des Stauchkörpers. Die Berechnungen wurden auf der Rechenanlage BESM-6 der TU Dresden durchgeführt.

Weitere Ergebnisse liegen u. a. vor für die Untersuchung des axialsymmetrischen Rückwärtsfließpressens. Bild 4a zeigt die Vernetzung mit linearen Dreieck-Ring-Elementen in einer Symmetriehälfte des Ausgangszustandes. An der Berührungsfläche des Stempels mit dem Werkstück wurde reibungsfreies Gleiten angenommen. Die Ausweitung des plastischen Gebietes in der Anlaufphase des Fließpressvorganges, beginnend an der Stempelkante, wurde für 19 Belastungssinkremente ermittelt (Bild 4b). In Bild 4c und 4d sind deutlich die großen Spannungsgradienten im Bereich der Stempelkante erkennbar.

LITERATUR

- [1] Storoschew, M.W., E.A. Popow: Grundlagen der Umformtechnik. Berlin 1968.
- [2] Lippmann, H., O. Mahrenholtz: Plastomechanik der Umformung metallischer Werkstoffe I. Berlin, Heidelberg, New York 1967.
- [3] Lippmann, H., V. Mannl: Elementare Theorie und Schrankenverfahren der Plastomechanik. Revue Roumaine des Sciences Techniques. Serie de Mecanique Appliquee (1970) Nr. 3.
- [4] Prager, W., P.G. Hodge: Theorie idealplastischer Körper. Wien 1954.
- [5] Tomlenov, A.D.: Teorija plasticeskogo deformirovanija metallov. Moskva 1972.
- [6] Voelkner, W.: Ein Beitrag zur Streifen- und Gleitlinienmethode. Wiss. Zeitschrift TU Dresden 25(1976) Nr. 3, S. 613 - 618.
- [7] Höfer, E.: Theoretische Untersuchungen ebener und axial-symmetrischer Umformprobleme als elastisch-plastischer Anlaufvorgang. TH Karl-Marx-Stadt: Dr.-Ing.-Diss. 1973.

- [8] Tomlenov, A.D.: Metod razcetka formoobrazovanja uprocnajuscichsja metallov. Akademija nauk SSSR, Mashinovedenie, 1977, Nr. 4, S. 94 – 97.
- [9] Hibitt, H.D., P.V. Marcal, J.R. Rice: A finite element formulation for problems of large strain and large displacement. Int. Journ. Solids Structures 16(1970), S. 1069 – 1086.
- [10] Hutchinson, J.W.: Finite strain analysis of elastic-plastic solids and structures. In: Numerical solutions of nonlinear structural problems. AMD vol 6, New York 1973.
- [11] Needleman, A.: A numerical study of necking in circular bars. Journ. Mech. Phys. Solids 20(1972), S. 111 – 127.
- [12] Wifi, A.S.: An incremental complete solution of the stretch-forming and deepdrawing of a circular blank using a hemispherical punch. Int. Journ. mech. Sci. 18(1976), S. 23 – 31.
- [13] Truesdell, C., R.A. Toupin: The classic field theories. Handbuch der Physik, Bd. III/1, Berlin 1960.
- [14] Green, A.E., J.E. Adkins: Large elastic deformations. Oxford 1960.
- [15] Zienkiewicz, O.C.: Methode der finiten Elemente (Übers. aus dem Englischen). Leipzig 1974.
- [16] Osias, J.R., J.L. Swedlow: Finite elasto-plastic deformation. Int. Journ. Solids Structures 10(1974), S. 321 – 339.
- [17] Kreissig, R.: Zur Approximation von Fließortkurven durch polynomiale Fließbedingungen. 7. TMP TH Karl-Marx-Stadt 1979, Tagungsberichte S. 57 – 65.
- [18] Chen, W.H.: Necking of a bar. Int. Journ. Solids Structures 7(1971), S. 685 – 717.
- [19] Moan, T.: Experiences with orthogonal polynomials and „best“ numerical integration formulas on a triangle. ZAMM 54(1974), S. 501 – 508.

Anschrift der Verfasser:

Prof. Dr.-Ing. Hubert Günther,
 Dr.-Ing. Klaus Drey,
 Dipl.-Ing. Wolfgang Strobel,
 Ingenieurhochschule
 95 Zwickau, Dr.-Friedrichs-Ring