

Über Zufallsschwingungen und Zuverlässigkeitsaussagen bei Tragwerken

Klaus Hennig

Aussagen über die Zuverlässigkeit statistisch beanspruchter Tragwerke bereiten erhebliche Schwierigkeiten, wenn der Realität Rechnung tragend physikalische und geometrische Nichtlinearitäten berücksichtigt werden müssen. Zur Lösung solcher Aufgaben bietet sich an, direkt realisierungsweise unter Verwendung von Meßgrößen für die zufälligen Belastungen vorzugehen bzw. bei gegebenen statistischen Kennwerten für die Belastungen Simulationsverfahren einzusetzen und anschließend die benötigten statistischen Kenngrößen zu bestimmen. Diese Vorgehensweise erscheint insbesondere auch deshalb als günstig, da dann bekannte numerische Methoden für entsprechende deterministische Aufgabenstellungen angewendet werden können. Nach Skizzierung solcher am ZIMM aufbereiteter Methoden werden einige Beziehungen für die Bestimmung von Niveauüberschreitenswahrscheinlichkeiten angegeben. Als Beispiel wird ein durch Wind belastetes Hochhaus mit Betongleitkern betrachtet. Abschließend werden noch im Rahmen eines allgemeinen Konzepts für Ermüdungsschädigungen Fragen des Ermüdungsversagens behandelt.

1. Einleitung

Reale Vorgänge lassen sich oftmals nur näherungsweise durch bestimmte feste Funktionen von Zeit und Raum beschreiben, da sie in vielen Fällen durch eine Anzahl nichterfaßbarer Faktoren mitbeeinflusst werden, die in ihrer Gesamtheit als Zufallseinfluß aufzufassen sind. Solche zufälligen Änderungen unterliegenden Vorgänge stellen stochastische Prozesse dar, d. h. Funktionen, die durch die Ergebnisse einer bestimmten Beobachtung beschrieben werden und bei Wiederholung dieser Beobachtung verschiedene Werte zeigen können.

Systeme unter zufälligen Beeinflussungen wurden zuerst von Physikern und Mathematikern im Zusammenhang mit dem Studium der Brownschen Bewegung von Teilchen in einer Flüssigkeit betrachtet. Zu diesen Untersuchungen zählen Arbeiten von Einstein (1905), Langevin (1908), Fokker (1914), Planck (1917), Smoluchowski (1916), Ornstein, Uhlenbeck, Wrang, Kolmogorov, um nur einige Namen zu nennen.

Ein neuer Anstoß zur Betrachtung zufällig beeinflusster Systeme ergab sich bei ingenieurwissenschaftlichen Problemstellungen aus der Forderung nach einem den realen Gegebenheiten ausreichend gut angepaßten mathematischen Modell. Die Erkenntnis, daß bei vielen Schwingungsvorgängen über periodische Erregungen hinaus Erregungen auftreten, die einerseits nur als stochastische Prozesse zu beschreiben sind, aber andererseits über ein breites Frequenzband verteilte Energiebeiträge abgeben, welche in den Berechnungen nicht mehr vernachlässigt werden können, führte dabei auch zu einer intensiven Erforschung zufälliger Schwingungsvorgänge.

An dieser Stelle ist es nicht möglich, auf die Entwicklung im einzelnen einzugehen. Es sei hier vor allem auf die Monographien von Crandall und Mark [1], Bolotin [2],[3], Lin [4], Parkus [5], Heinrich und Hennig [6] mit zahlreichen weiteren Literaturziten verwiesen, auch auf das Buch von Murzewski [7], in dem eingehend Probleme der Zuverlässigkeit von Baukonstruktionen behandelt werden. Im folgenden sollen einige im Zusam-

menhang mit zufälligen Kontinua-Schwingungsproblemen auftretende Fragestellungen erörtert werden.

2. Zufallsfremderregte Kontinuasschwingungen

Zur (i. allg. nur näherungsweise möglichen) Berechnung von Kontinuasschwingungsproblemen ist es oftmals zweckmäßig, das zugehörige Anfangsrandwertproblem nicht direkt durch Approximation der eingehenden (Orts)-Ableitungen anzugreifen, sondern auszunutzen, daß derartige Aufgaben als Variationsprobleme formuliert werden können. Im folgenden soll dieser Weg skizziert werden, wobei als Grundlage für die angenäherte Berechnung nichtlinearer Kontinuasschwingungsprobleme mit zufälligen Fremderregungen das Prinzip der virtuellen Verschiebungen in der Form

$$\begin{aligned} \delta J = & \int_R \rho(x) \delta u^T(x,t) u_{,tt}(x,t) dR \\ & + \int_R \delta \underline{\epsilon}^T(x,t) \underline{\sigma}(x,t) dR \\ & - \int_R \delta \dot{u}^T(x,t) \underline{q}(x,t) dR \\ & - \int_{S_p} \delta u(x,t) \tilde{p}(x,t) dS + \delta W_G(t) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

vorangestellt sei. Dabei bezeichnet $R \subset R^3$ das vom undeformierten Körper eingenommene Gebiet im Euklidischen Raum R^3 , $\bar{R} = R \cup S$ seinen Abschluß, $S = S_u \cup S_p$ den als stückweise glatt vorausgesetzten Rand mit S_u als dem Teil des Randes, wo die Verschiebungen \tilde{u} vorgegeben sind und S_p als Randanteil von S , auf dem die vorgegebenen Spannungen \tilde{p} wirken; x steht abkürzend für die Koordinaten der Punkte $P \in R$, $u(x,t)$ stellt den Verschiebungs-(Spalten-)Vektor dar, $u^T_{,tt}$ die zweite zeitliche Ableitung des transponierten Vektors u , $\underline{\epsilon}$ den Verzer-

rungsvektor, $\underline{\sigma}$ den Spannungsvektor¹⁾, $\tilde{\mathbf{q}}$ den auf R bezogenen Vektor der eingprägten Kräfte, ρ die Dichte des undeformierten Körpers und $\delta W_G(t)$ die virtuelle Arbeit polygener – also nicht aus Skalarfunktionen herleitbarer – Kräfte.

Die Verzerrungs-Verschiebungsbeziehungen schreiben wir in der Form

$$\underline{\epsilon}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{D}(\mathbf{x}) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{b}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) \quad (2)$$

mit \mathbf{D} als linearer Differentialoperatorenmatrix und $\mathbf{b}(\mathbf{u})$ als Operatorvektorfunktion, die den nichtlinearen Anteil des Verzerrungsvektors beschreibt. Für die hier betrachteten elastischen Körper nehmen wir zunächst an, daß das Materialgesetz in der Form

$$\underline{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\underline{\epsilon}(\mathbf{x}, t)) \quad (3)$$

gegeben sei. Entsprechend dem Kantorowitsch-Verfahren [8] führen wir jetzt in (2) den (N-dimensionalen) Semidiskretisationssatz

$$\mathbf{u}_N(\mathbf{x}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \underline{\rho}(t) \quad (4)$$

ein mit $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ als Matrix zulässiger Koordinatenfunktionen²⁾ a) entweder definiert auf dem ganzen Gebiet R oder b) als lokale Basis bei der Methode der finiten Elemente definiert auf Teilgebieten R^h mit $\cup R^h = R$, $\cap R^h = 0$ und außerhalb R^h zu Null fortgesetzt. Hierbei sind die wesentlichen Randbedingungen zunächst als homogen vorausgesetzt. Bei Vorliegen inhomogener wesentlicher Randbedingungen ist im Fall a) der Ansatz in (4) durch eine diese Bedingung erfüllende Vektorfunktion $\mathbf{F}_0(\mathbf{x}, t)$ zu ergänzen, bei b) ist $\mathbf{F}_0(\mathbf{x}, t)$ in der Regel in den Ansätzen über den Randelementen enthalten, braucht dann also nicht zusätzlich berücksichtigt zu werden.

Unter Beachtung von

$$\begin{aligned} \underline{\epsilon}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{D}(\mathbf{x}) \mathbf{F}(\mathbf{x}) \underline{\rho}(t) + \mathbf{b}(\mathbf{F}(\mathbf{x}) \underline{\rho}(t)) \\ &:= \mathbf{B}(\mathbf{x}) \underline{\rho}(t) + \mathbf{e}(\mathbf{x}, \underline{\rho}(t)) := \underline{\epsilon}(\mathbf{x}, \underline{\rho}(t)) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\underline{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{B}(\mathbf{x}) \underline{\rho}(t) + \mathbf{e}(\mathbf{x}, \underline{\rho}(t))) := \mathbf{f}(\underline{\epsilon}(\mathbf{x}, \underline{\rho}(t))) \quad (6)$$

geht dann (1) über in

$$\delta J = \delta \underline{\rho}^T(t) [\underline{\psi}(\underline{\rho}(t), \dot{\underline{\rho}}(t), \ddot{\underline{\rho}}(t), t) - \mathbf{R}(t)] = 0$$

mit

$$\begin{aligned} \underline{\psi}(\underline{\rho}(t), \dot{\underline{\rho}}(t), \ddot{\underline{\rho}}(t), t) &:= \left\{ \int_R \rho(\mathbf{x}) \mathbf{F}^T(\mathbf{x}) \mathbf{F}(\mathbf{x}) dR \right\} \ddot{\underline{\rho}}(t) \\ &+ \int_R \left(\mathbf{B}(\mathbf{x}) + \left\{ \frac{\partial \mathbf{e}(\mathbf{x}, \underline{\rho}(t))}{\partial \underline{\rho}} \right\}^T \mathbf{f}(\underline{\epsilon}(\mathbf{x}, \underline{\rho}(t))) dR \right. \\ &+ \mathbf{R}_G(\underline{\rho}(t), \dot{\underline{\rho}}(t)) - \int_R \mathbf{F}^T(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, t) dR \\ &\left. - \int_{S_p} \mathbf{F}^T(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}, t) dS \right) \underline{\rho} \end{aligned} \quad (7)$$

1) Verzerrungen und Spannungen seien hierbei durch den Green'schen Verzerrungstensor und den zweiten Piola-Kirchhoff'schen Spannungstensor definiert.

2) Bezüglich weiterer an die Elemente von $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ zu stellender Bedingungen verweisen wir auf [9], [10].

Dabei haben wir angenommen, daß $\delta W_G(t)$ in der Form $\delta \underline{\rho}^T \mathbf{R}_G(\underline{\rho}, \dot{\underline{\rho}})$ vorliegt. Abkürzend steht hier und im weitem $\underline{\rho}$ für $\frac{d\underline{\rho}}{dt}$ usw. sowie $\mathbf{0}$ für den N-dimensionalen Nullvektor.

Zur Bestimmung näherungsweise Lösungen von (7) wenden wir das Verfahren von Newton-Raphson an (vgl. [11]). Nach längerer Zwischenrechnung und unter Verwendung der Abkürzungen

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \left\{ \int_R \rho(\mathbf{x}) \mathbf{F}^T(\mathbf{x}) \mathbf{F}(\mathbf{x}) dR \right\} \\ \mathbf{D}_1(\underline{\rho}, \dot{\underline{\rho}}) &= \left\{ \frac{\partial \mathbf{R}_G(\underline{\rho}, \dot{\underline{\rho}})}{\partial \dot{\underline{\rho}}} \right\}, \quad \mathbf{D}_2(\underline{\rho}, \dot{\underline{\rho}}) = \left\{ \frac{\partial \mathbf{R}_G(\underline{\rho}, \dot{\underline{\rho}})}{\partial \underline{\rho}} \right\} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, \underline{\rho}) = \left\{ \frac{\partial \mathbf{f}(\underline{\epsilon}(\mathbf{x}, \underline{\rho}))}{\partial \underline{\epsilon}} \right\}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\underline{\rho}) &= \left\{ \int_R \left(\mathbf{B}(\mathbf{x}) + \left\{ \frac{\partial \mathbf{e}(\mathbf{x}, \underline{\rho})}{\partial \underline{\rho}} \right\}^T \mathbf{E}(\mathbf{x}, \underline{\rho}) \right) \left(\mathbf{B}(\mathbf{x}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left\{ \frac{\partial \mathbf{e}(\mathbf{x}, \underline{\rho})}{\partial \underline{\rho}} \right\} \right) dR \right\} \\ &\quad + \left\{ \int_R \frac{\partial}{\partial \underline{\rho}} \left(\left\{ \frac{\partial \mathbf{e}(\mathbf{x}, \underline{\rho})}{\partial \underline{\rho}} \right\}^T \right) \mathbf{f}(\underline{\epsilon}(\mathbf{x}, \underline{\rho})) dR \right\} \end{aligned}$$

$$\mathbf{R}(t) = \int_R \mathbf{F}^T(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, t) dR + \int_{S_p} \mathbf{F}^T(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{x}, t) dS$$

$$- \mathbf{S}(\underline{\rho}) = \int_R \left(\mathbf{B}(\mathbf{x}) + \left\{ \frac{\partial \mathbf{e}(\mathbf{x}, \underline{\rho})}{\partial \underline{\rho}} \right\}^T \right) \mathbf{f}(\underline{\epsilon}(\mathbf{x}, \underline{\rho}))$$

$$- \mathbf{E}(\mathbf{x}, \underline{\rho}) \underline{\epsilon}(\mathbf{x}, \underline{\rho})$$

$$+ \mathbf{E}(\mathbf{x}, \underline{\rho}) \left(\mathbf{e}(\mathbf{x}, \underline{\rho}) - \left\{ \frac{\partial \mathbf{e}(\mathbf{x}, \underline{\rho})}{\partial \underline{\rho}} \right\} \underline{\rho} \right) dR \quad (9)$$

$$- \left\{ \int_R \frac{\partial}{\partial \underline{\rho}} \left(\left\{ \frac{\partial \mathbf{e}(\mathbf{x}, \underline{\rho})}{\partial \underline{\rho}} \right\}^T \right) \mathbf{f}(\underline{\epsilon}(\mathbf{x}, \underline{\rho})) dR \right\} \underline{\rho}$$

$$- \mathbf{D}_1(\underline{\rho}, \dot{\underline{\rho}}) \dot{\underline{\rho}} - \mathbf{D}_2(\underline{\rho}, \dot{\underline{\rho}}) \underline{\rho} + \mathbf{R}_G(\underline{\rho}, \dot{\underline{\rho}})$$

ergibt sich für $\underline{\rho}_{n+1}(t)$ die Folge linearer gewöhnlicher Differentialgleichungssysteme

$$\mathbf{M} \ddot{\underline{\rho}}_{n+1} + \mathbf{D}_1(\underline{\rho}_n, \dot{\underline{\rho}}_n) \dot{\underline{\rho}}_{n+1} + \left[\mathbf{D}_2(\underline{\rho}_n, \dot{\underline{\rho}}_n) \right. \quad (10)$$

$$\left. + \mathbf{K}(\underline{\rho}_n) \right] \underline{\rho}_{n+1} = \mathbf{S}(\underline{\rho}_n) + \mathbf{R}(t) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Es sei hier noch bemerkt, daß für Materialgesetze

$$\underline{\epsilon}(\underline{x}, t) = \underline{g}(\underline{\sigma}(\underline{x}, t)),$$

die sich nicht durch Invertierung auf die Gestalt von (3) bringen lassen, an die Stelle von (9) der Vektor

$$\begin{aligned} \underline{S}(\underline{\rho}) = & \int_{\underline{R}} (\underline{B}(\underline{x}) + \left\{ \frac{\partial \underline{\epsilon}(\underline{x}, \underline{\rho})}{\partial \underline{\rho}} \right\}^T) \underline{E}(\underline{x}, \underline{\rho}) \\ & \left[\underline{g}(\underline{\sigma}(\underline{x}, \underline{\rho})) - \underline{\epsilon}(\underline{x}, \underline{\rho}) - \underline{e}(\underline{x}, \underline{\rho}) + \left\{ \frac{\partial \underline{\epsilon}(\underline{x}, \underline{\rho})}{\partial \underline{\rho}} \right\} \underline{\rho} \right] d\underline{R} \\ & + \left\{ \int_{\underline{R}} \frac{\partial}{\partial \underline{\rho}} \left(\left\{ \frac{\partial \underline{\epsilon}(\underline{x}, \underline{\rho})}{\partial \underline{\rho}} \right\}^T \underline{\sigma}(\underline{x}, \underline{\rho}) \right) d\underline{R} \right\} \underline{\rho} \\ & + \underline{D}_1(\underline{\rho}, \dot{\underline{\rho}}) \dot{\underline{\rho}} + \underline{D}_2(\underline{\rho}, \ddot{\underline{\rho}}) \ddot{\underline{\rho}} - \underline{R}_G(\underline{\rho}, \dot{\underline{\rho}}) \end{aligned} \quad (11)$$

tritt, wobei $\underline{\sigma}(\underline{x}, \underline{\rho})$ durch

$$\underline{\sigma}(\underline{x}, \underline{\rho}) := \underline{E}(\underline{x}, \underline{\rho}) \underline{\epsilon}(\underline{x}, \underline{\rho})$$

und $\underline{\epsilon}(\underline{x}, \underline{\rho})$ durch (5) definiert sind. Wie leicht zu erkennen ist, gehen im Sonderfall statischer Probleme (10) mit (9) in die Anfangsspannungsmethode und (10) mit (11) in die Anfangsdehnungsmethode über.

Wird in (7) das Newton-Raphson-Verfahren zusätzlich auch auf den Vektor $\underline{R}(t)$ angewendet mit

$$\underline{\psi}(\underline{\rho}, \dot{\underline{\rho}}, \ddot{\underline{\rho}}, \underline{R}(t)) = 0,$$

so folgt daraus das Verfahren der Inkremente (vgl. [11]), aus welchem unter Berücksichtigung von

$$\underline{\psi}(\underline{\rho}_n, \dot{\underline{\rho}}_n, \ddot{\underline{\rho}}_n, \underline{R}_n(t)) = 0$$

$$\text{und } \Delta \underline{\rho}_n(t) := \underline{\rho}_{n+1}(t) - \underline{\rho}_n(t),$$

$$\Delta \underline{R}_n(t) := \underline{R}_{n+1}(t) - \underline{R}_n(t)$$

wiederum (10) mit (9) bzw. (10) mit (11) hergeleitet werden können.

Liegen im Rahmen der Korrelationstheorie statistische Kenngrößen der Erregung vor, so lassen sich die entsprechenden Kenngrößen linearer Schwingungsreaktionen mittels der einschlägig bekannten Verfahren (vgl. z. B. [6], [12]) im Zeit- und Frequenzbereich ermitteln. Wie leicht ersichtlich, ist ein derartiges Vorgehen bei (10) nicht anwendbar (den lineare Probleme beschreibenden Sonderfall $n \equiv 0$, $\dot{\underline{\rho}}_0 \equiv 0$, $\ddot{\underline{\rho}}_0 \equiv 0$ ausgeschlossen). Bei vielen praktischen Problemstellungen läßt sich jedoch ausnutzen, daß die Erregungen oftmals realisierungsweise in Form von Meßgrößen gegeben sind. Es ist dann zweckmäßig, (10) direkt numerisch unter Verwendung dieser Meßgrößen zu integrieren³⁾ und anschließend die zur Charakterisierung der zufälligen Schwingungsreaktionen und weiterer zur Einschätzung der Zuverlässigkeit des betrachteten Tragwerkes benötigten statistischer Kenngrößen zu bestimmen (vgl. [13], [15], [16], [17]). Zur Anwendung dieser Vorgehensweise

3) Eine Übersicht über einige gebräuchliche numerische Integrationsverfahren findet man z. B. bei M. Weber „Verfahren zur Zeitintegration großer dynamischer Systeme einschließlich Betrachtungen über ihre Stabilität und Verfahrensfehler“ Preprint des ZIMM (im Druck).

bei gegebenen statistischen Kennwerten für die Belastungen ist es notwendig, zusätzlich Simulationsverfahren einzusetzen (vgl. [27]). Prinzipiell erscheint aber auch dann dieser Weg als günstig, da so immer bekannte numerische Methoden für entsprechende deterministische Tragwerksberechnungen eingesetzt werden können, die zudem i. allg. keinen so stark einschneidenden Voraussetzungen bezüglich auftretender Nichtlinearitäten unterliegen wie andere Näherungsverfahren für stochastische Anfangs-Randwertprobleme.

3. Zuverlässigkeitsaussagen

Im engen Zusammenhang mit dem Vorhergehenden stehen Fragen nach der Vorhersage von Zuverlässigkeit, Lebensdauer und Versagen von Konstruktionen, die stochastisch belastet sind. In Abhängigkeit der vorgegebenen praktischen Problemstellung lassen sich hierbei im wesentlichen drei Klassen von Aufgaben unterscheiden: α) Ein System versagt, wenn die Beanspruchung einen bestimmten Schwellwert erstmals überschreitet bzw. aus einem vorgegebenen Bereich austritt. Ziel ist es, die Konstruktion so auszulegen, daß für eine vorgegebene Nutzungsdauer die Versagenswahrscheinlichkeit möglichst klein wird. β) Seltene Überbeanspruchungen treten auf, ohne unmittelbar zum Bruch zu führen. Es kommt somit im Vorlauf der Nutzungsdauer des Systems zur Akkumulation bleibender Verformungen. Die Frage ist, ob diese akkumulierten Verformungen so groß werden, daß ein Versagen des Systems während des vorgegebenen Nutzungszeitraumes eintritt. γ) Die Beanspruchungen überschreiten die Dauerfestigkeit, Überbelastungen über die Elastizitätsgrenze sind aber selten. Ein Versagen tritt ein, wenn das Maß der Schädigung infolge der allmählichen Entwicklung von Ermüdungsrissen einen kritischen Wert erreicht.

Wir beschränken uns im folgenden auf einige Ausführungen zu den unter α) und γ) genannten Problemen. Der Fall β) läßt sich weitgehend mit den Methoden von α) lösen, so daß keine gesonderte Behandlung als notwendig erscheint [2], [14].

3.1. Versagenswahrscheinlichkeiten

Es bezeichne $Z(t)$ den an der gefährdeten Stelle der Konstruktion für das Versagen im Zeitintervall $[0, T]$ maßgeblichen, zeitlich stetigen, stochastischen Prozeß und $\dot{Z}(t)$ seine Ableitung nach t , deren Existenz vorausgesetzt wird. Die stochastischen Prozesse $(Z(t_i), i = 1, \dots, n, t_i \in [0, T])$; $(Z(t_j), j = 1, \dots, m, t_j \in [0, T])$ und ihre gegenseitigen Abhängigkeiten seien durch die Folge ihrer Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen

$$f_{Z \dots Z \dot{Z} \dots \dot{Z}}(z_1, \dots, z_n, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m; t_1, \dots, t_n, \bar{t}_1, \dots, \bar{t}_m);$$

$n, m = 0, 1, \dots$

bestimmt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der stochastische Prozeß $Z(t)$ während des Zeitintervalls $[0, T]$ das Niveau z_0 mindestens einmal überschreitet (was bei praktischen Problemen vielfach ein Versagen der Konstruktion nach sich zieht) bezeichnen wir mit $P_1(z_0; 0, T)$; $P_0(z_0; 0, T) = 1 - P_1(z_0; 0, T)$ ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Niveau z_0 im Intervall $[0, T]$ nicht überschritten wird.

Zur Bestimmung von $P_0(z_0; 0, T)$ bzw. $P_1(z_0; 0, T)$ kann der enge Zusammenhang dieser Größen mit der Zufallsgröße $\nu_Z(z_0; t)$ ausgenutzt werden; $\nu_Z(z_0; t) dt$ gibt die Anzahl der Überschreitungen des Niveaus z_0 im kleinen Zeitintervall $[t, t+dt)$ mit $0 \leq Z(t) < \infty$ an. Bei Kenntnis der gemischten Verteilungsdichtefunktionen von $Z(t)$ und $\dot{Z}(t)$ ist die Bestimmung der Momente $g_s(t_1, \dots, t_s)$ dieser Zufallsgrößen möglich (vgl. [6]):

$$g_s(t_1, \dots, t_s) = E[\nu_Z(z_0; t_1) \dots \nu_Z(z_0; t_s)] \\ = \int_0^\infty \int_0^\infty \bar{z}_1 \dots \bar{z}_s f_Z \dots Z \dot{Z} \dots \dot{Z}$$

$$(z_0, \dots, z_0, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_s; t_1, \dots, t_s, t_1, \dots, t_s) d\bar{z}_1 \dots d\bar{z}_s.$$

Damit läßt sich eine Reihendarstellung für die Wahrscheinlichkeit $P_0(z_0; 0, T)$ herleiten [18], [19]:

$$P_0(z_0; 0, T) = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \int_{0 \leq t_1 < \dots < t_s \leq T} g_s(t_1, \dots, t_s) dt_1 \dots dt_s.$$

Ein entsprechender, für die Berechnung günstigerer Ausdruck ergibt sich, wenn zu den Kumulantenfunktionen $k_r(t_1, \dots, t_r)$ der Zufallsgröße $\nu_Z(z_0; t)$ übergegangen wird. Diese hängen mit den Momentenfunktionen wie folgt zusammen:

$$k_1(t) = g_1(t_1) \\ k_2(t_1, t_2) = g_2(t_1, t_2) - g_1(t_1) g_1(t_2) \\ k_3(t_1, t_2, t_3) = g_3(t_1, t_2, t_3) - g_1(t_1) g_2(t_2, t_3) \\ - g_1(t_2) g_2(t_1, t_3) - g_1(t_3) g_2(t_1, t_2) \\ + g_1(t_1) g_1(t_2) g_1(t_3),$$

usw.

Die Wahrscheinlichkeit $P_0(z_0; 0, T)$, daß das Niveau z_0 in $[0, T)$ nicht überschritten wird, ergibt sich damit aus

$$P_0(z_0; 0, T) = \exp \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \int_{0 \leq \tau_1 < \dots < \tau_s \leq T} k_s(\tau_1, \dots, \tau_s) d\tau_1 \dots d\tau_s \right\}.$$

Da sich die höheren Momenten- bzw. Kumulantenfunktionen nur schwer bestimmen lassen und da die Auswertung der Mehrfachintegrale gleichfalls beschwerlich ist, beschränkt man sich auf die für praktische Belange meistens ausreichenden ersten Näherungen

$$P_{01}(z_0; 0, T) = \exp \left\{ - \int_0^T k_1(\tau) d\tau \right\}, \quad (12)$$

$$P_{02}(z_0; 0, T) = \exp \left\{ - \int_0^T k_1(\tau) d\tau + \int_{\tau_1=0}^T \int_{\tau_2 > \tau_1}^T k_2(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \right\}. \quad (13)$$

Bei genügend hoher Niveaugrenze z_0 (etwa $z_0 \geq 6\sigma_Z$) erweist sich der Unterschied zwischen erster und zweiter Näherung bereits als verschwindend gering, so daß bei vielen Problemen die erste Näherung (12) ausreichend ist. Diese erste Näherung stimmt mit der Beziehung überein, die sich ergibt, wenn angenommen wird, daß die Niveauüberschreitungen poissonverteilt sind. Für einen normalverteilten und stationären stochastischen Prozeß $Z(t)$ geht (12) über in

$$P_{01}(z_0; 0, T) = \exp \left\{ - T \cdot g_1 \right\}$$

mit

$$g_1(t) = g_1 = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_{\dot{Z}}}{\sigma_Z} \exp \left\{ - \frac{1}{2} \left(\frac{z_0 - m_z}{\sigma_Z} \right)^2 \right\},$$

$$m_z = E[Z(t)], \sigma_Z^2 = E[(Z(t) - m_z)^2], \sigma_{\dot{Z}}^2 = E[\dot{Z}(t)^2].$$

Für mehrere praktische Aufgabenstellungen sind Überschreitungswahrscheinlichkeiten bestimmt worden. Als Beispiel berechnen wir solche Wahrscheinlichkeiten für ein Hochhaus mit Betongleitkernen, das vom Wind angeströmt und damit stochastisch belastet wird (vgl. [20], [15]). Der Wind soll senkrecht auf die Hausfläche von 120,0 m Breite und 60,0 m Höhe auftreffen. Das Bauwerk wird in sechs gleiche Höhenbereiche aufgliedert, und es sei vorausgesetzt, daß der Wind innerhalb eines gesamten Höhenbereiches die gleichen Eigenschaften besitzt. Der Staudruck $\bar{p}(x, t)$ des Windes im Höhenbereich i wird durch gemessene Werte einer Realisierung dieses ergodischen, normalverteilten stochastischen Prozesses zu diskreten Zeitpunkten t_j (vgl. [21]) erfaßt. Den Berechnungen liegt die nichtlineare Spannungs-Dehnungs-Beziehung $\sigma = E\epsilon(1 - K^2\epsilon^2)$, $K = 500$, $E = 2,0 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ zugrunde. Zu Vergleichszwecken ist der lineare Fall mitberechnet.

In Tabelle 1 sind die statistischen Kennwerte der gemessenen Staudruckwerte des Windes im Höhenbereich i zusammengestellt.

In Bild 1 ist auf der oberen Hälfte ein Ausschnitt einer Realisierung des Staudruckes des Windes im Höhenbereich 5 aufgetragen.

Die bei den Berechnungen erhaltenen statistischen Kennwerte der maximalen Spannungen $\sigma_{\max}(t)$ und deren zeitliche Ableitungen $\dot{\sigma}_{\max}(t)$ sind für den linearen und nichtlinearen Fall in Tabelle 2 aufgeführt.

Ein Ausschnitt aus einer erhaltenen Realisierung der maximalen Spannung am Fuße des Betonbalkens ist auf der unteren Hälfte des Bildes 2 dargestellt.

Tabelle 1

i	1	2	3	4	5	6
$E[\bar{p}(x_i, t)]$ N/m ²	146,0	201,5	338,7	421,6	499,3	535,3
$\sigma_p(x_i, t)$ N/m ²	52,1	48,2	47,5	25,1	22,0	38,2

Tabelle 2

	$E[\sigma_{\max}(t)]$ N/m ²	$\sigma_{\sigma_{\max}(t)}$ N/m ²	$E[\dot{\sigma}_{\max}(t)]$ N/m ² · sec	$\sigma_{\dot{\sigma}_{\max}(t)}$ N/m ² · sec
linearer Fall	$10,50 \cdot 10^6$	$0,67 \cdot 10^6$	$7,54 \cdot 10^4$	$1,72 \cdot 10^6$
nichtlin. Fall	$9,74 \cdot 10^6$	$0,53 \cdot 10^6$	$6,45 \cdot 10^4$	$1,34 \cdot 10^6$

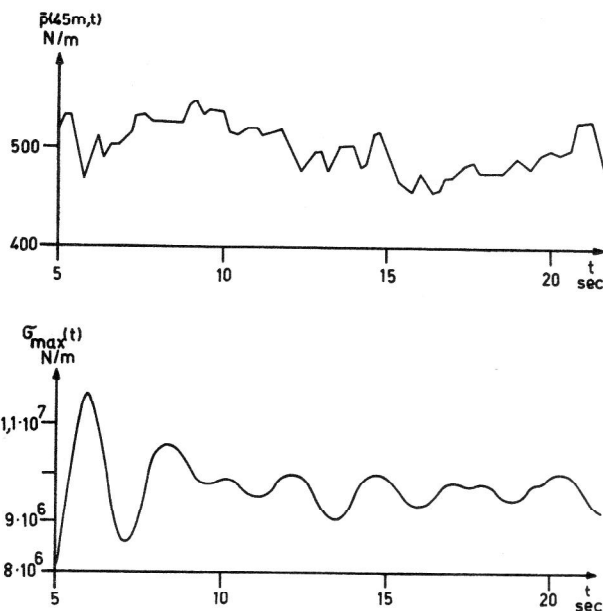


Bild 1

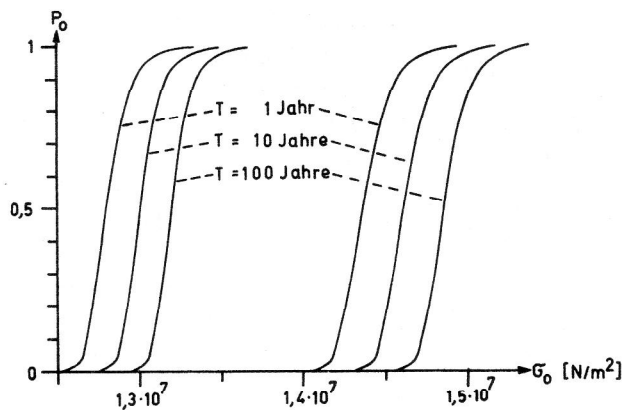


Bild 2

Entsprechend dem obigen Vorgehen wurden für das untersuchte Bauwerk im linearen und nichtlinearen Fall die Wahrscheinlichkeiten $P_{01}(\sigma_0; 0, T)$ dafür berechnet, daß die maximalen Spannungen $\sigma_{\max}(t)$ im Zeitintervall $[0, T)$ einen vorgegebenen Wert σ_0 nicht überschreiten. Die in beiden Fällen ermittelten Kurven sind im Bild 2 aufgezeichnet. Dabei bedeutet z. B. die Wahrscheinlichkeit $P_0 = 0,99$ im nichtlinearen Fall, daß bei einem vorgegebenen Nutzungszeitraum von 100 Jahren für die maximalen Spannungen bei 100 gleichartigen Fällen einmal eine Überschreitung des Niveaus $\sigma_0 = 1,355 \cdot 10^7$ N/m² zu erwarten ist.

3.2. Ermüdungsschadensakkumulation

Unter dem Begriff der Schadensakkumulationshypothesen (SH) seien hier alle Ansätze verstanden, die auf der Grundlage der Wöhlerkurve die Berechnung der Lebensdauer eines Bauteils bei zyklischer Beanspruchung mit veränderlicher Amplitude zum Inhalt haben. Die Beanspruchungsamplitude des n-ten Zyklus sei $S(n)$, die Wöhlerkurve sei durch $N(S)$ gegeben. Das Ziel ist, mit möglichst wenig zusätzlicher, über die Kenntnis der Wöhlerkurve hinausgehenden Informationen (bezüglich des Schädigungsverhaltens des betrachteten Bauteils) für eine möglichst große Klasse von Funktionen $S(n)$ die Lebensdauer L berechnen zu können. Gestützt auf Ergebnisse von Palmgren bei der Berechnung der Lebensdauer von Kugellagern wurde von Miner die erste und wegen ihrer Einfachheit noch heute gebräuchlichste SH angegeben [22]. Typisch für diese und andere solcher SH ist, daß die Existenz eines die Schädigung charakterisierenden Maßes D vorausgesetzt wird und eine Annahme $D = f(n, S(n))$ über den Verlauf von D in Abhängigkeit von der Schwingspielzahl n bei konstanter Beanspruchungsamplitude S getroffen wird. Zur Einordnung vorhandener und Aufstellung neuer derartiger SH bietet sich das Konzept eines allgemeinen Schadensmaßes (vgl. auch [23], [14]) mit folgenden Voraussetzungen an:

A) Der Schädigungsgrad eines Bauteils infolge zyklischer Beanspruchung ist durch eine skalare Größe D charakterisierbar mit der Normierung $D = 0$ für den ungeschädigten Zustand und $D = 1$ im Augenblick des Bruches.

B) Der Schadenszuwachs dD im n -ten Zyklus ist abhängig vom bis dahin erreichten Schaden D und von der Amplitude $S(n)$, also

$$\frac{dD}{dn} = F(D, S(n)) \quad (14)$$

mit $F(D, S) > 0$ für $S > S_d$, wobei S_d die Dauerfestigkeit bezeichnet.

Unter diesen Voraussetzungen läßt sich folgendes zeigen (s. [13], [26]):

a) Verschiedene Funktionen F in (14) können für beliebige Beanspruchungsverläufe $S(n)$ die gleiche Lebensdauer L ergeben (so z. B.

$$\frac{dD}{dn} = N^{-1}(S) \text{ mit } D(L) = 1 \text{ und}$$

$$\frac{dD^*}{dn} = N^{-1}(S) \kappa D^* (1 - \kappa^{-1})$$

mit κ als positive Konstante und $D^*(L) = 1$). Die bez. dieser Eigenschaft gebildeten Äquivalenzklassen von Gleichungen (14) repräsentieren jeweils eine SH. Der Verlauf der fiktiven, experimentell nicht zugänglichen Größe D bleibt dabei unbestimmt.

b) Zur Identifikation einer SH genügen die Ergebnisse aller Zweistufenversuche mit einer festen Vorbeanspruchungsstufe S_1 . An weiteren Zweistufenversuchen oder an k -Stufenversuchen mit $k > 2$ können die Voraussetzungen A, B überprüft werden (unter einem k -Stufenversuch soll hier die Vorbeanspruchung in $k-1$ Spannungstufen und die Ermittlung der Restschwingungszahl in einer k -ten Stufe verstanden werden).

c) Reihenfolgeunabhängigkeit und Miner-Hypothese sind einander äquivalent. Sie werden durch alle kinetischen Schadensgleichungen der Produktform

$$\frac{dD}{dn} = F_1(D) F_2(S(n)) \quad (15)$$

repräsentiert. Als „ k -Stufenformel“ ergibt sich somit aus (15) unter Beachtung der Wöhlerkurve $S^m N = \text{const}$ und $S(n) = S_i$ für

$$n_{i-1} < n < n_i; n_i = n_i - n_{i-1}, i = 1, 2, \dots, k$$

$$\text{immer } \sum_{i=1}^k n_i N^{-1}(S_i) = 1.$$

Es sei hier noch erwähnt, daß

$$F(D, S(n)) = -(1-D)^{1+m \log \frac{S}{S^*}}$$

$$\left(\frac{S}{S^*}\right)^m (N^* m \log \frac{S}{S^*})^{-1}$$

mit $P(S^*, N^*)$ als ausgewählten Punkt der Wöhlerkurve die „ k -Stufenformel“ der in [24] in grafischer Form vorgeschlagenen SH liefert. Vergleiche mit Versuchen zeigen, daß ebenfalls gut der Einfluß der Beanspruchungsgeschichte auf die Lebensdauer widerspiegelt wird durch die SH

$$F(D, S(n)) = - \left\{ D + \left[\left(\frac{S}{S^*}\right)^{-m} - 1 \right]^{-1} \right\}^m \left(\frac{S}{S^*}\right)^m N^* \ln \frac{S}{S^*}.$$

Für stochastische Beanspruchungen in Form eines zentrierten Schmalbandprozesses $\dot{Z}(t)$ – dessen zweite Ableitung $\ddot{Z}(t)$ nach t existiert – geht (14) unter Berücksichtigung von A) über in das stochastische Anfangswertproblem

$$\frac{dD}{dt} = - \ddot{Z}(t) \delta(\dot{Z}(t)) 1(\dot{Z}(t) - S_d) F(D, \dot{Z}(t)) \quad (16)$$

$$D(0) = 0$$

mit der Normierungsbedingung $D(L) = 1$; $\delta(\cdot)$ als Diracsche Deltafunktion, $1(\cdot)$ als Einheitssprungfunktion und der Zufallsvariablen L , die die Lebensdauer bezeichnet. Wie hieraus ersichtlich, gelingt die Aufstellung einer analytischen Beziehung für L nur in dem Sonderfall

$$F(D, \dot{Z}(t)) = F_1(D) F_2(\dot{Z}(t)), \text{ d. h. unter Zugrundelegung}$$

der Minerhypothese. Diese voraussetzend, folgt durch Integration von (16) und anschließender Erwartungswertbildung

$$\int_0^1 \frac{dD}{F_1(D)} = - E \left\{ \int_0^L \ddot{Z}(t) \delta(\dot{Z}(t)) 1(\dot{Z}(t) - S_d) F_2(\dot{Z}(t)) dt \right\}. \text{ Mit} \quad (17)$$

$M L = \overset{\circ}{L} + m_L$ und unter der Annahme $\sigma_L = (E[\overset{\circ}{L}^2])^{\frac{1}{2}} \ll E[L] = m_L$ ergibt sich aus (17) für stationäre, zentrierte, normalverteilte Schmalbandprozesse $\dot{Z}(t)$ die Formel von Miles zur Abschätzung der mittleren Lebensdauer m_L (vgl. [6]).

Insbesondere für die Phase des stabilen Rißwachstums bestehen enge Berührungspunkte zwischen dem „ ΔK -Konzept“ und den kinetischen Schadensgleichungen (14). So erhält man z. B. ausgehend von Rißwachstumsbeziehungen der Form

$$\frac{da}{dn} = \tilde{F}_1(a) \tilde{F}_2(S(n)) \quad (18)$$

mit $a(n_0) = a_0$ für $S = \text{const}$

$$a = \Phi(n - n_0) \tilde{F}_2(S) + \Phi^{-1}(a_0)$$

und hieraus weiter bei einer k-Stufenbeanspruchung

$$\sum_{i=1}^k \frac{\tilde{F}_2(S_i) (n_i - n_0)}{\Phi^{-1} \left\{ \Phi \left[\tilde{F}_2(S_i) (N_i - n_0) + \Phi^{-1}(a_0) \right] + \alpha \left[g(n_k - n_0) - g(N_i - n_0) \right] \right\} - \Phi^{-1}(a_0)} = 1 \quad (19)$$

Dabei haben wir angenommen, daß die Anfangsrißlänge a_0 unabhängig von der Beanspruchungsamplitude ist und daß die kritische Rißlänge a_{kr} eine mit der Schwingungszahl monoton wachsende Funktion darstellt, die sich durch $a_{kr} = a_c + \alpha g(n - n_0)$, $a_c = \text{const}$ beschreiben läßt. Für $\alpha = 0$ geht (19) in die Minerhypothese über. Berücksichtigt man (15), so ist dieses Resultat auch leicht erkennbar aus (18), wenn $D = \frac{a}{a_{kr}}$,

$a_0 \leq a \leq a_{kr} = \text{const}$ gesetzt wird.

Abschließend sei noch darauf hingewiesen, daß die kinetischen Schadensgleichungen (14) nur für Beanspruchungen oberhalb von S_d Lebensdauerberechnungen gestatten. Im Hinblick auf die Erfordernisse bei praktischen Dimensionierungsaufgaben müßten sie, ähnlich dem Vorgehen in [25] durch einen Ansatz für $S_d(D)$ zur Beschreibung des Absinkens der Dauerfestigkeit ergänzt werden. Jedoch gilt heute beispielsweise die Voraussetzung der Monotonie für $S_d(D)$ nicht mehr als gesichert.

LITERATUR

- [1] Crandall, S. H., Mark, W. D.: Random Vibration in Mechanical Systems, Academic Press New York - London, 1963.
- [2] Bolotin, W. W.: Statistische Methoden in der Baumechanik (russ.), Moskau 1965.
- [3] Bolotin, W. W.: Anwendung der Methoden der Theorie der Wahrscheinlichkeit und der Zuverlässigkeitstheorie bei Bauwerksberechnungen (russ. 1971).
- [4] Lin, Y. K.: Probabilistic Theory of Structural Dynamics, Mc Graw-Hill Book Company, New York 1967.
- [5] Parkus, H.: Random Processes in Mechanical Sciences, Udine 1969.
- [6] Heinrich, W., Hennig, K.: Zufallsschwingungen mechanischer Systeme, Akademie-Verlag, Berlin 1977.
- [7] Murzewski, J.: Sicherheit von Baukonstruktionen, VEB Verlag für das Bauwesen, Berlin 1974.
- [8] Kantorowitsch, L. W., Krylow, W. I.: Näherungsmethoden der höheren Analysis, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1956.
- [9] Michlin, S. G.: Variationsmethoden der mathematischen Physik, Akademie-Verlag, Berlin 1962.
- [10] Strang, G., Fix, G. I.: An Analysis of the Finite Element Method. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J. 1973.
- [11] Oden, J. T.: Finite Elements of Nonlinear Continua, Mc Graw-Hill Book Company, New York 1972.
- [12] Renger, A., Gupta, K. N.: Ein programmiertes und allgemeingültiges Berechnungsverfahren zur Bestimmung des dynamischen Verhaltens von linearen Schwingungssystemen mit vielen Freiheitsgraden bei stationärer Zufalls-erregung. Wiss. Z. Techn. Hochsch. Magdeburg 15 (1971), S. 589 - 601
- [13] Hennig, K., Friedrich, H., Mauersberger, G., Heinrich, W.: Konzeption zur Arbeit auf dem Gebiet der Sicherheit und Zuverlässigkeit im Maschinenbau und Bauwesen, Berlin 1978 (vgl. auch zweite überarbeitete Fassung „Studie zur Arbeit auf ausgewählten Gebieten der Sicherheit und

$(n_1, S_1, \dots, n_k, S_k)$ die Schadensakkumulationsgleichung

- Zuverlässigkeit im Maschinenbau und Bauwesen, Berlin 1979).
- [14] Bolotin, W. W.: Statistische Methoden in der Baumechanik (Übersetzung aus dem Russischen), Schriftenreihe der Bau-forschung, Reihe Technik und Organisation, Nr. 44, Deutsche Bauinformation, Berlin 1972.
 - [15] Friedrich, H.: Zur Berechnung von Versagenswahrscheinlichkeiten bei nichtlinearen Schwingungssystemen, Proceedings of the VIIIth International Conference of Nonlinear Oscillations, Prag 1978, S. 257 - 262.
 - [16] Hennig, K.: Zur Berechnung von nichtlinearen fremd-erregten Zufallsschwingungen fester Kontinua, Proceedings of the VIIIth International Conference of Nonlinear Oscillations, Prag 1978, S. 315 - 324.
 - [17] Hennig, K., Friedrich, H., Knöfel, L.: Berechnung von fremd-erregten Zufallsschwingungen fester Kontinua, Maschinenbautechnik 26 (1977), 11, S. 496 - 504.
 - [18] Friedrich, H., Hennig, K.: Zur Berechnung von Überschreitenswahrscheinlichkeiten stochastisch beanspruchter mechanischer Systeme. ZIMM, Preprint P - 42/79.
 - [19] Lin, Y. K.: First-excursion failure of randomly excited structures. AIAA-Journal 8 (1970), 4, S. 720 - 725.
 - [20] Knöfel, L.: Zur Berechnung nichtlinearer Schwingungen von Stabtragwerken, ICNO 78, Proceedings, S. 397 - 402.
 - [21] Trätner, A.: Ein Beitrag zur Erfassung stochastischer Lastwirkungen auf Bauwerke am Beispiel des natürlichen Windes. Diss. A an der Techn. Hochsch. Magdeburg, 1978.
 - [22] Miner, N. A.: Cumulative Damage in Fatigue, Journ. Appl. Mech. Trans. ASME 12 (1945), S. 159 - 164.
 - [23] Itagaki, H., Shinozoki, M., Freudenthal, A. M.: Reliability of Single- and Multi-member Structure subjected to Fluctuating Load. Selected papers (from J. S. N. A. Japan, vol. 123, Juni 1965) vol. 8, 1971, S. 99 - 115.
 - [24] Schott, G.: Vorschlag eines Verfahrens zur Berechnung der Lebensdauer bei Mehrstufen- bzw. Kollektivbelastung. Vorträge zum Problemseminar Werkstoffermüdung der Techn. Univ. Dresden, Juni 1976, S. 71 - 107.
 - [25] Gatts, R. R.: Cumulative Fatigue Damage with Random Loading, Trans. ASME, J. Basic Engng. 84 (1962), 9, S. 403 - 409.
 - [26] Mauersberger, G.: Konzept eines allgemeinen Schadensmaßes. Unveröffentlichter Forschungsbericht des ZIMM der AdW 1979.
 - [27] Friedrich, H.: Analytische und numerische Untersuchungen von nichtlinearen, stochastisch fremd-erregten Schwingungssystemen, Diss. B an der Techn. Hochsch. Magdeburg, 1976.

Anschrift des Verfassers:

Prof. Dr. Klaus Hennig,
Zentralinstitut für Mathematik und
Mechanik der Akademie der
Wissenschaften der DDR,
108 Berlin, Mohrenstr. 39