

Das logarithmische Wandgesetz turbulenter Grenzschichten bei positiven Druckkennzahlen

M. Hoffmeister

Die Auswertung einer Reihe von Experimentalarbeiten zeigt die annähernde Konstanz des logarithmischen Wandgesetzes bis zu mäßigen positiven Druckkennzahlen [2]. Dieser Sachverhalt kann durch die Einführung einer mit der Wurzel aus dem Verhältnis der lokalen Schubspannung zur Wandschubspannung modifizierten Mischungswegverteilung oder einer unveränderten Mischungswegverteilung nicht ausreichend erklärt werden. Eine neuartige Abschlußhypothese liefert unter Einbeziehung gewisser Wandrauigkeitseffekte einfache explizite Näherungsbeziehungen für die wandnahen Mischungswegverteilungen mit der Druckkennzahl als Parameter. Damit und unter Berücksichtigung der von der Druckkennzahl abhängigen Lage des Wendepunktes im mittleren Geschwindigkeitsprofil kann das beobachtete Verhalten des logarithmischen Wandgesetzes approximiert werden.

0. Abgrenzung und Problemstellung

In der Theorie turbulenter Wandgrenzschichten nimmt das logarithmische Wandgesetz nach wie vor eine zentrale Stellung ein. Es wird gewöhnlich in der Form

$$\varphi = A \ln \eta + B \quad (0.1)$$

mit den Ähnlichkeitskoordinaten

$$\varphi = \frac{\bar{c}_1}{v_0^*}; \quad \eta = \frac{x_2 v_0^*}{\nu} \quad (0.2)$$

angegeben. Hierin bedeuten \bar{c}_1 die mittlere Geschwindigkeit in der Hauptströmungsrichtung, x_2 den Wandabstand, $\nu (> 0)$ die kinematische Zähigkeit des Mediums und $v_0^* (> 0)$ die Wandschubspannungsgeschwindigkeit. Die folgenden Ausführungen beziehen sich auf zweidimensionale stationäre Grenzschichtentwicklungen entlang ungekrümmter Wände ohne äußere Massenkräfte. Das Strömungsmedium soll inkompressibel, homogen, isotherm und von Newtonschem Charakter sein.

Herleitung und Begründung von (0.1) können auf unterschiedliche Weise vorgenommen werden, stets treten zwei von vornherein nicht näher bestimmte Parameter A und B auf. Während man für A – oft auch als reziproke von Kármán-Konstante eingeführt – unabhängig von der Wandrauigkeit empirische Werte von $2,5 \pm 0,4$ findet, ergibt sich bei hydraulisch glatten Wänden ein Bereich der experimentellen Befunde für B von $5,0 \pm 1,3$ [1]. Darüber hinaus hängt der additive Parameter von Größe und Art einer etwa vorhandenen Wandrauigkeit ab.

Über die Auswirkungen von Gradienten des statischen Druckes in der Hauptströmungsrichtung – vor allem, wenn sie positiv sind – und von gleichgerichteten Beschleunigungskräften auf (0.1) gibt es zwei unterschiedliche Konzeptionen, die in [2] einer näheren Betrachtung unterzogen worden sind. Die unmodifizierte Mischungswegkonzeption, die z. B. in [3] konsequent angewandt wird, führt zu einer Veränderung von (0.1) im gesamten wandnahen Bereich.

Demgegenüber steht die Wandgesetzkonzeption, die von einer unveränderten Gültigkeit von (0.1) im wandnahen Bereich ausgeht, wobei mit zunehmenden Gradienten des statischen Druckes und – gegebenenfalls – ent-

sprechenden Beschleunigungskräften lediglich ein wachsendes Eindringen der Außen- oder Mittengesetzmaßigkeiten der Grenzschichten in die wandnahen Zonen zu verzeichnen ist. Auf der Grundlage verschiedener Experimentalarbeiten gelangen die Autoren in [2] zu dem Schluß, daß die Wandgesetzkonzeption umfassender anwendbar ist als die unmodifizierte Mischungswegkonzeption. Führt man die Mischungswegdefinition in dimensionsloser Form mit

$$\frac{v^*}{v_0^*} = \frac{v^*}{v_0^*}(\eta) = l_m^+ \frac{d\varphi}{d\eta} \quad (0.3)$$

ein, so folgt mit (0.1)

$$l_m^+ = \frac{1}{A} \eta \frac{v^*}{v_0^*} \quad (0.4)$$

Hierin bedeuten

$$v^* = \left(\frac{\tau}{\rho} \right)^{1/2} (> 0); \quad l_m^+ = \frac{l_m v_0^*}{\nu}$$

mit τ als turbulenter Schubspannung, l_m als Mischungsweg und $\rho (> 0)$ als Dichte des Mediums.

Nur im Falle $\frac{v^*}{v_0^*} = 1$, d. h. bei verschwindenden Gra-

dienten des statischen Druckes und verschwindenden Beschleunigungskräften stimmt (0.4) mit dem üblichen Mischungswegansatz

$$l^+ = \frac{\eta}{A} \quad (0.5)$$

überein. Wir wollen

$$l_m^+ = l^+ \frac{v^*}{v_0^*} \quad (0.6)$$

als modifizierten Mischungsweg für das Gebiet des logarithmischen Wandgesetzes bezeichnen (Index m). Während l^+ nach (0.5) mit festem A unabhängig von Druck- und Beschleunigungskräften ist und seine Anwen-

zung bei $\frac{v^*}{v_0^*} \neq 1$

zu einer Veränderung von (0.1) führt – z. B. [3] –, liefert der modifizierte Mischungsweg l_m^+ nach (0.6) bei festem A stets die Gesetzmäßigkeit (0.1). Allerdings kann daraus für den letzten Fall nicht – wie in [2] geschehen – die Folgerung einer Äquivalenz zwischen (0.1) und (0.6) gezogen werden; denn die auftretende Integrationskonstante B kann zunächst durchaus noch von druck- und beschleunigungsabhängigen Parametern beeinflusst werden. Anders ausgedrückt, nur wenn die mittlere Geschwindigkeitsverteilung von der Wand zum Gültigkeitsbereich des logarithmischen Wandgesetzes hin ebenfalls von Druck- und Beschleunigungswirkungen – zumindest in ausreichender Näherung – unberührt bleibt, ist die Äquivalenz zwischen (0.1) und (0.6) vollständig. Mit dieser Problematik beschäftigt sich die Arbeit im Folgenden.

1. Zur Anwendung des modifizierten Mischungsweges auf die wandnahen Schichten

Bezeichnen wir den Verknüpfungspunkt zwischen der mittleren Geschwindigkeitsverteilung in den wandnahen Schichten und dem logarithmischen Wandgesetz mit η_1 , so findet man in der Fachliteratur Angaben $\eta_1 \approx 30 \div 70$. Für das Intervall $0 \leq \eta \lesssim \eta_1$ können die konvektiven Beschleunigungsglieder in der Bewegungsgleichung mit guter Näherung vernachlässigt werden – vergl. [2] – und man erhält in dimensionsloser Form

$$\frac{\tau}{\tau_0} = \left(\frac{v^*}{v_0^*}\right)^2 = 1 + \alpha \eta \quad (0 \leq \eta \lesssim \eta_1) \quad (1.1)$$

mit der wandbezogenen Druckkennzahl

$$\alpha = \frac{1}{\rho} \frac{d\bar{p}}{dx_1} (v_0^*)^{-3} \nu, \quad (1.2)$$

die aus dem Gradienten des mittleren statischen Druckes $\bar{p}(x_1)$ in der Hauptströmungsrichtung x_1 gebildet wird. Für voll entwickelte turbulente Couetteströmungen gilt (1.1) exakt über den ganzen Kanalquerschnitt. Betont werden muß, daß hier und im folgenden mit τ die gesamte Scherspannung, gebildet aus turbulenten und viskosen Anteilen, bezeichnet wird. Damit folgt anstelle von (0.3)

$$\frac{\tau}{\tau_0} = \left(\frac{v^*}{v_0^*}\right)^2 = \left(1 + l_m^{+2} \frac{d\varphi}{d\eta}\right) \frac{d\varphi}{d\eta}. \quad (1.3)$$

Eine einfache Umstellung liefert aus (0.6), (1.3)

$$\frac{d\varphi}{d\eta} = \frac{1}{2l^{+2} \left(\frac{v^*}{v_0^*}\right)^2} \left(-1 + \left(1 + 4l^{+2} \left(\frac{v^*}{v_0^*}\right)^4\right)^{1/2}\right), \quad (1.4)$$

wobei nur das physikalisch sinnvolle Vorzeichen der Wurzel verwendet wird ($\frac{d\varphi}{d\eta} > 0$). Ohne Modifikation des Mischungsweges würde sich

$$\frac{d\varphi^{(1)}}{d\eta} = \frac{1}{2l^{+2}} \left(-1 + \left(1 + 4l^{+2} \left(\frac{v^*}{v_0^*}\right)^2\right)^{1/2}\right) \quad (1.5)$$

ergeben, wobei der obere Index an φ zur Unterscheidung von (1.4) dient.

Unabhängig davon, welcher spezielle Ansatz für l^+ genutzt werden soll, erhält man für große l^+ asymptotisch aus (1.4), (1.5) entsprechend dem Übergang in das Gebiet des logarithmischen Wandgesetzes

$$\lim_{l^+ \rightarrow \infty} \frac{d\varphi}{d\eta} \sim \frac{1}{l^+}; \quad (1.6)$$

$$\lim_{l^+ \rightarrow \infty} \frac{d\varphi^{(1)}}{d\eta} \sim \frac{1}{l^+} \frac{v^*}{v_0^*}. \quad (1.7)$$

Für kleine l^+ folgt analog

$$\lim_{l^+ \rightarrow 0} \frac{d\varphi}{d\eta} = \frac{v^*}{v_0^*}; \quad (1.8)$$

$$\lim_{l^+ \rightarrow 0} \frac{d\varphi^{(1)}}{d\eta} = \frac{v^*}{v_0^*}, \quad (1.9)$$

also eine Übereinstimmung bei Annäherung an die – hydraulisch glatte – Wand. Offenbar hängt die Neigung der mittleren Geschwindigkeitsprofile in der zähen Unterschicht und im Übergangsbereich wegen (1.1) stets von α ab.

Für $\alpha = 0$, d. h. $\frac{v^*}{v_0^*} \equiv 1$, liefern (1.4), (1.5) das gleiche Resultat

$$\frac{d\varphi^{(2)}}{d\eta} = \frac{1}{2l^{+2}} \left(-1 + (1 + 4l^{+2})^{1/2}\right). \quad (1.10)$$

Die zugehörige mittlere Geschwindigkeitsverteilung, gekennzeichnet durch den oberen Index (2), eignet sich daher als Vergleichsnormale. Sie müßte auch als repräsentativ für ein universelles, α -unabhängiges Gesetz im gesamten wandnahen Bereich angesehen werden.

Unter Verwendung des bekannten und gebräuchlichen van Driest'schen Mischungswegansatzes für die wandnahe Strömung

$$l^+ = \frac{\eta}{A} \left(1 - \exp\left(-\frac{\eta}{a}\right)\right) \quad (a = \text{const}) \quad (1.11)$$

kann auf der Grundlage von (1.4), (1.5), (1.10) die Ungleichung

$$\frac{d\varphi^{(1)}}{d\eta} > \frac{d\varphi}{d\eta} > \frac{d\varphi^{(2)}}{d\eta} \quad \left(\frac{v^*}{v_0^*} > 1\right) \quad (1.12)$$

für jedes η bewiesen werden. Hieraus ergibt sich mit (1.1)

$$\frac{d\varphi^{(1)}}{d\eta} \approx \frac{d\varphi}{d\eta} \approx \frac{d\varphi^{(2)}}{d\eta} \quad \left(\eta > 0, \alpha \approx 0\right) \quad (1.13)$$

und weiter wegen (1.6) lediglich asymptotisch

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{d\varphi}{d\eta} \sim \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{d\varphi^{(2)}}{d\eta} \quad (1.14)$$

Die Integration mit der gemeinsamen Randbedingung

$$\eta = 0 \quad \varphi^{(1)} = \varphi = \varphi^{(2)} = 0 \quad (1.15)$$

liefert aus (1.13)

$$\varphi^{(1)}(\eta) \geq \varphi(\eta) \geq \varphi^{(2)}(\eta), \quad \left(\begin{array}{l} \eta > 0, \\ \alpha \geq 0 \end{array} \right) \quad (1.16)$$

d. h. der modifizierte Mischungsweg entsprechend (0.6) führt im Vergleich zu (1.5) zwar zu Lösungskurven, die näher bei einer als universell gedachten Geschwindigkeitsverteilung – hier $\varphi^{(2)}(\eta)$ – liegen, sie fallen jedoch nicht mit dieser zusammen. Für große η schlägt sich dieser Sachverhalt in

$$B(\alpha) \geq B^{(2)} \quad (\alpha \geq 0) \quad (1.17)$$

nieder, wobei $B^{(2)}$ die zu (1.10) gehörige additive Konstante im logarithmischen Wandgesetz darstellt.

Insgesamt ist festzustellen, daß mit Hilfe des modifizierten Mischungswegansatzes die Druckzahlabhängigkeit der mittleren Geschwindigkeitsprofile im gesamten wandnahen Bereich, also für die zähe Unterschicht, für das Übergangsgebiet und den Bereich des logarithmischen Wandgesetzes, zwar herabgesetzt aber nicht beseitigt werden kann. Für den Fall der verschwindenden Wandschubspannung ($\tau_0 \rightarrow 0$) entartet der Ansatz (0.6). Abgesehen von der Frage, in welchen Grenzen sowie mit welcher Genauigkeit B in (0.1) als unabhängig von α angesehen werden kann, bleibt die physikalische Deutung dieser Erscheinung zunächst offen. Im folgenden wird eine Erklärung mit Hilfe einer neuartigen Abschlußhypothese versucht.

2. Schlußfolgerungen aus Potenzgesetzen für die wandnahen Schichten

Eine neuartige Abschlußhypothese für ausgebildete zweidimensionale turbulente Scherströmungen hat phänomenologische Aussagen über die lokal definierte Ähnlichkeitskennzahl

$$K^* = \frac{\partial \tau}{\partial x_2} \frac{\partial \bar{c}_1}{\partial x_2} \tau^{-1} \left(\frac{\partial^2 \bar{c}_1}{\partial x_2^2} \right)^{-1} = \frac{\nu + \nu_\Omega}{\nu + \nu_\tau} \quad (2.1)$$

zum Inhalt [4], [5]. Hierin bedeuten ν_Ω die Wirbelzähigkeit für den Rotationstransport und ν_τ die Wirbelzähigkeit für den Impulstransport. Für die wandnahen Schichten – Index w – ergeben sich mit der einfachen Annahme, daß K_w^* unabhängig von x_2 ist, Potenzgesetze für die mittleren Geschwindigkeitsverteilungen

$$\varphi = \alpha^{-1} \left(\frac{1}{K_w^*} + 1 \right)^{-1} \left\{ (1 + \alpha \eta)^{\frac{1}{K_w^*} + 1} - 1 \right\} \quad (2.2)$$

$(0 \leq \eta \leq \eta_1)$

Dabei fanden (1.1) und die Randbedingungen

$$\eta = 0 \quad \varphi = 0; \quad \frac{d\varphi}{d\eta} = 1 \quad (2.3)$$

Verwendung. Ferner können gewisse Typen von Rauigkeitsströmungen in die Betrachtungen einbezogen werden, wenn Druckkennzahl und dimensionsloser Wandabstand durch

$$\alpha = \frac{1}{\rho} \frac{d\bar{p}}{dx_1} (\nu + \nu_{\tau 0}) \nu_0^{*-3}; \quad \eta = x_2 \nu_0^* (\nu + \nu_{\tau 0})^{-1} \quad (2.4)$$

definiert sind [5]. Die Wirbelzähigkeit für den Impulstransport an der rauhen Wand $\nu_{\tau 0}$ ergibt sich aus

$$\nu + \nu_{\tau 0} = \frac{\nu}{2} \left(1 + (1 + 4 \text{Re}_S^2)^{1/2} \right) \quad (2.5)$$

mit der Rauigkeitsreynoldszahl $\text{Re}_S = \gamma S \nu_0^* \nu^{-1}$.

$S (\geq 0)$ ist eine charakteristische Abmessung der Rauigkeit und

$\gamma (> 0)$ hängt von der Geometrie der Rauigkeit ab.

Untersucht man den Grenzfall $\alpha \rightarrow 0$ für (2.2), so folgt, daß $K_w^* \sim \alpha$ für betragsmäßig kleine α -Zahlen gelten muß [5].

Wird für große positive Druckzahlen $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} K_w^* = -1$ gesetzt, so kann der einfache phänomenologische Ansatz

$$K_w^* = \frac{P_1 \alpha}{1 - P_1 \alpha} \quad (2.6)$$

als Ergänzung zu (2.2) konstruiert werden [5]. Einsetzen in (2.2) liefert

$$\varphi = \varphi(\alpha; \eta) = P_1 \left[(1 + \alpha \eta)^{\frac{1}{P_1 \alpha} - 1} - 1 \right] \quad (2.7)$$

$(0 \leq \eta \leq \eta_1)$

An η_1 soll (2.2) bzw. (2.7) in ein logarithmisches Gesetz der Form (0.1) übergehen. Prinzipiell können die Parameter A, B beide druckzahlabhängig sein. Nach dem vorliegenden Beobachtungsmaterial scheint jedoch der mögliche Einfluß auf A bei hinreichend großen Reynoldszahlen der betrachteten Grenzschichtströmungen, die für die Existenz einer logarithmischen Schicht vorausgesetzt werden müssen [6], geringer als auf B zu sein [2]. Wir nehmen A im folgenden als konstant an, vergl. auch [5].

Die Stetigkeit der Ableitungen $\frac{d\varphi}{d\eta}$ an η_1 liefert

$$\eta_1 (1 + \alpha \eta_1)^{\frac{1}{K_w^*}} = A \quad (2.8)$$

und die Stetigkeit der Funktionen

$$\check{B}(\alpha) = \alpha^{-1} \left(\frac{1}{K_w^*} + 1 \right)^{-1} \left\{ (1 + \alpha \eta_1)^{\frac{1}{K_w^*} + 1} - 1 \right\} - A \ln \eta_1, \quad (2.9)$$

also die Druckzahlabhängigkeit der additiven Konstanten in (0.1), wobei $\check{B}(0) = B$ gelten soll.

Die Auswertung der Beziehungen (2.8), (2.9) mit (2.6) unter Verwendung der Konstanten $P_1 = \frac{1}{\sqrt{16,7}}$; $A = 2,5$ zeigt Bild 1. Abweichend von [2] fällt $\check{B}(\alpha)$ schon bei mäßig positiven α -Zahlen fühlbar ab. Nach dem in [2] zitierten empirischen Material muß $\check{B}(\alpha)$ aber bis zu $\alpha \approx 0,08$ annähernd konstant sein und für größere Werte ansteigen. Offenbar

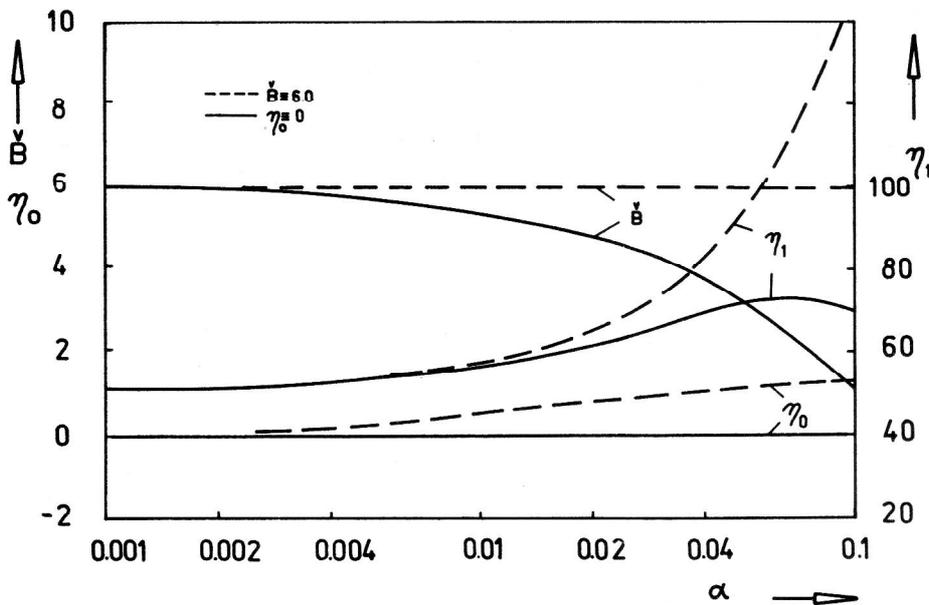


Bild 1
Einflußgrößen des logarithmischen
Wandgesetzes in Abhängig-
keit von der Druckkennzahl

werden mit dem Potenzgesetz (2.2) bzw. (2.7) in Verbindung mit (2.6) die mittleren Geschwindigkeitsverteilungen in den wandnahen Schichten nur bis zu wenig von null verschiedenen positiven Druckzahlen ausreichend beschrieben. Eine nähere Betrachtung zeigt, daß eine Ursache in der Vernachlässigung des wandnahen Wendepunktes in $\varphi(\alpha; \eta)$ für $\alpha > 0$ durch die Annahme eines von η unabhängigen K_w^* im ganzen Intervall $0 \leq \eta \leq \eta_1$ zu suchen ist. Speziell für hydraulisch glatte Wände ($Re_S \rightarrow 0$) gilt streng genommen, wenn der Spezialfall $\alpha = 0$ einmal ausgeklammert wird, wegen (2.1) mit an der Wand verschwindenden Wirbelzähigkeiten

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} K_w^* = K_{w0}^* = 1, \quad (2.10)$$

also ein i. a. von (2.6) verschiedener Wert. Obwohl dazu noch weitere Untersuchungen erforderlich sind, soll hier angenommen werden, daß (2.10) für die in diese Betrachtungen einbezogenen Rauheitsströmungen auch zutrifft.

Eine einfache Möglichkeit zum näherungsweisen Studium des mit dem wandnahen Wendepunkt verbundenen Effektes besteht in der Abtrennung einer dünnen, der Wand benachbarten Schicht von den Gesetzmäßigkeiten nach (2.2) bzw. (2.7) mit (2.6). Für diese Unterschicht soll wegen (2.10) $K_w^* \equiv 1$ gelten. Die zugehörige mittlere Geschwindigkeitsverteilung unter Einhaltung der Randbedingungen kann sofort aus (2.2) zu

$$\varphi = \frac{1}{2\alpha} \left[(1 + \alpha\eta)^2 - 1 \right] = \eta \left(1 + \frac{\alpha}{2} \eta \right) \quad (0 \leq \eta \leq \eta_0) \quad (2.11)$$

erhalten werden. Mit η_0 wird der Verknüpfungspunkt zum Gültigkeitsbereich von (2.6) im Intervall $\eta_0 \leq \eta \leq \eta_1$ bezeichnet.

Aus (2.11) folgt für die Unterschicht $\frac{d^2\varphi}{d\eta^2} \equiv \alpha$.

Da streng genommen – zumindest für hydraulisch glatte Wände – jede mittlere Geschwindigkeitsverteilung die

$$\text{Bedingung} \quad \left. \frac{d^2\varphi}{d\eta^2} \right|_{\eta=0} = \alpha$$

erfüllen muß, stellt (2.11) eine Approximation dar, die an $\eta = 0$ die korrekte Krümmung hat. An dieser Stelle muß darauf verwiesen werden, daß allein schon wegen der Druckzahlabhängigkeit der mittleren Geschwindigkeitsverteilungen für $\eta \rightarrow 0$ eine exakte Invarianz auch bei betragsmäßig kleinen α -Werten nicht vorliegen kann. Es wird sich stets nur um eine annähernde Druckzahlunabhängigkeit handeln.

Ohne Berücksichtigung der Randbedingungen an $\eta = 0$ lautet (2.2)

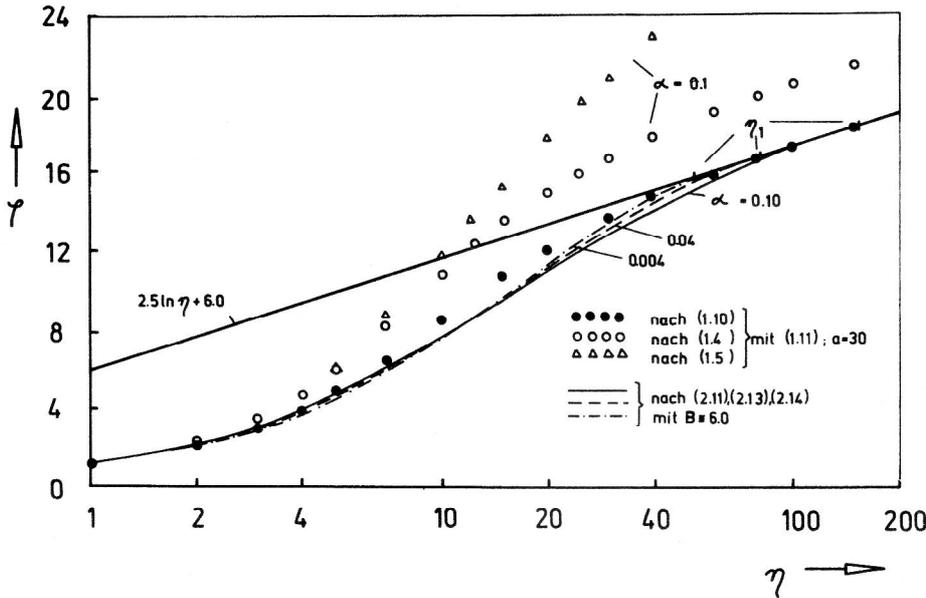
$$\varphi = D_1 \alpha^{-1} \left(\frac{1}{K_w^*} + 1 \right)^{-1} \left[(1 + \alpha\eta) \frac{1}{K_w^*} + 1 - 1 \right] + D_2. \quad (2.12)$$

Die Integrationskonstanten D_1 ; D_2 dienen zur Verknüpfung mit (2.11) an η_0 unter Einhaltung der Stetigkeit von φ und $\frac{d\varphi}{d\eta}$.

Es ergibt sich

$$\varphi = \frac{(1 + \alpha\eta_0)^2}{\alpha \left(\frac{1}{K_w^*} + 1 \right)} \left[\left(\frac{1 + \alpha\eta}{1 + \alpha\eta_0} \right)^{\frac{1}{K_w^*} + 1} - 1 \right] + \eta_0 \left(1 + \frac{\alpha}{2} \eta_0 \right). \quad (\eta_0 \leq \eta \leq \eta_1) \quad (2.13)$$

Bild 2
Wandnahe mittlere Geschwindigkeitsverteilungen in Abhängigkeit von der Druckkennzahl



Man überzeugt sich leicht, daß an η_0 ein Krümmungssprung im Profil der mittleren Geschwindigkeiten auftritt, der eine Folge der jeweils konstanten K_w^* -Werte in den Teilintervallen ist. Für $\alpha > 0$ ist damit auch ein Vorzeichenwechsel in

$$\frac{d^2 \varphi}{d\eta^2} \text{ an } \eta_0$$

verbunden, der den Wendepunktcharakter verdeutlicht.

Die Verknüpfung mit dem logarithmischen Wandgesetz $\varphi = A \ln \eta + \check{B}(\alpha)$ ($\eta_1 \leq \eta \leq \eta_2$) (2.14)

liefert anstelle von (2.8), (2.9) jetzt

$$\eta_1 (1 + \alpha \eta_1) \frac{1}{K_w^*} = A (1 + \alpha \eta_0) \frac{1}{K_w^*} - 1 \quad (2.15)$$

und

$$\check{B}(\alpha) = \frac{(1 + \alpha \eta_0)^2}{\alpha \left(\frac{1}{K_w^*} + 1 \right)} \left[\left(\frac{1 + \alpha \eta_1}{1 + \alpha \eta_0} \right)^{\frac{1}{K_w^*} + 1} - 1 \right] + \eta_0 \left(1 + \frac{\alpha}{2} \eta_0 \right) - A \ln \eta_1 \quad (2.16)$$

Die obere Grenze des Gültigkeitsbereiches η_2 hängt von den konkreten Strömungen im Außen- bzw. Mittenbereich ab und soll hier nicht weiter erörtert werden.

Aus (2.15), (2.16) mit (2.6) kann $\eta_0 = \eta_0(\alpha)$ für $\check{B}(\alpha) \equiv \check{B}(0) = B$ berechnet werden. Bild 1 enthält das Ergebnis für $A = 2,5$; $B = 6,0$; $P_1 = -16,7$. Offenbar kann die „Wanderung“ des Wendepunktes in Abhängigkeit von der Druckzahl zu einer annähernden Konstanz des additiven Parameters im logarithmischen Wandgesetz für ein gewisses Druckzahlintervall führen. Dabei ist bemerkenswert, daß η_0 für $0 \leq \alpha \leq 0,08$ maximal den

Wert 1 nur wenig überschreitet. Im Rahmen der derzeit verfügbaren Meßgenauigkeiten ist die Funktion $\eta_0(\alpha)$ direkt nicht überprüfbar. Einfacher wäre eine Verifikation des vorgestellten Modells über das Verhalten des Verknüpfungspunktes $\eta_1 = \eta_1(\alpha)$ denkbar. Allerdings würden sich auch hier hohe Anforderungen an die Meßgenauigkeit ergeben. Bild 1 zeigt eine Zunahme für wachsendes α im Vergleich zu (2.8), (2.9).

Verdeutlicht wird der gesamte Sachverhalt noch einmal im Bild 2. Die beobachtete annähernde Konstanz der additiven Konstanten im logarithmischen Wandgesetz (0.1) für das Druckzahlintervall $0 \leq \alpha \leq 0,08$ kann durch den α -Einfluß auf den turbulenten Austausch in der wandnahen Schicht $0 \leq \eta \leq \eta_1$ und auf die Lage des Wendepunktes η_0 erklärt werden. Dabei stellt die Modellierung der Strömung über jeweils konstante K_w^* -Werte eine sehr einfache Approximation dar, die vor allem die wesentlichen Effekte in einem gewissen Mittel zum Ausdruck bringt. Weitere Verbesserungen – auch an (2.6) – sind durchaus vorstellbar. Zum Vergleich enthält Bild 2 die Geschwindigkeitsverteilungen nach (1.4), (1.5) für

$\alpha = 0,1$ und nach (1.10) mit (1.11) aus einer numerischen Integration mit (1.15).

Abschließend zu diesem Abschnitt sollen die Beziehungen für die Wirbelzähigkeiten und Mischungsweglängen angegeben werden. Aus

$$\frac{\tau}{\tau_0} = \frac{\nu + \nu_\tau}{\nu + \nu_{\tau 0}} \frac{d\varphi}{d\eta} \quad (2.17)$$

folgt mit (1.1), (2.11), (2.13)

$$\frac{\nu + \nu_\tau}{\nu + \nu_{\tau 0}} \equiv 1, \quad (0 \leq \eta \leq \eta_0) \quad (2.18)$$

sowie

$$\frac{\nu + \nu_\tau}{\nu + \nu_{\tau 0}} = (1 + \alpha \eta_0)^{\frac{1}{K_w^*} - 1} (1 + \alpha \eta)^{-1} (1 - \frac{1}{K_w^*}) \quad (2.19)$$

$$(\eta_0 \leq \eta \leq \eta_1)$$

und entsprechend aus

$$\frac{\nu_\tau}{\nu + \nu_{\tau 0}} = l^+ \frac{d\varphi}{d\eta} \quad (l^+ > 0) \quad (2.20)$$

$$l^+ = \left(\frac{\nu_{\tau 0}}{\nu + \nu_{\tau 0}} \right)^{1/2} (1 + \alpha \eta)^{-1/2} \quad (2.21)$$

$$(0 \leq \eta \leq \eta_0)$$

sowie

$$l^+ = \left[\left(\frac{1 + \alpha \eta}{1 + \alpha \eta_0} \right)^{1 - \frac{1}{K_w^*}} - \frac{\nu}{\nu + \nu_{\tau 0}} \right]^{1/2} \times$$

$$\times (1 + \alpha \eta_0)^{\frac{1}{2K_w^*} - \frac{1}{2}} (1 + \alpha \eta)^{-\frac{1}{2K_w^*}} \quad (2.22)$$

$$(\eta_0 \leq \eta \leq \eta_1)$$

Zu den vorstehenden Beziehungen treten (2.5), (2.6) und $\eta_0(\alpha)$ nach Bild 1 für $0 \leq \alpha \leq 0,08$. Läßt man (1.1) auch noch für den Bereich des logarithmischen Wandgesetzes gelten, so hat man

$$\frac{\nu + \nu_\tau}{\nu + \nu_{\tau 0}} = \frac{1}{A} (1 + \alpha \eta) \eta \quad (\eta_1 \leq \eta \leq \eta_2) \quad (2.23)$$

sowie

$$l^+ = \left[\left(\frac{\eta}{A} \right)^2 (1 + \alpha \eta) - \frac{\eta}{A} \left(\frac{\nu}{\nu + \nu_{\tau 0}} \right) \right]^{1/2} \quad (2.24)$$

$$(\eta_1 \leq \eta \leq \eta_2)$$

Die Veranschaulichung des Druckzahleinflusses auf den Mischungsweg in den wandnahen Schichten enthält Bild 3 für hydraulisch glatte Wände ($Re_S = 0$). Der Mischungsweg nimmt mit α für feste η kräftig zu. Zum Vergleich enthält Bild 3 die auf (1.11) zurückgehenden modifizierten und unmodifizierten Abhängigkeiten.

3. Anmerkung zu dem Fall großer positiver Druckzahlen

Für große wandbezogene Druckzahlen und insbesondere für den Fall $\alpha \rightarrow \infty$ infolge $\nu_0^* \rightarrow 0$ bei endlichem

$\frac{d\bar{p}}{dx_1} (> 0)$ ist der Übergang zu den Ähnlichkeitskoordinaten

$$\bar{\varphi} = \bar{c}_1 \left[\frac{1}{\rho} \frac{d\bar{p}}{dx_1} (\nu + \nu_{\tau 0}) \right]^{-1/3};$$

$$\bar{\eta} = \bar{x}_2 \left[\frac{1}{\rho} \frac{d\bar{p}}{dx_1} (\nu + \nu_{\tau 0}) \right]^{1/3} (\nu + \nu_{\tau 0})^{-1} \quad (3.1)$$

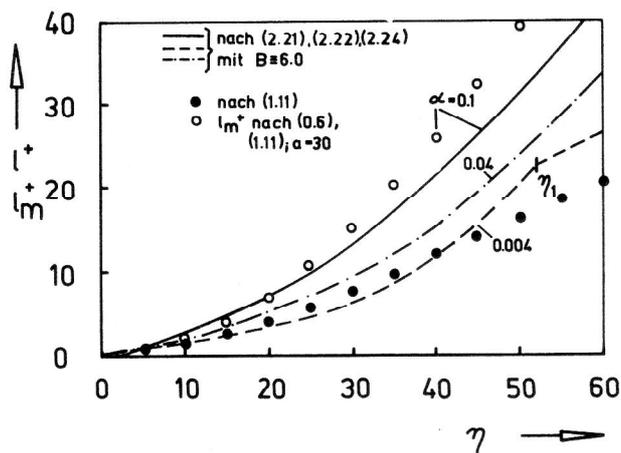


Bild 3
Wandnahe Mischungswegverteilungen in Abhängigkeit von der Druckkennzahl

zweckmäßig. Mit (2.4) bestehen die Transformationsbedingungen

$$\varphi = \tilde{\varphi} \alpha^{1/3}; \quad \eta = \tilde{\eta} \alpha^{-1/3} \quad (3.2)$$

Einsetzen in (2.13) liefert

$$\bar{\varphi} = \frac{\left(\frac{1}{\alpha^{2/3}} + \tilde{\eta}_0 \right)^2}{\frac{1}{K_w^*} + 1} \left[\left(\frac{1}{\alpha^{2/3}} + \tilde{\eta} \right)^{\frac{1}{K_w^*} + 1} - 1 \right] +$$

$$+ \tilde{\eta}_0 \left(\frac{1}{\alpha^{2/3}} + \frac{\tilde{\eta}_0}{2} \right) \cdot (\tilde{\eta}_0 \leq \tilde{\eta} \leq \tilde{\eta}_1) \quad (3.3)$$

Führt man den Grenzübergang $\alpha \rightarrow \infty$ mit (2.6) aus, so ergibt sich

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \bar{\varphi} = \frac{1}{2} \tilde{\eta}_0^2 + \tilde{\eta}_0^2 \ln \left(\frac{\tilde{\eta}}{\tilde{\eta}_0} \right) \quad (3.4)$$

in formaler Übereinstimmung mit [7]. Das war zu erwarten, weil dieser Grenzfall unter Berücksichtigung experimenteller Erfahrungen für den Ansatz (2.6) genutzt worden ist. Allerdings hat sich $\tilde{\eta}_0$ für $\alpha \rightarrow \infty$ in [7] in einem gewissen Umfang als abhängig von einer „äußeren“ Reynoldszahl erwiesen, die mit der Scherschichtdicke gebildet worden ist, während im Rahmen des hier entwickelten Modells eine derartige Abhängigkeit naturgemäß nicht auftreten kann.

In [7] ergab sich der logarithmische Bereich bei verschwindender Wandschubspannung aus den Mittengesetzen der turbulenten Couetteströmung, hier aus den wandnahen Schichten. Aus Mangel an Meßdaten über die der Wand unmittelbar benachbarten Gebiete im Falle $\tau_0 \rightarrow 0$ können die Abweichungen gegenwärtig nicht geklärt werden. Nach [7] gilt $\tilde{\eta}_0|_{\tau_0=0} \approx 3 \div 4$. Damit

und unter Berücksichtigung von Bild 1 kann eine phänomenologische Beziehung für $\eta_0(\alpha)$ bzw. $\tilde{\eta}_0(\alpha)$ für das ganze Intervall $0 \leq \alpha \leq \infty$ entwickelt werden, die mit (3.3), (2.6) Geschwindigkeitsprofile für den ablösenahen Bereich liefert. Hierauf kann an dieser Stelle nicht weiter eingegangen werden.

4. Zusammenfassung

Experimentelle Befunde zeigen, daß das Wandgesetz der mittleren Geschwindigkeitsverteilungen im Bereich $0 \leq \eta \leq \eta_2$ für $0 \leq \alpha \lesssim 0,08$ mit guter Näherung druckzahlunabhängig ist. Dieser Sachverhalt kann mit dem Mischungswegansatz nach van Driest für hydraulisch glatte Wände oder einer gewissen Modifikation desselben nicht ausreichend erklärt werden. Eine neuartige Abschlußhypothese liefert druckzahlabhängige Mischungswegverteilungen für die wandnahen Schichten und in Verbindung mit dem Verhalten des wandnahen Wendepunktes eine Deutung für den beobachteten Sachverhalt. Die entwickelten einfachen expliziten Näherungsbeziehungen schließen den Fall gewisser Rauigkeitseffekte ein und können als Grundlage für das Studium des Druckzahleinflusses auf den Wärme- und Stoffübergang in ebenen turbulenten Wandgrenzschichten dienen.

LITERATUR

- [1] Reynolds, A.J.: Turbulent Flows in Engineering. John Wiley & Sons, London, New York, Sydney, Toronto 1974, S. 187.
- [2] Galbraith, R.A.McD., Sjolander, S., Head, M.R.: Mixing Lengths in the Wall Region of Turbulent Boundary Layers. Aeronautical Quarterly 28 (1977) 2, pp. 97 – 110.
- [3] Szablewski, W.: Turbulente Scherströmungen. Schriftenreihe des Zentralinstituts für Mathematik und Mechanik bei der AdW der DDR, Heft 21. Akademie-Verlag, Berlin 1976.
- [4] Hoffmeister, M.: Über eine lokale Abschlußbedingung für ausgebildete turbulente Scherströmungen. ZAMM 56 (1976), T 414–419.
- [5] Hoffmeister, M.: Potenzgesetze für ebene turbulente Parallelströmungen und ihre physikalische Deutung. Tagung „Transportprozesse in turbulenten Strömungen“. (Eisenach 20. – 24. 11. 1978), Vorträge Heft II, S. 23 – 44. Report R–05/79 des Zentralinstituts für Mathematik und Mechanik bei der AdW der DDR.
- [6] Hoffmeister, M.: Parametereinflüsse im Wandgesetz ebener turbulenter Grenzschichten. 2. Tagung „Strömungsmechanik“ (Magdeburg 3. – 6. 9. 79), Vorträge, S. 74 – 80. Report R–11/79 des Zentralinstituts für Mathematik und Mechanik bei der AdW der DDR.
- [7] Hoffmeister, M.: Die ebene turbulente Parallelströmung bei verschwindender Wandschubspannung. 3. Nationalkongreß über theoretische und angewandte Mechanik der Bulgarischen Akademie der Wissenschaften (Varna 13. bis 16. 9. 1977), Vorträge, Bd. 3, S. 343 – 352. Verlag der Bulgarischen Akademie der Wissenschaften, Sofia 1978.

Anschrift des Verfassers:

Prof. Dr. M. Hoffmeister
Zentralinstitut für Mathematik und
Mechanik bei der Akademie der
Wissenschaften der DDR
1199 Berlin-Adlershof,
Rudower Chaussee 6