

# Schraubendreiecke - Theorie und ihre Anwendung auf die Lageanalyse räumlicher Mechanismen

Günther Kunad

*Drei beliebige relative Schraubachsen eines räumlichen Mechanismus und ihre gemeinsamen Normalen bilden ein Schraubendreieck mit dualen Winkeln und dualen Seiten. Die Berechnung von Schraubendreiecken kann sowohl mit der Schraubenalgebra nach F. M. Dimentberg als auch mit  $4 \times 4$  Transformationsmatrizen nach Hartenberg und Denavit erfolgen. Durch Zerlegung eines räumlichen Mechanismus in Schraubendreiecke – ähnlich der Zerlegung ebener Mechanismen in ebene Dreiecke – ist die Berechnung aller Lageparameter eines beliebigen Mechanismus möglich. In der Arbeit werden Sätze über Schraubendreiecke aufgestellt, Gleichungen für ihre Berechnung abgeleitet und die Anwendung von Schraubendreiecken auf die Lageanalyse räumlicher Mechanismen am Beispiel von Mechanismen der 0. und 1. Hauptgruppe dargelegt.*

## 1. Einleitung

Probleme der Kinematik räumlicher Mechanismen, darunter Probleme ihrer Lageanalyse als Grundlage für die kinematische Analyse und Synthese, wurden in den zurückliegenden drei Jahrzehnten in einer kaum noch überschaubaren Anzahl von theoretischen und anwendungsorientierten Arbeiten behandelt. Diese bemerkenswerte und mit keinem anderen Teilgebiet der Theorie der Mechanismen vergleichbare Entwicklung ist eng mit der Entwicklung der modernen Mathematik verbunden. Erst durch die Anwendung moderner mathematischer Methoden, verbunden mit der Nutzung leistungsfähiger Rechenanlagen, war es möglich, die komplizierten bewegungsgeometrischen Zusammenhänge in räumlichen Mechanismen übersichtlich darzustellen und in praktisch anwendbare Analyse- und Syntheseverfahren umzusetzen. Neue Techniken und Technologien wie z. B. die Handhabetechnik (Manipulatoren, Industrieroboter) und die Weltraumtechnik (Orientierungs- und Kopplungssysteme, Weltraumfahrzeuge) eröffneten außerdem den räumlichen Mechanismen neue und vielseitige Anwendungsgebiete, die nur durch eine umfangreiche wissenschaftliche Behandlung dieser Mechanismen erschlossen werden konnten.

Die Entwicklung moderner Methoden zur kinematischen Analyse und Synthese räumlicher Mechanismen ist untrennbar mit den grundlegenden Arbeiten von R. Beyer [1] und P.A. Lebedev [2] (analytische Geometrie), R.S. Hartenberg und J. Denavit [3], [4] (Matrizen-Transformationen), F.M. Dimentberg [5], [6] (Schraubenalgebra), W. Blaschke [7] und A.T. Yang und F. Freudenstein [8] (Duale Quaternionen), K.H. Hunt [9] und V.I. Sharikow [10] (Linearkomplexe), S.G. Kislizyn [11] und C.Y. Ho [12] (Tensoren) sowie B. Roth [13], [14], [15] (endliche Schraubebewegungen) verbunden. Besonders die bemerkenswerten Arbeiten von F.M. Dimentberg über die Weiterentwicklung der Schraubenalgebra von E. Study [16] und A.P. Kotelnikov [17] und deren Anwendung auf räumliche Starrkörpersysteme (Mechanismen) bildeten die Grundlage für eine Vielzahl von Beiträgen zur Theorie räumlicher Mechanismen auf der Grundlage der Ball'schen Schraubentheorie. Zu diesem gehören die Arbeiten von

M. Keler [18], [19], M.S. Yuan und F. Freudenstein [20], D. Kohli und A.H. Soni [21], A.H. Soni und L. Harrisberger [22], O. Bottema [23], D. Duffy [24] u. a. m. Die vorliegende Arbeit, die sich eng an die Untersuchungen von F.M. Dimentberg und M. Keler anschließt, behandelt die Anwendung der Schraubenalgebra auf die Lageanalyse räumlicher Mechanismen. Es wird gezeigt, daß durch Einführen von Schraubendreiecken als räumliche Analogie zu ebenen Dreiecken, die von der Lageanalyse ebener Mechanismen her bekannte Methode der schrittweisen Dreieckszerlegung und -berechnung der Mechanismenkontur auch auf räumliche Mechanismen allgemeingültig und eindeutig übertragbar ist [25].

## 2. Kinematische Grundlagen

Das Ziel der Lageanalyse eines allgemeinen  $n$ -gliedrigen räumlichen Mechanismus mit  $F$  Bewegungsfreiheiten besteht in der Bestimmung der notwendigen und hinreichenden Anzahl von Koordinaten für die eindeutige Lagebeschreibung der  $n-1$  bewegten Mechanismenglieder in Bezug auf ein beliebig gewähltes Bezugssystem (im allgemeinen das nichtbewegte Glied) in Abhängigkeit von den  $F$  unabhängigen Bewegungskoodinaten des Mechanismus. Da jedes Glied des Mechanismus eine allgemeine räumliche Bewegung ausführen kann, sind im allgemeinen für jedes Glied 6 Lagekoordinaten erforderlich. Zwischen den 6  $(n-1)$  Lagekoordinaten des Mechanismus bestehen 6  $(n-1) - F$  Zwangsbedingungen, die die kinematischen Bindungen der Glieder in den Gelenken beschreiben. Sie bilden das Grundgleichungssystem für die Bestimmung der 6  $(n-1) - F$  abhängigen Lagekoordinaten und werden als Lagegleichungen bezeichnet. Das System der Lagegleichungen ist im allgemeinen in den Lagekoordinaten nichtlinear und nur für wenige einfache Mechanismen geschlossen lösbar.

Eine wesentliche Vereinfachung der Lageanalyse, jedoch keine Linearisierung, ist durch die Verwendung von relativen Lagekoordinaten möglich, die jeweils die Lage eines Mechanismengliedes gegenüber einem benachbarten Glied beschreiben. Über die Gesamtheit der relativen Lagekoordinaten der vorangehenden Gliederkette ist

damit auch die Lage des betrachteten Gliedes gegenüber dem gewählten Bezugssystem bekannt.

Außerdem kann durch eine geeignete Wahl der Parameter, die als relative Lagekoordinaten verwendet werden sollen, z. B. durch solche Parameter, die die relativen Gelenkvariablen enthalten, erreicht werden, daß ein Teil der relativen Lagekoordinaten konstant ist und damit nicht mehr der Lageanalyse unterliegt. Von den beschriebenen Vereinfachungen macht die Mehrzahl der bekannten Analyseverfahren Gebrauch. Besonders einfache Verhältnisse ergeben sich, wenn entsprechend eines Vorschlages von Hartenberg und Denavit [3], [4] für den zu untersuchenden Mechanismus ein kinematisch äquivalentes Berechnungsmodell eingeführt wird, das nur Gelenke vom Freiheitsgrad  $f = 1$ , d. h. R- (Dreh-), P- (Schub-) oder H- (Schraub-) Gelenke enthält. Alle Gelenke mit  $f > 1$  werden dafür in eine entsprechende Anzahl von Dreh- bzw. Schubgelenke aufgelöst, die in ihrer Überlagerung der Art und Anzahl der Gelenkfreiheitsgrade des ursprünglichen Gelenkes entsprechen. Die Lage eines Gliedes des Berechnungsmodells ist dann nur durch eine variable relative Lagekoordinate, die relative Gelenkvariable  $q$ , gegenüber dem benachbarten Glied beschreibbar. Die Lageanalyse eines beliebigen Mechanismus ist dann auf die Bestimmung der  $e$  relativen Gelenkvariablen zurückgeführt ( $e =$  Anzahl der Gelenke des Berechnungsmodells).

In dem eben definierten Berechnungsmodell für einen räumlichen Mechanismus, das auch den nachfolgenden Untersuchungen zugrunde gelegt wird, kann jedem Gelenk eine Gelenkachse zugeordnet werden. Sie ist die relative Schraubachse der durch das Gelenk verbundenen Glieder und entspricht bei Dreh- und Schraubgelenken der Dreh- bzw. Schraubachse. Für Schubgelenke wird als Gelenkachse eine beliebige, zur Schubrichtung parallele Gerade (bevorzugt die Gerade, die die vorangehende Drehachse schneidet) gewählt. Die gegenseitige Anordnung von zwei aufeinanderfolgenden relativen Schraubachsen ist durch die Hartenberg-Denavit-Parameter  $a$ ,  $\alpha$ ,  $\Theta$ ,  $s$  eindeutig beschreibbar (Bild 1). Sie sind entweder relative Gelenkvariable  $q$

$$q = \begin{cases} \Theta & \text{für R-Gelenke} \\ s & \text{für P-Gelenke} \\ \Theta \text{ oder } s & \text{für H-Gelenke} \\ \Theta \text{ und } s & \text{für C-Gelenke} \end{cases}$$

oder konstante Gliedabmessung.

Die Gesamtheit der Hartenberg-Denavit-Parameter eines Mechanismus bildet die notwendige und hinreichende Anzahl von relativen Lagekoordinaten für die eindeutige Lagebeschreibung des Mechanismus.

Die spezielle Struktur des Mechanismus wird durch Indizes der Hartenberg-Denavit-Parameter ausgedrückt. Ein in sich geschlossenes Bezeichnungssystem geht dabei von den Gelenken des Berechnungsmodells aus, die fortlaufend von 1 bis  $e$ , beginnend mit einem gestelltesten Gelenk (nach Möglichkeit das Gelenk zwischen Gestell und Antriebsglied), bezeichnet werden. Mit jeder Gelenkachse wird ein Schraubenvektor  $\mathcal{S}_i$  verbunden, dessen Richtungssinns außer bei Schraubgelenken beliebig wählbar ist.

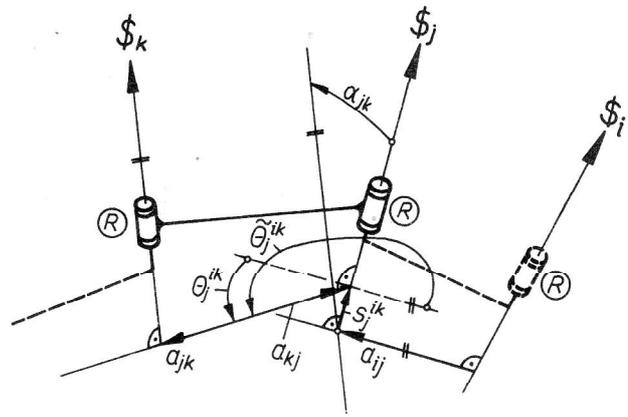


Bild 1

Mit Hilfe der Gelenkbezeichnungen werden folgende Festlegungen für die Parameter  $a$ ,  $\alpha$ ,  $\Theta$ ,  $s$  getroffen (Bild 1):

$a_{ij}$  = Kreuzungsabstand der Gelenkachsen  $i$  und  $j$ ,  $a_{ij}$  ist von  $\mathcal{S}_i$  nach  $\mathcal{S}_j$  gerichtet und immer positiv.

$\alpha_{ij}$  = Kreuzungswinkel der Gelenkachsen  $i$  und  $j$ , gemessen von der positiven Richtung  $\mathcal{S}_i$  nach der positiven Richtung  $\mathcal{S}_j$ . Der positive Winkel  $\alpha_{ij}$  bildet mit der positiven Richtung  $a_{ij}$  eine Rechtsschraube.

$s_j^{ik}$  = Kreuzungsabstand zwischen den Normalen  $a_{ij}$  und  $a_{jk}$ , gerichtet von  $a_{ij}$  nach  $a_{jk}$ .  $s_j^{ik}$  liegt in der Gelenkachse  $\mathcal{S}_j$ , seine positive Richtung entspricht der positiven Richtung  $\mathcal{S}_j$ .

$\Theta_j^{ik}$  = Kreuzungswinkel der Normalen  $a_{ij}$  und  $a_{jk}$ , gemessen von der positiven Richtung  $a_{ij}$  nach der positiven Richtung  $a_{jk}$ . Der positive Winkel  $\Theta_j^{ik}$  bildet mit der positiven Richtung  $\mathcal{S}_j$  eine Rechtsschraube.

$\tilde{\Theta}_j^{ik} = \Theta_j^{ik} + \pi$   
Kreuzungswinkel der Normalen  $a_{ij}$  und  $a_{kj}$ , gemessen von der positiven Richtung  $a_{ij}$  nach der positiven Richtung  $a_{kj}$  (Bild 1).

Diese erweiterten Hartenberg-Denavit-Parameter eignen sich für die eindeutige Lagebeschreibung von räumlichen Mechanismen beliebiger Struktur. Sie enthalten als Sonderfall – Streichung der oberen Indizes – die einfachen Hartenberg-Denavit-Parameter [3], [4].

### 3. Das Schraubendreieck, Sätze über Schraubendreiecke

Drei beliebige relative Schraubachsen  $\mathcal{S}_1$ ,  $\mathcal{S}_2$  und  $\mathcal{S}_3$  und ihre gemeinsamen Normalen bilden eine räumliche Figur, die als „räumliches“ Dreieck oder Schraubendreieck bezeichnet werden kann (Bild 2a) [8], [14]. Ein Schraubendreieck besitzt 12 Parameter

$$a_{ij}, \alpha_{ij}, \Theta_j^{ik}, s_j^{ik} \quad i, j, k = 1, 2, 3$$

und wird durch jede beliebige Kombination von 6 dieser Parameter eindeutig definiert. Durch Zusammenfassen von je zwei Parametern mit Hilfe des dualen Operators  $\in$  erhält man eine duale Abbildung des Schraubendreiecks (Bild 2b) mit den

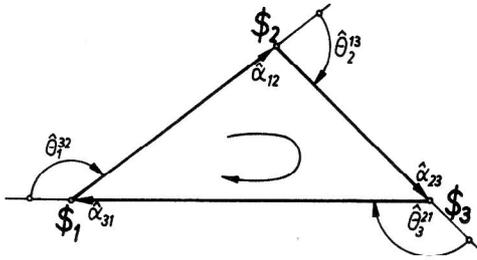


Bild 2b

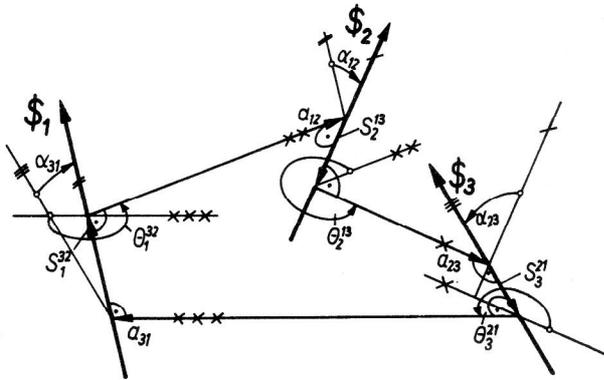


Bild 2a

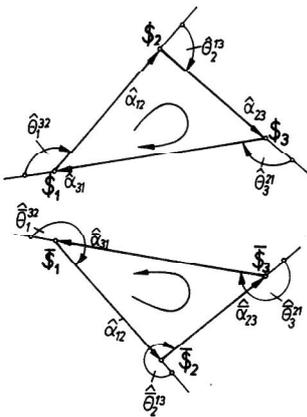


Bild 3

dualen Seiten  $\hat{\alpha}_{ij} = \alpha_{ij} + \in a_{ij}$  und den  
dualen Außenwinkeln  $\hat{\Theta}_j^{ik} = \Theta_j^{ik} + \in s_j^{ik}$

wobei für  $\in^2 = 0$  zu setzen ist.

Unter Beachtung der Definition der Parameter  $a, \alpha, \Theta, s$  nach Abschnitt 2. gelten für Schraubendreiecke die Sätze 1 bis 5 (Bild 3, 4, 5, 6).

**Satz 1**

Drei duale Seiten  $\hat{\alpha}_{12}, \hat{\alpha}_{23}$  und  $\hat{\alpha}_{31}$  bestimmen zwei dualspiegelbildliche Schraubendreiecke  $\$1, \$2, \$3$  und  $\$1, \$2, \$3$ .

Zwischen den dualen Außenwinkeln der beiden Dreiecke besteht die Beziehung

$$\hat{\Theta}_i^{jk} = -\hat{\Theta}_i^{jk} - \Theta_i^{jk} - \in S_i^{jk}$$

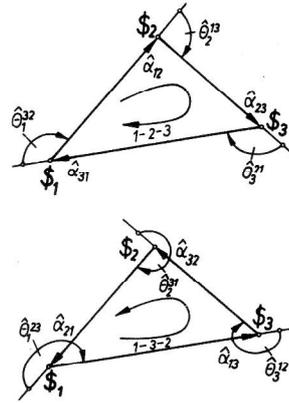


Bild 4

**Satz 2**

Einem Wechsel der Aufeinanderfolge der dualen Eckpunkte in einem Schraubendreieck (Wechsel des Umlaufsinnnes) entspricht ein Vorzeichenwechsel der dualen Außenwinkel

$$\hat{\Theta}_i^{jk} = -\hat{\Theta}_i^{kj}$$

Die dualen Seitenlängen bleiben erhalten

$$\hat{\alpha}_{ij} = \hat{\alpha}_{ji}$$

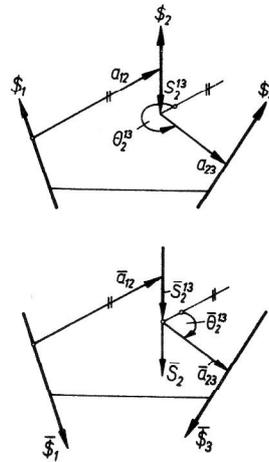


Bild 5

**Satz 3**

Einem Wechsel des Richtungssinnes der Schraubachsen in einem Schraubendreieck entspricht ein Wechsel des Vorzeichens der dualen Außenwinkel

$$\hat{\Theta}_i^{jk} = -\hat{\Theta}_i^{jk}$$

Die dualen Seitenlängen bleiben erhalten

$$\hat{\alpha}_{ij} = \hat{\alpha}_{ij}$$

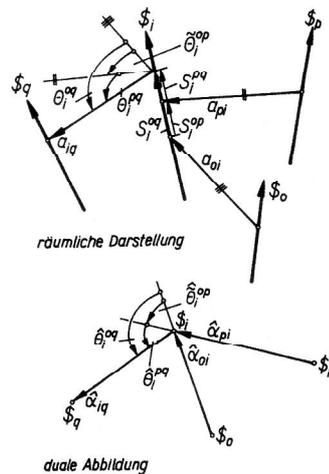


Bild 6

**Satz 4**

Zwischen den zugeordneten dualen Außenwinkeln von zwei Schraubendreiecken mit einer gemeinsamen dualen Seite besteht die Beziehung

$$\hat{\Theta}_i^{op} + \hat{\Theta}_i^{pq} + \hat{\Theta}_i^{po} = 0$$

bzw. nach Satz 1 mit

$$\hat{\Theta}_i^{po} = -\hat{\Theta}_i^{op}$$

$$\hat{\Theta}_i^{pq} = \hat{\Theta}_i^{op} + \hat{\Theta}_i^{po}$$

und nach Satz 5

$$\hat{\Theta}_j^{pq} = \hat{\Theta}_j^{op} + \hat{\Theta}_j^{po} + \pi$$

**Satz 5**

Der Wechsel des Richtungssinnes einer dualen Seite eines Schraubendreiecks entspricht einer Vergrößerung der anliegenden dualen Außenwinkel um  $\pi$  (Bild 1).

$$\hat{\Theta}_j^{ik} = \hat{\Theta}_j^{ik} + \pi = (\Theta_j^{ik} + \pi) + \in s_j^{ik}$$

$$\hat{x} \pm \hat{y} = (x \pm y) + \in (\xi \pm \eta) \quad (A)$$

für die Multiplikation

$$\hat{x} \hat{y} = xy + \in (x\eta + y\xi) \quad (B)$$

#### 4. Berechnung von Schrauben-Dreiecken

Schrauben-Dreiecke können mit Hilfe der sphärischen Trigonometrie, angewendet auf duale Größen und unter Beachtung der Gesetzmäßigkeiten der Schrauben Algebra und -Analysis, berechnet werden. [6]

$$\text{Sind } \hat{x} = x + \in \xi$$

$$\text{und } \hat{y} = y + \in \eta$$

zwei beliebige duale Zahlen, so gilt allgemein für die Addition

und für trigonometrische Funktionen von dualen Zahlen

$$\sin \hat{x} = \sin x + \in \xi \cos x \quad (C)$$

$$\cos \hat{x} = \cos x - \in \xi \sin x \quad (D)$$

Jede Gleichung in dualen Größen liefert nach Trennung in Haupt- und Momententeil (Real- und Dualteil) zwei Gleichungen in reellen Größen.

Angewendet auf ein Schrauben-Dreieck  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3$  nach Bild 2 erhält man aus dem

Seiten-Kosinus-Satz<sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} \cos \hat{\alpha}_{23} &= \cos \hat{\alpha}_{12} \cos \hat{\alpha}_{31} - \sin \hat{\alpha}_{12} \sin \hat{\alpha}_{31} \cos \hat{\Theta}_1 \\ \cos \alpha_{23} - \in a_{23} \sin \alpha_{23} &= (\cos \alpha_{12} - \in a_{12} \sin \alpha_{12}) (\cos \alpha_{31} - \in a_{31} \sin \alpha_{31}) - (\sin \alpha_{12} + \in a_{12} \cos \alpha_{12}) \\ &\quad (\sin \alpha_{31} + \in a_{31} \cos \alpha_{31}) \cdot (\cos \Theta_1 - \in s_1 \sin \Theta_1) \end{aligned}$$

und nach Trennung in Haupt- und Momententeil

$$\cos \Theta_1 = \frac{\cos \alpha_{12} \cos \alpha_{31} - \cos \alpha_{23}}{\sin \alpha_{12} \sin \alpha_{31}} \quad (1)$$

$$s_1 \sin \Theta_1 = a_{12} (\tan \alpha_{12} \cos \Theta_1 + \tan \alpha_{31}) + a_{31} (\tan \alpha_{12} + \tan \alpha_{31} \cos \Theta_1) - a_{23} \frac{\sin \alpha_{23}}{\sin \alpha_{12} \sin \alpha_{31}} \quad (2)$$

und nach Einsetzen von Gln (1) (7) in Gl. (2)

$$s_1 = - \frac{1}{\sin \Theta_3 \sin \alpha_{31}} (a_{12} \cos \Theta_2 + a_{31} \cos \Theta_3 + a_{23}) \quad (3)$$

Entsprechend folgt aus dem Winkel-Kosinus-Satz

$$\cos \hat{\Theta}_1 = \cos \hat{\Theta}_2 \cos \hat{\Theta}_3 - \sin \hat{\Theta}_2 \sin \hat{\Theta}_3 \cos \hat{\alpha}_{23}$$

$$\cos \alpha_{23} = \frac{\cos \Theta_2 \cos \Theta_3 - \cos \Theta_1}{\sin \Theta_2 \sin \Theta_3} \quad (4)$$

$$a_{23} \cos \alpha_{23} = s_2 (\tan \Theta_2 \cos \alpha_{23} + \tan \Theta_3) + s_3 (\tan \Theta_2 + \tan \Theta_3 \cos \alpha_{23}) - s_1 \frac{\sin \Theta_1}{\sin \Theta_2 \sin \Theta_3} \quad (5)$$

und nach Einsetzen von Gln. (4) (7) in Gl. (5)

$$a_{23} = \frac{1}{\sin \alpha_{31} \cos \Theta_3} (s_2 \cos \alpha_{12} + s_3 \cos \alpha_{31} - s_1) \quad (6)$$

Die Anwendung des Sinus-Satzes auf das Schrauben-Dreieck  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3$  ergibt

1) Die oberen Indizes von  $\Theta$  und  $s$  werden im folgenden auf Grund der Eindeutigkeit nicht geschrieben.

$$\frac{\sin \hat{\Theta}_1}{\sin \hat{\Theta}_2} = \frac{\sin \hat{\alpha}_{23}}{\sin \hat{\alpha}_{31}}$$

$$\sin \Theta_1 = \sin \Theta_2 \frac{\sin \alpha_{23}}{\sin \alpha_{31}} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} s_1 \sin \alpha_{31} \cos \Theta_1 - s_2 \sin \alpha_{23} \cos \Theta_2 \\ = a_{23} \cos \alpha_{23} \sin \Theta_2 - a_{31} \cos \alpha_{31} \sin \Theta_1 \end{aligned} \quad (8)$$

Alle Gleichungen behalten bei zyklischer Vertauschung der Indizes ihre Gültigkeit. Für die praktische Berechnung von Schrauben-Dreiecken sind in Tabelle 1 alle möglichen Aufgabenstellungen und die zugehörigen Lösungsgleichungen zusammengestellt. Bei der Berechnung ist zu beachten, daß die Mehrdeutigkeit der trigonometrischen Gleichungen jeweils durch eine Kontrolle  $a_{ij} > 0$  ausgeschlossen werden kann.

AUFGABE		LÖSUNG
	SSS	$\theta_1$ nach Gl. (1) $\theta_2, \theta_3$ nach Gl. (1) Kontrolle nach Gl. (7) $s_1, s_2, s_3$ nach Gl. (2) oder Gl. (3)
	SWS	$\alpha_{23}, a_{23}$ nach Gl. (1)(2) Kontrolle $a_{23} > 0$ $\theta_2, \theta_3$ nach Gl. (1) Kontrolle nach Gl. (7) $s_2, s_3$ nach Gl. (3)
	WSS	$\alpha_{13}, a_{13}$ nach Gl. (1)(2) Kontrolle $a_{13} > 0$ $\theta_2, \theta_3$ nach Gl. (1) Kontrolle nach Gl. (7) $s_2, s_3$ nach Gl. (3)
	WSW	$\theta_1, s_1$ nach Gl. (4)(5) $\alpha_{23}, \alpha_{31}$ nach Gl. (4) Kontrolle nach Gl. 7 $a_{23}, a_{31}$ nach Gl. (6) Kontrolle $a > 0$
	WWS	$\alpha_{23}, a_{23}$ nach Gl. (7)(8) Kontrolle $a > 0$ $\alpha_{13}, a_{13}$ nach Gl. (1)(3) Kontrolle $a > 0$ $\theta_2, s_2$ nach Gl. (1)(3) Kontrolle nach Gl. 7
	WWW	$\alpha_{12}, \alpha_{23}, \alpha_{31}$ nach Gl. (4) $a_{12}, a_{23}, a$ nach Gl. (5) Kontrolle $a > 0$

## 5. Anwendung von Schraubendreiecken auf die Lageanalyse von Mechanismen

Beispiel 1:

Für den RCCC-Mechanismus nach Bild 7 mit den konstanten Gliedabmessungen  $a_{12}, a_{23} = 0, a_{34}, a_{41}$  und  $\alpha_{12}, \alpha_{23}, \alpha_{34}, \alpha_{41}$  sind die Werte der Übertragungsfunktionen

$$\Theta_4^{31} = f(\Theta_1^{42}) \quad \text{und}$$

$$s_4^{31} = f(\Theta_1^{42})$$

zu berechnen.

Die duale Abbildung des Mechanismus ergibt ein Schraubenviereck  $\mathcal{S}_1 \mathcal{S}_2 \mathcal{S}_3 \mathcal{S}_4$ , das so in zwei Schraubendreiecke zerlegt wird, daß ein Schraubendreieck den Antriebsparameter  $\hat{\Theta}_1^{42}$  als dualen Außenwinkel enthält. Beide Schraubendreiecke lassen sich nun nacheinander mit Hilfe der Beziehungen nach Abschnitt 3 berechnen. Aus dem Dreieck  $\mathcal{S}_1 \mathcal{S}_2 \mathcal{S}_3$  wird mit  $\hat{\alpha}_{12}, \hat{\alpha}_{41}$  und  $\hat{\Theta}_1^{42}$

die Diagonale des Schraubenvierecks  $\hat{\alpha}_{24}$  und der Außenwinkel  $\hat{\Theta}_4^{21}$  ermittelt. Entsprechend erhält man aus dem Dreieck  $\mathcal{S}_2 \mathcal{S}_3 \mathcal{S}_4$  mit  $\hat{\alpha}_{23}$  und  $\hat{\alpha}_{34}$  sowie der vorher berechneten Diagonalen  $\hat{\alpha}_{42} = \hat{\alpha}_{24}$  (nach Satz 2) zunächst den dualen Außenwinkel  $\hat{\Theta}_4^{32}$ .

Nach einer Umformung nach Satz 3

$$\hat{\Theta}_4^{23} = -\hat{\Theta}_4^{32}$$

findet man durch Superposition nach Satz 4

$$\hat{\Theta}_4^{31} = \hat{\Theta}_4^{32} + \hat{\Theta}_4^{21} + \pi$$

bzw.

$$\hat{\Theta}_4^{31} = \hat{\Theta}_4^{32} + \hat{\Theta}_4^{21} + \pi$$

$$s_4^{31} = s_4^{32} + s_4^{21}$$

Beispiel 2

Für den RCCCC-RCCC-Mechanismus nach Bild 8 sind alle relativen Gelenkvariablen als Funktion des Antriebs-

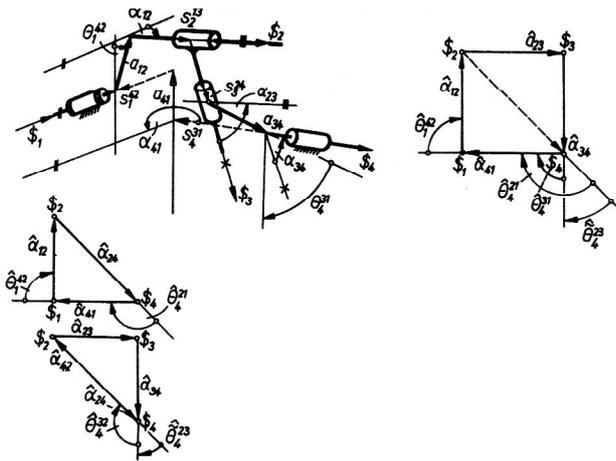


Bild 7

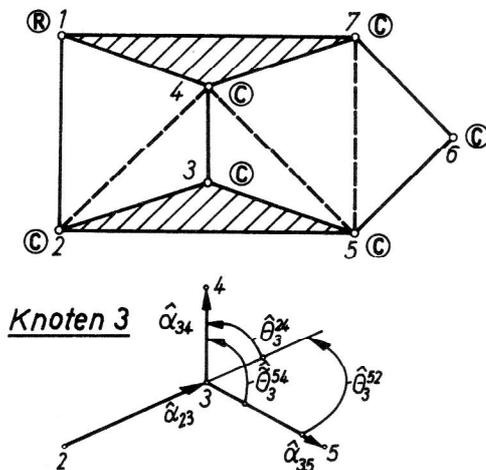


Bild 8

winkels  $\Theta_1^{72}$  zu bestimmen. Die Berechnung erfolgt entsprechend Beispiel 1 durch Zerlegung der dualen Abbildung des Mechanismus in Schraubendreiecke und Anwendung des Satzes 4 auf jeden Knoten (Gelenk). Die ternären Glieder werden dabei ebenfalls als Schraubendreiecke aufgefasst.

#### LITERATUR

- [1] Beyer, R.: Technische Raumkinematik. Springer Verlag Berlin/Göttingen/Heidelberg 1963.
- [2] Лебедев, П.А.: Кинематика пространственных механизмов, изд. машиностроение Ленинград 1966.
- [3] Uicker, J.J., Denavit, J., Hartenberg, R.S.: An Iterativ Method for the Displacement Analysis of Spatial Mechanisms. Trans. ASME, Series E, vol 86 (1964) pp. 309 – 314.
- [4] Denavit, J., Hartenberg, R.S., Razi, R., Uicker, J.J.: Velocity, Acceleration and Static Force Analysis für Spatial Linkages. Trans. ASME, Series E, vol 87 (1965) pp. 903 – 910.

- [5] Диментберг, Ф.М.: Определение положений пространственных механизмов, изд. АН СССР 1950.
- [6] Диментберг, Ф.М.: Теория винтов и ее приложения, изд. наука, Москва 1978.
- [7] Blaschke, W.: Anwendung dualer Quaternionen auf die Kinematik. Anales Academiae Scientiarum Fennicae, Helsinki 1958, S. 1 – 13
- [8] Yang, A.T., Freudenstein, F.: Application of Dual-Number Quaternions Algebra to the Analysis of Spatial Mechanisms. Trans. ASME, Series E, vol. 86 (1964) pp. 300 – 308.
- [9] Hunt, K.H.: Screw Systems in Spatial Kinematics. Monash University, Clayton, Australia 1970, Dep. of Mech. Eng. Report No. MMERS 3
- [10] Шариков, В.И.: Теория винтов в структурном и кинематическом анализе пар и механизмов. Труды семинара по ТММ, т. XXVII вып.86 (1960) стр. 108 – 136.
- [11] Кислицын, С.Г.: Тензорный метод в теории пространственных механизмов. Труды семинара по ТММ, т. XIV, вып. 54 (1954) стр. 51 – 57.
- [12] Ho, C.Y.: Kinematic Analysis of Four-Bar Spatial Mechanisms. Proceedings II. International Congress on TMM, Zakopane/Poland 1969, Part 1, pp. 98 – 120
- [13] Roth, B.: The Kinematics of Motion through Finitely Separated Positions. Trans. ASME, Series E, vol. 89 (1967) pp. 591 – 598.
- [14] Roth, B.: On the Screw Axes and other Spezial Lines Associated with Spatial Displacements of a Rigid Body. Trans. ASME, Series B, vol. 89 (1967) pp. 102 – 110.
- [15] Roth, B., Bottema, O.: Theoretical Kinematics. North-Holland Publishing Company Amsterdam/New York/Oxford 1979.
- [16] Study, E.: Geometrie der Dynamen. Leipzig, 1901 – 1903.
- [17] Котельников, А.Р.: Винтовое счисление и некоторые приложения его к геометрии и механике. Казан, 1895.
- [18] Keler, M.: Analyse und Synthese von Raumkurbelgetrieben mittels Raumliniengeometrie und dualer Größen. Forsch. Ing. Wesen 25 (1959) S. 26 – 32, 55 – 64
- [19] Keler, M.: Kinematische Analyse räumlicher und ebener Getriebe, Teil I, II und III Werkstattblätter 635, 639 und 645, Carl Hanser Verlag, München 1976
- [20] Yuan, M.S.E., Freudenstein, F.: Kinematic Analysis of Spatial Mechanisms by Means of Screw Coordinates. Part 1: Screw Coordinates; Part 2: Analysis of Spatial Mechanisms. Trans. ASME, Series B, vol. 93 (1971) pp. 61 – 66, 67 – 73.
- [21] Kohli, D., Soni, A.H.: Kinematic Analysis of Spatial Mechanisms via Successive Screw Displacements. Trans. ASME, Series B, vol. 97 (1975) pp. 739 – 747.
- [22] Soni, A.H., Harrisberger, L.: Die Anwendung der  $3 \times 3$  Schraubungs-Matrix auf die kinematische und dynamische Analyse von räumlichen Getrieben. VDI-Berichte, Bd. 127, S. 35 – 40. VDI-Verlag Düsseldorf 1969.
- [23] Bottema, O.: On a Set of Displacements in Space. Trans. ASME, Series B, vol. 95 (1973) pp. 451 – 454.
- [24] Duffy, J.: A Derivation of Dual Displacement Equation for Five, Six and Seven-Link Spatial Mechanisms, Part 1, 2 und 3. Rev. Roum. Sci. Techn. Mech. Appl., Bukarest 16 (1971) S. 1369 – 1386; 17 (1972) S. 107 – 122 und S. 291 – 317.
- [25] Kunad, G.: Kinematic Analysis of Spatial Mechanisms using Screw Coordinates. Proceedings of the V. World Congress on TMM, Montreal/Canada 1979, vol. 2, pp. 1428 – 1431.

Anschrift des Verfassers:

Prof. Dr. sc. techn. Günther Kunad,  
Technische Hochschule Otto von  
Guericke, Sektion Maschinenbau,  
301 Magdeburg, Bierutplatz 5