TECHNISCHE MECHANIK 1 (1980) Heft 1
Manuskripteingang: 4. 4. 1980

Modellierung und Berechnung turbulenter Strömungen und Anwendungen in der Technik

G. Naue, W. W. Schmidt, R. Scholz, P. Wolf

Die Artikelserie enthält Ergebnisse der Turbulenzforschung des Wissenschaftsbereiches „Technische Strömungsmechanik" der Technischen Hochschule „Carl Schorlemmer" Leuna-Merseburg. Die Modellierung und Berechnung turbulenter Strömungen wird mit Mehrparameter- und Mehrvariablenmodellen betrieben. Die drei Teile enthalten: Bilanzgleichungen und Modelle; Numerische Lösungsmethoden und Realisierung der speziellen Randbedingungen; Anwendung auf technische Probleme und Vergleich mit Experimenten an Beispielen.

1. Einleitung

In den letzten Jahrzehnten wurden bedeutende Fortschritte in der Modellierung und Berechnung zweidimensionaler turbulenter Strömungen erzielt. Die Strömungsmechanik ist heute in der Lage, Geschwindigkeits-, Temperatur- und Konzentrationsfelder in Apparaten zu berechnen. Auch wenn diese Berechnungen gegenwärtig noch mit einigen Einschränkungen verbunden sind, ist die immer bessere Beherrschung der gekoppelten Impuls-, Wärme- und Stofftransportprozesse nicht zu übersehen.
Mit dem tieferen Verständnis der Turbulenz, welches sich besonders durch die experimentelle Untersuchung turbulenter Strömungen herausbildete, entstand eine Vielzahl von Turbulenzmodellen. Ausgangspunkt für die Formulierung von Turbulenzmodellen ist die Überlegung von Reynolds, daß die momentane Geschwindigkeit als Überlagerung des zeitlich gemittelten Wertes und eines Schwankungsanteiles gebildet werden kann.
Da in der Praxis häufig nur die stationären Felder von Interesse sind, werden die zeitlich gemittelten Gleichungen zur Berechnung turbulenter Strömungen benutzt. Diese Gleichungen enthalten zusätzliche konvektive Glieder mit den zeitlich gemittelten Produkten der Schwankungen, deren physikalische Wirkung einer Vergrößerung der Reibung, Wärme- und Stoffströme äquivalent ist.

Boussinesq ermöglichte durch Einführung einer turbulenten Viskosität einen praktischen Zugang zur Formulierung von Turbulenzmodellen. Dieser Weg war bestimmend für die weitere Entwicklung von Turbulenzmodellen und wurde von Prandtl u. a. wesentlich weitergeführt. Die Turbulenzmodelle mit turbulenter Viskosität werden häufig zur Berechnung von Strömungen mit Grenzschicht- und Rezirkulationscharakter angewendet. Für die turbulente Viskosität stehen algebraische Beziehungen oder abgeleitete Transportgleichungen zur Verfügung, deren Anwendung vom Charakter der Strömung und von der Geometrie abhängig sind.

Neben der Modellierung der Schwankungsbewegung als turbulente Reibung werden auch andere Wege beschritten. Als Beispiele seien hier die Arbeiten von Albring [1], der die turbulente Strömung als Überlagerung einzelner Wirbelfelder auffaßt und die von Mascheck [2], der die Informationstheorie auf turbulente Strömungen anwendet, genannt.
Eine weitere Möglichkeit zur Formulierung von Turbulenzmodellen besteht nach Naue [3] darin, daß weitere kinematische Variable, deren physikalische Berechtigung aus der Strukturiertheit der turbulenten Bewegung erklärt wird, zur Beschreibung des Turbulenzprozesses eingeführt werden. Das von Naue entwickelte Turbulenzmodell wird im weiteren als Mehrvariablenmodell der Turbulenz bezeichnet.
In diesem Beitrag werden bekannte Turbulenzmodelle der turbulenten Reibung vorgestellt und die beschreibenden Gleichungen für das Mehrvariablenmodell abgeleitet. Diese Turbulenzmodelle wurden an einigen technischen Objekten hinsichtlich ihrer Brauchbarkeit überprüft. Es handelt sich hierbei um ebene Rezirkulationsströmungen in klimatisierten Räumen sowie um rotationssymmetrische Strömungen in Plasmarohrreaktoren und Rührbehältern.

2. Beschreibende Gleichungen turbulenter Strömungsfelder

Die physikalischen Vorstellungen zur Formulierung der beschreibenden Gleichungen basieren im wesentlichen auf den Eigenschaften turbulenter Strömungen, die durch visuelle Beobachtungen und Messungen gewonnen wurden. Danach sind Strömungen turbulent, wenn sie folgende Eigenschaften besitzen [4]:

Turbulente Strömungen sind unregelmäßig. Die Strömungsvariablen ändern sich an einem festen Ort in nicht reproduzierbarer Folge mit der Zeit. Jede Einzelmessung liefert demzufolge unterschiedliche Momentanwerte, die ein Zufallsergebnis darstellen. Die zeitlichen Mittelwerte sind dagegen reproduzierbar. Die Momentanwerte schwanken um einen Mittelwert.

Turbulente Strömungen sind strukturiert; ihre Grundelemente sind in mannigfacher Weise sich bewegende Wirbelballen unterschiedlicher Abmessungen.
Zur Aufrechterhaltung der Wirbelbewegung wird der Grundbewegung Energie entzogen. Diese Energie wird kaskadenförmig von den großen Wirbelballen auf kleine

Wirbelballen übertragen. In den kleinsten Wirbelballen findet die Energiedissipation statt. Die Reynolds-Zahl der kleinsten Wirbel hat einen Wert von Re $\approx$ 50 [5]. Das Spektrum der Wirbelkaskade ist nach zwei Seiten beschränkt. Die Abmessungen der größten Wirbelballen sind im wesentlichen von der Geometrie des Strömungsgebietes abhängig. Durch die molekulare Viskosität werden die Abmessungen der kleinsten Wirbel begrenzt. Zur Beschreibung der turbulenten Wirbelbewegung wird eine neue kinematische Variable, die mittlere Drehgeschwindigkeit eines Turbulenzelementes charakteristischer Abmessung, eingeführt.

Turbulente Strömungen besitzen Geschwindigkeitsschwankungen in allen Raumrichtungen.

Turbulente Strömungen sind instationäre Strömungen. Die Umsetzung dieser Eigenschaften würde bedeuten, turbulente Strömungen instationär und dreidimensional berechnen zu müssen, was heute und auch in absehbarer Zukunft im allgemeinen als unlösbar erscheint [6].

In der Praxis interessiert nicht vordergründig das Verhalten der Momentanwerte, sondern vielmehr die Felder der zeitlichen Mittelwerte. Wenn also im weiteren von der Berechnung turbulenter Strömungsfelder gesprochen wird, so ist damit die Berechnung im zeitlichen Mittel gemeint.

Ausgangspunkt für die Ableitung der Gleichungen im zeitlichen Mittel sind die Erhaltungssätze für die Momentanwerte von Masse, Impuls, Impulsmoment, Energie und Stoff. Es wird angenommen, daß die Dichte, spezifische Wärme und das Trägheitsmoment der Turbulenzelemente konstant sind.

Der Momentanwert einer Strömungsvariablen (Geschwindigkeit, Druck, Drehgeschwindigkeit, Temperatur und Konzentration) kann in einen zeitlichen Mittelwert und Schwankungsanteil zerlegt werden. Unter Beachtung der Rechenregeln für statistische Größen können die folgenden zeitlich gemittelten Gleichungen aufgeschrieben werden, wobei in Übereinstimmung mit den noch später aufzuschreibenden Modellgesetzen vorausgesetzt wird, daß die Reibungs- und Momentenspannungen sowie der Wärme- und Stoffstrom durch lineare Operatoren mit den entsprechenden Strömungsvariablen verknüpft sind, so daß ihre zeitlich gemittelten Schwankungsanteile verschwinden:

Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_i} = 0 \tag{1}$$

Impulsgleichung

$$\rho\left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j}\right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{v_i' v_j'}}{\partial x_j}\rho - \rho\,\bar{F}_i \tag{2}$$

Impulsmomentengleichung

$$\rho I\left(\frac{\partial \bar{\beta}_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial \bar{\beta}_i}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial \gamma_{ji}}{\partial x_j} + e_{ijk}\,\bar{\tau}_{jk} - \rho I \frac{\partial \overline{\beta_i' v_j'}}{\partial x_j} + \rho \bar{M}_i \tag{3}$$

Energiegleichung

$$\rho c_p\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + v_j \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j}\right) = -\frac{\partial q_j}{\partial x_j} - \rho c_p \frac{\partial \overline{T' v_j'}}{\partial x_j} + \bar{\Phi} + \bar{Q} \tag{4}$$

Stofftransportgleichung

$$\rho\left(\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + v_j \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_j}\right) = -\frac{\partial \bar{j}_j}{\partial x_j} - \rho \frac{\partial \overline{c' v_j'}}{\partial x_j} + \bar{J} \tag{5}$$

Die Gl. (2) ist die Reynoldssche Gleichung.

In den Gl. (2) bis (5) kommen neben den Mittelwerten auch die zeitlich gemittelten Produkte der Schwankungen vor, die aus den konvektiven Gliedern hervorgegangen sind und wie eine Erhöhung der Reibung bzw. des Wärme- und Stoffstromes wirken.

Diese Zusatzglieder sind ein Ausdruck für die turbulenten Wechselwirkungen zwischen den stationären Feldern und Schwankungen. Das Gleichungssystem (1) bis (5) ist unbestimmt, da für die zeitlich gemittelten Produkte der Schwankungen keine Gleichungen existieren. Gegenstand der bisherigen und künftigen Modellierung ist es, geeignete Ansätze für die turbulenten Wechselwirkungen zu finden.

3. Modellierung der turbulenten Wechselwirkungen

3.1. *Nutzung von turbulenten Transportkoeffizienten auf der Grundlage eines symmetrischen Spannungsansatzes*

Die bei turbulenten Strömungen durch die Schwankungsbewegungen hervorgerufenen wesentlich intensiveren Transportvorgänge für Impuls, Wärme und Stoff können durch die Einführung turbulenter Transportkoeffizienten beschrieben werden. Für die scheinbare Erhöhung der Reibung wurde von Boussinesq bei turbulenten Strömungen in Anlehnung an den Newtonschen-Spannungsansatz

$$\tau_t = -\rho\,\overline{v_1' v_2'} = \rho\,\nu_t \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \tag{6}$$

eingeführt. Boussinesq ging dabei von der Vorstellung aus, daß in der turbulenten Strömung die Wirbelbewegung der Fluidelemente den wesentlichen Impulsquertransport verursacht. Diesen Impulsquertransport stellte er durch eine veränderte Viskosität und die Querableitung der zeitlich gemittelten Geschwindigkeit dar. Die turbulente Viskosität ist vom Ort und von der zeitlich gemittelten Geschwindigkeit abhängig.

Bei der laminaren Strömung wird im Vergleich dazu der Impulsquertransport durch die Bewegung der Moleküle (bzw. Atome) des Fluids hervorgerufen und mit dem Spannungsansatz

$$\tau_{ij} = \rho\nu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \tag{7}$$

beschrieben.

Die Verallgemeinerung des Boussinesq-Ansatzes führt in Analogie zum Newtonschen-Spannungsansatz zu:

$$\tau_{tij} = \rho \nu_t \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) \tag{8}$$

Durch die Verwendung eines symmetrischen Tensors für die turbulenten Reibungsspannungen τ_{tij} ist die Impulsmomentengleichung (3) identisch erfüllt.

Aus der Ähnlichkeit zwischen turbulentem Impuls-, Wärme- und Stofftransport (Reynolds-Analogie) erhält man für den turbulenten Wärme- und Stoffstrom

$$q_{ti} = \rho c_p \overline{T' v_i'} = -\rho c_p a_t \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} \tag{9}$$

$$j_{ti} = \rho \overline{c' v_i'} = -\rho D_t \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_i} \tag{10}$$

Führt man die turbulente Prandtl- und Schmidt-Zahl ein, so können die turbulenten Transportkoeffizienten für den Wärme- und Stoffstrom durch die turbulente Viskosität ersetzt werden

$$a_t = \frac{\nu_t}{Pr_t} \tag{11}$$

$$D_t = \frac{\nu_t}{Sc_t} \tag{12}$$

Gegenstand der weiteren Modellierung ist die Bestimmung der turbulenten Viskosität.

Prandtl [7] fand mit der von ihm entwickelten Mischungswegtheorie, die die Vermischung benachbarter Turbulenzelemente beschreibt, einen brauchbaren Ansatz für die turbulente Viskosität.

$$\nu_t = l_m^2 \left| \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2} \right| \tag{13}$$

wobei l_m der mittlere Weg (Mischungsweg) ist, der von den Turbulenzelementen quer zur Strömungsrichtung bis zu ihrer Auflösung zurückgelegt wird. Für wandparallele Strömungen gilt bei genügend großem Wandabstand

$$l_m = \kappa y \tag{14}$$

Mit dem Mischungswegansatz (13) und (14) können turbulente Strömungen mit Grenzschichtcharakter in guter Übereinstimmung mit Messungen berechnet werden, während er bei der freien Turbulenz versagt. Prandtl [8] führte deshalb, unabhängig von Kolmogorov [9], eine neue Variable, die spezifische kinetische Turbulenzenergie

$$k = \frac{1}{2} \overline{(v_i' v_i')} \tag{15}$$

zur Berechnung der turbulenten Viskosität mit

$$\nu_t = l k^{1/2} \tag{16}$$

ein, wobei l ein Längenmaßstab der Turbulenzelemente ist und sich durch eine Konstante von l_m unterscheidet. Die Transportgleichung für die kinetische Turbulenzenergie kann aus dem Impulssatz und der Reynoldsschen Gleichung hergeleitet werden. Man erhält dann

$$\bar{v}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = -\overline{v_i' v_j'} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{\frac{v_j' v_i' v_i'}{2}} + \frac{1}{\rho} \overline{v_j' p'} + \nu \frac{\partial^2 k}{\partial x_j \partial x_j} - \nu \overline{\frac{\partial v_i'}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v_i'}{\partial x_j}} + \overline{F_j' v_j'} \tag{17}$$

Der Längenmaßstab l läßt sich mit Hilfe einer weiteren Variablen, der spezifischen Dissipation der Turbulenzenergie

$$\epsilon = \nu \overline{\frac{\partial v_i'}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v_i'}{\partial x_j}} \tag{18}$$

implizit berechnen. Für hohe örtliche Reynolds-Zahlen gilt

$$\epsilon \sim \frac{k^{3/2}}{l} \tag{19}$$

Der Zusammenhang zwischen ν_t k und ϵ wird durch die modifizierte Prandtl-Kolmogorov-Beziehung beschrieben

$$\nu_t = \bar{\bar{c}} \frac{k^2}{\epsilon} \tag{20}$$

Mit den Gl.-en (7) bis (8) und weiteren Vorstellungen über die Modellierung der Dreifachkorrelation und Druckdiffusion nach Launder und Spalding [10] sowie der Zweifachkorrelation durch äußere Feldkräfte (z. B. infolge thermischen Auftriebs) nach Scholz [11] erhält man folgende Transportgleichung für die spezifische kinetische Turbulenzenergie

$$\bar{v}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\frac{\nu_t}{Pr_k} + \nu \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \nu_t \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) - \epsilon + g_j \beta_v \frac{\nu_t}{Pr_t} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \tag{21}$$

Auf ähnliche Weise gelangt man zu einer Transportgleichung für die spezifische Dissipation der Turbulenzenergie [12] bis [14].

$$\bar{v}_j \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\frac{\nu_t}{Pr_\epsilon} + \nu \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] + c_1 \nu_t \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\epsilon}{k} - c_2 \frac{\epsilon^2}{k} + c_3 \frac{\epsilon}{k} g_j \beta_v \frac{\nu_t}{Pr_t} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \tag{22}$$

Bei der Einführung von Abschlußhypothesen sind empirische Funktionen notwendig, die allerdings häufig als Konstanten verwendet werden. Die Konstanten c_D, c_1, c_2 und c_3, die für die entwickelte turbulente Strömung gelten und aus der Betrachtung einfacher Strömungen und Modellparameterstudien gewonnen wurden [15], konnten auch mit Erfolg für Rezirkulationsströmungen benutzt werden [11], [16].

Das Turbulenzmodell (20) bis (22) verwendet zur Berechnung der turbulenten Viskosität die 2 skalaren Parameter k und ϵ. Unter Verwendung der spezifischen kinetischen Turbulenzenergie und des Quadrates der ursprünglich von Kolmogorov vorgeschlagenen zweiten Turbulenzvariablen

$$w = \frac{k}{l^2} \tag{23}$$

läßt sich ein weiteres 2-Parameter-Modell herleiten.

Allgemein kann eine Vielzahl von Turbulenzmodellen mit der spezifischen Turbulenzenergie und einer weiteren Variablen

$$z = k^n l^m \tag{24}$$

gebildet werden.

3.2. Einführung von neuen kinematischen Variablen auf der Grundlage eines unsymmetrischen Spannungstensors

Die experimentellen und theoretischen Untersuchungen turbulenter Strömungen haben gezeigt, daß zur Beschreibung der turbulenten Transportprozesse zusätzliche Variable erforderlich sind, die bisher aus den von Reynolds eingeführten Geschwindigkeitsschwankungen in Form von skalaren Größen (spezifische Turbulenzenergie und deren Dissipation) definiert wurden.

Die Geschwindigkeitsschwankungen sind nach Strscheletzki [17] Auswirkungen der am Meßort mit der Grundströmung vorbeischwimmenden Turbulenzelemente unterschiedlicher Abmessungen. Die turbulente Strömung ist deshalb an die reale Existenz von Substrukturen, die durch die sich drehenden Turbulenzelemente charakterisiert werden, gebunden. Neuere Modelle von Albring [1] und Naue [3] verwenden die ursächliche Wirbelbewegung zur Kennzeichnung und Modellierung des turbulenten Strömungszustandes. Da die Bewegung einzelner Wirbel kompliziert ist, wird hier deren durchschnittliches Verhalten vom Standpunkt der Kontiniumsmechanik beschrieben.

Für die Wirbelbewegung von Turbulenzelementen charakteristischer Abmessungen wird eine mittlere Drehbewegung, die auch als Spin bezeichnet werden kann, eingeführt. Der Spin stellt eine neue kinematische Variable dar, die Vektorcharakter besitzt.

Der zur Korrelation zwischen den Schwankungen zweier Geschwindigkeitskomponenten an zwei Punkten zu verschiedenen Zeiten benutzte Tensor

$$R_{ij} = \overline{v_i'(x_i,t) \cdot v_j'(x_i^{(1)}, t^{(1)})} \tag{25}$$

der bis auf einen Faktor mit dem Tensor der Reynoldsschen Scheinspannungen übereinstimmt, wird auf Grund gewisser Annahmen als symmetrisch betrachtet [4].

Es wird als berechtigt angesehen, diese einschränkenden Annahmen fallen zu lassen und die Auswirkungen eines unsymmetrischen Spannungszustandes auf turbulente Strömungen zu untersuchen.

In der Impulsgleichung (2) werden die Reibungsspannungen und die turbulenten Scheinspannungen durch den Tensor der Gesamtspannungen

$$\overline{p}_{ij} = \overline{\tau}_{ij} - \rho \, \overline{v_i' v_j'} \tag{26}$$

ersetzt. Analog wird in der Impulsmomentengleichung (3) der Tensor der Gesamtmomentenspannungen eingeführt

$$\overline{\mu}_{ij} = \overline{\gamma}_{ij} - \rho I \, \overline{\beta_i' v_j'} \tag{27}$$

Ansätze für unsymmetrische Reibungs- und Momentenspannungen sind aus der Cosserat-Theorie [18] und Kontiniumsmechanik mikropolarer Medien [19] bekannt. Für den turbulenten Spannungszustand eines inkompressiblen Mediums werden folgende Ansätze gemacht:

$$\overline{p}_{ij} = a \left(\frac{\partial \overline{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{v}_j}{\partial x_i} \right) + 2b e_{ijk} \overline{\beta}_k \tag{28}$$

$$\overline{\mu}_{ij} = c \left(\frac{\partial \overline{\beta}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{\beta}_j}{\partial x_i} \right) + 2d e_{ijk} \overline{\vartheta}_k \tag{29}$$

wobei $\overline{\beta}_k$ den Spin der größten und ϑ_k den der kleineren Turbulenzelemente darstellen. Aus dem Vergleich von Gl. (26) und (28) ist ersichtlich, daß der Tensor der Reynoldsschen Scheinspannungen durch einen mit der Drehgeschwindigkeit gebildeten antisymmetrischen Tensor ersetzt wurde

$$-\rho \, \overline{v_i' v_j'} = 2b e_{ijk} \overline{\beta}_k \tag{30}$$

bei dem die Hauptdiagonalelemente identisch verschwinden. Hitzdrahtmessungen in turbulenten Strömungen haben wiederholt gezeigt, daß die Nebendiagonalelemente wesentlich größer sind als die der Hauptdiagonale. Der Proportionalitätskoeffizient für den symmetrischen Anteil der Gesamtspannungen entspricht von der Bedeutung her einer dynamischen Viskosität. Bei verschwindender Turbulenz ist $\overline{\beta}_k \equiv 0$ und $a = \rho\nu$. In vollausgebildeten turbulenten Strömungen sind bekanntlich die turbulenten Scheinspannungen wesentlich größer als die laminaren Reibungsspannungen, so daß für den Tensor der Gesamtspannungen vereinfacht geschrieben werden kann

$$\overline{p}_{ij} = 2b e_{ijk} \overline{\beta}_k \tag{31}$$

Wenn der Tensor der Gesamtmomentenspannungen, G. (29), unsymmetrisch ist, existiert ein Spin der nächst höheren Ordnung $\overline{\vartheta}_k$. Der Einfluß der Spins auf das Geschwindigkeitsfeld nimmt mit steigender Ordnung schnell ab, so daß die Feldprobleme mit wenigen Spinordnungen beschreibbar sind. Für die ebene Strömung genügt der Spin $\overline{\beta}_k$, weil die Kopplung zum Spin der nächst höheren Ordnung $\overline{\vartheta}_k$ verschwindet.

Die isotherme Strömung wird durch die Erhaltungssätze für Masse, Impuls und Impulsmoment, Gl. (1) bis (3), beschrieben. Während die Kontinuitätsgleichung (1) uneingeschränkt gilt, erhält man mit den unsymmetrischen Spannungsansätzen, Gl. (26) bis (29) und (31), die geänderte Impuls- und Impulsmomentengleichung für ebene vollausgebildete turbulente Strömungen

$$\rho \left(\frac{\partial \overline{v}_i}{\partial t} + \overline{v}_j \frac{\partial \overline{v}_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + 2b e_{ijk} \frac{\partial \overline{\beta}_k}{\partial x_j} + \rho \overline{F}_i \tag{32}$$

$$\rho I \left(\frac{\partial \overline{\beta}_i}{\partial t} + \overline{v}_j \frac{\partial \overline{\beta}_i}{\partial x_j} \right) = c \frac{\partial^2 \overline{\beta}_i}{\partial x_j \cdot \partial x_j} + 4b \overline{\beta}_i + \rho \overline{Mi} \tag{33}$$

Die in den Gl. (2) und (3) vorhandenen Glieder mit den zeitlich gemittelten Schwankungsprodukten wurden auf zeitlich gemittelte Variable zurückgeführt und können aus den Gl. (1), (32) und (33) bestimmt werden. Die Impulsmomentengleichung ist dabei von besonderer Bedeutung, da sie eine Berechnungsgleichung für den Spin $\overline{\beta}_k$ darstellt, mit dem sich nach Gl. (30) die Nebendiagonalelemente des Tensors der Reynoldsschen Scheinspannungen bestimmen lassen. Der Proportionalitätskoeffizient in Gl. (30) kann aus den in einfachen turbulenten Scherströmungen gemessenen $\overline{v_1' v_2'}$ -Werten bestimmt werden. Bisherige Untersuchungen haben gezeigt, daß der Wirbeldiffusionskoeffizient c von den Abmessungen der größeren Turbulenzelemente abhängt und somit eine Funktion des Strömungszustandes und der Geometrie des Strömungsgebietes ist [20].

Die wechselseitige Beeinflussung der kinematischen Felder ruft eine Selbstinduktion, die an die Existenz von Turbulenzelementen endlicher Abmessungen gebunden ist, hervor. Die Kopplung der verschiedenen Felder wird durch die Feldkraft $\overline{F}_i$ und das Feldmoment $\overline{M}_i$ gestaltet. Von besonderer Bedeutung für den Turbulenzprozeß ist die Kopplung zwischen der Geschwindigkeit $\overline{v}_i$ und dem Spin $\overline{\beta}_i$ durch das Feldmoment $\overline{M}_i$, für welches in erster Nährung der Ansatz

$$\overline{M}_i = n \cdot \overline{\omega}_i \tag{34}$$

gemacht wurde. Es ist jedoch möglich, die Wirkungen weiterer kinematischer Variabler zu berücksichtigen. Der Proportionalitätskoeffizient n wurde als eine nichtlineare Funktion von der Reynolds-Zahl ermittelt [20]. Die Koeffizienten der Gl. (32) bis (34) wurden aus den experimentellen Daten für die Geschwindigkeit und Reynoldsschen Scheinspannungen bestimmt und mit Erfolg auf zweidimensionale Strömungsfelder übertragen [20], [21], [22]. In der Impulsmomentengleichung erfolgt der konvektive Spintransport nur durch die Geschwindigkeit. Durch tieferes Eindringen in die Kinematik des Transportprozesses kann gezeigt werden, daß auch die Drehbewegung der Turbulenzelemente selbst zusätzliche konvektive Bewegungen hervorruft. Durch die Erfassung dieser Wirkungen sowie der Erweiterung des Ansatzes für die Feldmomente kann das Mehrvariablenmodell der Turbulenz weiterentwickelt werden.

4. Vergleiche der Turbulenzmodelle

Die vorgestellten Turbulenzmodelle unterscheiden sich hinsichtlich der Modellierung der turbulenten Wechselwirkung durch die Benutzung skalarer Variabler (Mehrparametermodelle: kinetische Energie der turbulenten Zusatzbewegung, spezifische Dissipation o. ä.) oder vektorieller Variabler (Mehrvariablenmodell: Drehbewegungen verschiedener Ordnung).

Die Modellierung der turbulenten Scheinspannungen durch Diffusions- und Konvektionsmodelle ergibt für die Mehrvariablenmodelle eine größere Vielfalt von Möglichkeiten der Weiterentwicklung (z. B. Dreidimensionalität der Turbulenz auch bei zweidimensionalen Grundströmungen, verallgemeinerte turbulente Konvektionsgeschwindigkeit, Induktionswirkungen). Je besser hierbei die Operatoren zur Charakterisierung der turbulenten Wechselwirkung ausgewählt werden, umso größer wird die Universalität der verwendeten Modelle sein. Dies muß bewertet werden über eine weitgehende Unveränderlichkeit der Koeffizienten, die zur Kennzeichnung der Modelle benötigt werden.

Wichtig ist, daß für die Schwankungen selbst möglichst Differentialgleichungen formuliert werden, die nicht die Analogie stochastischer Prozesse der Molekularbewegung und der turbulenten Wirbelbewegung fordern. Zuweilen wird diese Analogie sogar als Naturgegebenheit vorausgesetzt.

Das Realverhalten der turbulenten Strömungen äußert sich in dissipativen Strukturen endlichen Maßstabs. Die vorgestellten Modelle zeigen die neuen Zugänge zur Modellierung des zeitlich gemittelten Verhaltens turbulenter Strömungsfelder.

Hierbei ist unverkennbar, daß die neuen Zugänge zur Turbulenztheorie mit erheblichen Aufwendungen zur Aufarbeitung und Integration bisheriger Erfahrungen und Erkenntnisse verbunden sind.

LITERATUR

[1] Albring, W.: Angewandte Strömungslehre, 9. Auflage, S. 338, Berlin 1978.

[2] Mascheck, J.-J.: Über die Bedeutung der molekularen Fluktuationen für die Theorie der turbulenten Strömung. Techn. Univ. Dresden Informationen.

[3] Naue, G.: Einige Probleme der unsymmetrischen Mechanik. Vortrag zum Seminar des Internationalen Weiterbildungszentrums der AdW der sozialistischen Länder vom 8. bis 16. 9. 1979 in Minsk.

[4] Rotta, J.: Turbulente Strömungen, Stuttgart 1972.

[5] Albring, W.: Angewandte Strömungslehre, 9. Auflage, S. 332, Berlin 1978

[6] Schumann, U.: Ein Verfahren zur direkten numerischen Simulation turbulenter Strömungen in Platten- und Ringspaltkanälen und über seine Anwendung zur Untersuchung von Turbulenzmodellen. Dissertation Universität Karlsruhe (TH), 1973.

[7] Prandtl, L.: Über die ausgebildete Turbulenz. ZAMM 5 (1925), S. 136 – 139.

[8] Prandtl, L.: Über ein neues Formelsystem für die ausgebildete Turbulenz. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Kl., S 6 – 19 (1945).

[9] Kolmogorov, A.N.: Gleichungen der turbulenten Bewegung einer inkompressiblen turbulenten Flüssigkeit. Itv. Akad. Nauk. SSR, Seria fizicheska VI, Nr. 1/2 (1942).

[10] Launder, B.E., Spalding, D.B.: Mathematical models of turbulence. Academic Press, London and New York (1972).

[11] Scholz, R.: Numerische Untersuchung ebener, stationärer Strömungen in Räumen mit Strahllüftung. Dissertation Techn. Hochsch. „Carl Schorlemmer" Leuna-Merseburg.

[12] Harlow, F.H., Nakayama, P.I.: Transport of turbulence energie decray rate, Los Alamos. Sci, Lab. University of California, Rep. LA 3854.

[13] Hanjalic, K.: Two dimensional asymmetrical turbulent flow in ducts. Ph. D. Thesis University of London (1970).

[14] Jones, W.P., Launder, B.E.: The prediction of laminarization with a 2-equation model of turbulence. Int. J. Heat Mass Transfer (1972) 15.

[15] Jones, W.P., Launder, B.E.: The calculation of low-Reynoldsnumber phenomena with an two-equation modell of turbulence. Int. J. Heat Mass Transfer (1972) 15.

[16] Nielsen, P.: Die Berechnung von Raumströmungen. Klima-Kälte-Ingenieur 3 (1975) 11.

[17] Strscheletzky, M.: Neue Erkenntnisse zur Berechnung turbulenter Strömungen mit verschiedenen makroskopischen Strukturen, VDI-Fortschritt-Berichte, Reihe 7, Nr. 35

[18] Guenther, W.: Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums. Abh. Braunschweig. Woss. Ges. 10 (1958), S. 195 – 213.

[19] Schmidt, W.W.: Modellierung des Impuls- und Energietransportes in turbulenten Strömungen auf der Grundlage eines strukturierten Kontinuums. Dissertation Techn. Hochsch. „Carl Schorlemmer" Leuna-Merseburg.

[20] Mühlhause, F.: Berechnung von Strömungsfeldern in leeren turbulent durchströmten Räumen. Diplomarbeit, Techn. Hochsch. „Carl Schorlemmer" Leuna-Merseburg.

[21] Artzt, M.: Berechnung turbulenter Geschwindigkeits- und Temperaturprofile für einfache Strömungen mit einem nichtklassischen Turbulenzmodell. Diplomarbeit, Techn. Hochsch. „Carl Schorlemmer" Leuna-Merseburg.

Anschrift der Verfasser

Prof. Dr.-Ing. habil. G. Naue,
Dr.-Ing. W. W. Schmidt,
Dr.-Ing. R. Scholz, Dr.-Ing. P. Wolf
Technische Hochschule
„Carl Schorlemmer"
4200 Merseburg, Geusaer Straße