

# Die Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit einfacher Tragwerke unter statischer Belastung

Gerhard Spaethe

Die Versagenswahrscheinlichkeit hat große Bedeutung für Sicherheitsanalysen auf zuverlässigkeitstheoretischer Grundlage. Es werden verschiedene Möglichkeiten für ihre Berechnung am Beispiel des statisch beanspruchten Tragwerkes mit nur einem Versagensmechanismus dargestellt. Betrachtet wird die numerische Integration, die Momentenmethode, die Zuverlässigkeitstheorie 1. Ordnung und die Monte-Carlo-Methode. Die Ausführungen werden durch ein Zahlenbeispiel ergänzt.

## 1. Allgemeines

Die Bemessung der Baukonstruktionen wird entscheidend durch Sicherheitsfestlegungen in Berechnungsvorschriften beeinflusst, mit denen verschiedene Unsicherheiten, die während des Baues und der Nutzung auftreten können, abgedeckt werden. Ihre Bestimmung erfolgte in der Vergangenheit und erfolgt auch noch heute fast ausschließlich empirisch auf der Basis der Erfahrungen mit früher ausgeführten Bauwerken. Diese traditionelle Vorgehensweise läßt sich als nichtsystematische Trial-and-error-Methode charakterisieren. Mit ihr hat sich in den vergangenen Jahrzehnten ein beachtlicher Erfahrungsschatz zum Sicherheitsproblem akkumuliert, der seinen Niederschlag in den Vorschriften gefunden hat.

Es ist ein Ziel der Zuverlässigkeitstheorie der tragenden Konstruktionen, in diesen Bereich wissenschaftliche Methoden hineinzutragen. Als ein Maßstab für die Sicherheit dient die Wahrscheinlichkeit, daß das Tragwerk den vorhersehbaren Beanspruchungen, denen es unter normalen Bedingungen während des Baus und der Nutzung ausgesetzt sein kann, in einwandfreiem Zustand widersteht. In der Theorie wird meist mit dem zu 1 komplementären Wert der Versagenswahrscheinlichkeit gerechnet.

Die Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit statischer Systeme mit zufälligen Eigenschaften unter zufälligen Lasten ist damit von zentraler Bedeutung für Sicherheitsanalysen auf zuverlässigkeitstheoretischer Basis.

Im folgenden soll ein kurzer Überblick über die wichtigsten Methoden zur Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit  $P_f$  gegeben werden. Dabei wird nur der einfachste Fall, das System mit einem Versagensmechanismus unter statischer Belastung und mit stochastisch unabhängigen Zufallsgrößen, betrachtet.

Es mögen  $n$  Zufallsgrößen  $X_i$ , deren Wahrscheinlichkeitsverteilungen  $F_i$  und -dichten  $f_i$  auf Grund statistischer Untersuchungen bekannt sind, für die Zuverlässigkeit des Tragwerkes von wesentlicher Bedeutung sein. Weiter sei eine Versagensbedingung gegeben, die allgemein in der Form

$$Z = g(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq 0 \quad (1)$$

geschrieben werden kann.  $Z$  wird als Sicherheitszone bezeichnet. Gesucht ist

$$P_f = P(g(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq 0) = P(Z \leq 0), \quad (2)$$

d. h. die Wahrscheinlichkeit, daß die Versagensbedingung erfüllt oder die Sicherheitszone negativ ist.

## 2. Integration

Wir betrachten einen  $n$ -dimensionalen Raum mit den Koordinaten  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Jedem Punkt dieses Raumes ist eine Wahrscheinlichkeitsdichte zugeordnet. Dieser Raum wird durch die Versagensbedingung (1) in zwei Bereiche geteilt, einen Versagensbereich mit  $g \leq 0$  und einen zuverlässigen Bereich mit  $g > 0$ . Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Versagen eintritt, ist dann das Integral über die Dichtefunktion des Versagensbereiches.

$$P_f = \int_{g \leq 0} \dots \int f_1(x_1) f_2(x_2) \dots f_n(x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (3)$$

Bild 1 erläutert die Zusammenhänge am zweidimensionalen Beanspruchungs-Festigkeitsmodell, bei denen die grundlegenden Beziehungen in der Ebene darstellbar sind.

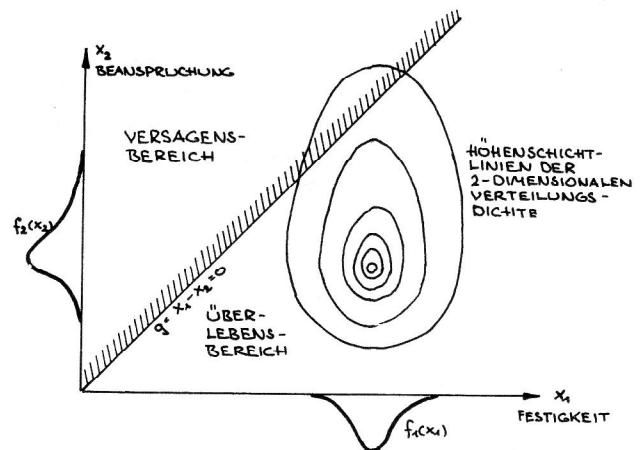


Bild 1  
 Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit für ein zweidimensionales Beispiel

Hier ist  $X_1 = \text{Festigkeit}$  und  $X_2 = \text{Beanspruchung}$ .

Ein Versagen tritt ein, wenn  $g = X_1 - X_2 \leq 0$  ist. (4)

Die Versagensbedingung  $g$  ist hier die Gerade unter  $45^\circ$ . Oberhalb der Geraden liegt der Versagensbereich und darunter der zuverlässige Bereich. Eingezeichnet sind auch die Verteilungsdichten der beiden Zufallsgrößen und die gemeinsame Verteilungsdichte  $f(x_1, x_2) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2)$  in Höhengichtliniendarstellung. Sie bildet einen Hügel mit dem Gesamtvolumen = 1. Die Versagenswahrscheinlichkeit ist der Teil des Volumens, der über dem Versagensbereich liegt und durch die Bedingung  $g = 0$  vom Gesamthügel abgeschnitten wird. Zur Berechnung dieses Volumens folgt aus Gleichung (3)

$$P_f = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{x_2} f_1(x_1) f_2(x_2) dx_1 dx_2$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(x_2) f_2(x_2) dx_2,$$

wenn man zuerst nach  $x_1$  integriert, oder

$$P_f = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{x_1}^{\infty} f_2(x_2) f_1(x_1) dx_2 dx_1$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - F_2(x_1)) f_1(x_1) dx_1$$

(5)

wenn man zunächst nach  $x_2$  integriert.

Leider sind die Dichte- und Verteilungsfunktionen in der Regel so kompliziert, daß eine geschlossene Integration von (3) bzw. (5) nur in Ausnahmefällen möglich ist. Ein solcher Fall liegt vor, wenn alle  $X_i$  normalverteilt sind und  $g$  eine lineare Funktion der  $X_i$  ist. Das Ergebnis der Integration ist identisch mit den Beziehungen, die im Abschnitt 3 für die Momentenmethode angegeben sind. Im allgemeinen Fall wird man auf numerische Integrationsverfahren zurückgreifen müssen.

Beispiel:  $X_1$  sei normalverteilt mit dem Erwartungswert  $\mu_1 = 10$  und der Standardabweichung  $s_1 = 1$

$$f_1(x_1) = \frac{1}{s_1 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_1 - \mu_1)^2}{2 s_1^2}}$$

und  $X_2$  gehorche einer Extremwertverteilung vom Typ I mit dem Erwartungswert  $\mu_2 = 4$  und der Standardabweichung  $s_2 = 0,8$

$$F_2(x_2) = e^{-e^{-\alpha(x_2 - u)}}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{s_2 \sqrt{6}} \quad u = \mu_2 - \frac{1}{\alpha} = 0,57722$$

Die numerische Integration der Versagenswahrscheinlichkeit

$$P_f = \frac{1}{s_1 \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} [1 - e^{-e^{-\alpha(x - u)}}] e^{-\frac{(x - \mu_1)^2}{2 s_1^2}} dx$$

nach der Trapezregel mit der sehr groben Schrittweite von  $x = 2,0$  liefert  $P_f = 1,353 \cdot 10^{-4} = 10^{-3,869}$  in überraschend guter Übereinstimmung mit dem exakten Wert von  $P_f = 1,347 \cdot 10^{-4} = 10^{-3,870}$ .

Bei zwei Zufallsgrößen kann also mit der numerischen Integration sehr schnell die Versagenswahrscheinlichkeit berechnet werden.

Nun treten aber bei praktischen Problemen in der Regel wesentlich mehr Zufallsgrößen auf, und dann ist über einen  $n$ -dimensionalen Raum zu integrieren. Dabei steigt der Rechenaufwand annähernd mit der  $n$ -ten Potenz an. Bei einer größeren Zahl von Zufallsgrößen entsteht daher das Bedürfnis nach anderen Näherungsverfahren mit geringerem numerischem Aufwand.

### 3. Momentenmethode

Die Momentenmethode ist ein Näherungsverfahren, das nicht mit den Wahrscheinlichkeitsverteilungen rechnet, sondern mit den Momenten der Verteilungen. Ist eine Funktion der  $n$  Zufallsgrößen

$$Z = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

gesucht und sind Momente der Verteilungen  $X_i$  bekannt, so lassen sich mit der Momentenmethode Momente der Verteilung von  $Z$  berechnen. Häufig wird nicht mit den Momenten selbst, sondern mit Erwartungswert  $\mu_i$ , Standardabweichung  $s_i$ , Schiefe und Exzeß gerechnet.

Die Momentenmethode beruht auf einer Taylorentwicklung im Erwartungswert der Zufallsgrößen. Für den einfachsten Fall der Berücksichtigung nur eines Reihengliedes ergeben sich für den Erwartungswert  $\mu_z$  und die Standardabweichung  $s_z$  der Sicherheitszone die folgenden Beziehungen

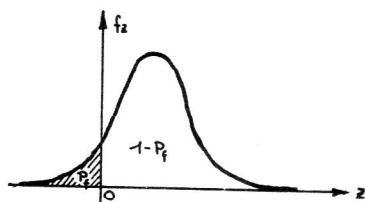
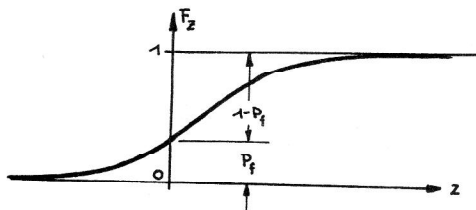
$$\mu_z \cong g(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) \quad (6)$$

$$s_z^2 \cong \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g}{\partial x_i} \Big|_{\mu_i} \right)^2 s_i^2$$

Eine Genauigkeitssteigerung läßt sich durch Berücksichtigung weiterer Reihenglieder erzielen. [1], [2]

Soll dieses Verfahren zur Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit angewendet werden, muß man von den Momenten auf die Verteilung zurückschließen. Die dafür entwickelten mathematischen Verfahren ([3], Abschnitt 6), befriedigen allerdings bei den sehr kleinen Wahrscheinlichkeiten, wie sie hier gesucht sind, meist nicht. Es ist deshalb üblich, willkürlich eine Annahme über den Verteilungstyp von Z zu machen und dann über die Sicherheitszone Z von  $-\infty$  bis Null zu integrieren.

$$P_f = F_z(0) = \int_{-\infty}^0 f_z(z) dz \quad (7)$$



**Bild 2**  
Die Versagenswahrscheinlichkeit  $P_f$  in Abhängigkeit von der Verteilung der Sicherheitszone Z

$P_f$  ist also gleich dem Wert der Verteilungsfunktion der Sicherheitszone an der Stelle  $z = 0$  oder gleich der Fläche unter der Verteilungsdichte  $f_z$  für den Bereich negativer z-Werte. Die einfachste Annahme für die Verteilung von Z ist die Normalverteilung. Setzt man dies hier voraus, so wird näherungsweise

$$P_f = \Phi\left(-\frac{\mu_z}{s_z}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\mu_z/s_z} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Diese Vorgehensweise wird als Momentenmethode 1. Ordnung bezeichnet. Sind alle  $X_i$  normalverteilt und ist g eine lineare Funktion der  $X_i$ , so ist diese Methode mit der exakten Lösung identisch. Bei größeren Schiefen und nichtlinearen Versagensbedingungen stellt die Momentenmethode 1. Ordnung nur eine sehr grobe Näherung dar, bei der besonders bei kleinen Wahrscheinlichkeiten Fehler von mehreren Zehnerpotenzen auftreten können.

Wir zeigen das am gleichen Beispiel mit der schiefen Extremwertverteilung:

$$\mu_z = \mu_1 - \mu_2 = 10 - 4 = 6$$

$$s_z = \sqrt{s_1^2 + s_2^2} = \sqrt{1^2 + 0,8^2} = 1,2806$$

$$P_f = \Phi\left(-\frac{6}{1,2806}\right) = 1,40 \cdot 10^{-6} = 10^{-5,854}$$

Im Vergleich zum exakten Wert  $P_f = 10^{-3,870}$  ist das Ergebnis äußerst unbefriedigend.

Ein weiterer schwerwiegender Nachteil der Momentenmethode ist darin zu sehen, daß das Ergebnis von der speziellen mathematischen Formulierung der Versagensbedingung abhängt. In unserem Beispiel hätte man statt  $X_1 - X_2 = 0$  zweifellos auch

$$\frac{X_1}{X_2} - 1 = 0$$

schreiben können. Dann würden sich ergeben

$$\mu = \frac{\mu_1}{\mu_2} - 1 = 1,5$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{\mu_2^2} s_1^2 + \frac{\mu_1^2}{\mu_2^4} s_2^2} = 0,5590$$

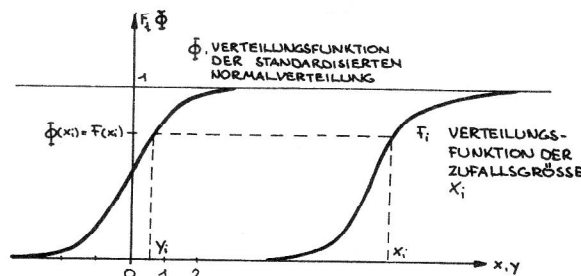
$$P_f = \Phi(-1,5/0,559) = 0,368 \cdot 10^{-2} = 10^{-2,43}$$

Die Beispiele zeigen, daß bei Zufallsgrößen mit größeren Schiefen die Momentenmethode 1. Ordnung völlig unbrauchbare Ergebnisse liefern kann. Die Berücksichtigung weiterer Reihenglieder in der Taylorentwicklung erhöht die Genauigkeit, beseitigt aber nicht die grundsätzlichen Mängel.

#### 4. Zuverlässigkeitstheorie 1. Ordnung

Es werden die gegebenen Zufallsgrößen  $X_i$  durch eine Transformation in standardisierte, normalverteilte Zufallsgrößen  $Y_i$  überführt. Bei dieser Transformation sollen die Wahrscheinlichkeiten für einander entsprechende Punkte nicht geändert werden. Es muß also für alle n Zufallsgrößen und für alle Punkte des Raumes gelten [4]:

$$F_i(x_i) = \Phi(y_i) \text{ oder } x_i = F_i^{-1}(\Phi(y_i)) \quad i = 1, \dots, n \quad (8)$$



**Bild 3**  
Transformation  $x_i = F_i^{-1}(\Phi(y_i))$

Darin ist  $F_i^{-1}$  die Umkehrfunktion von  $F_i$ . Diese Transformation ist in Bild 3 geometrisch dargestellt. Setzt man (8) in die Versagensbedingung (1) ein, so folgt die Versagensbedingung im  $y$ -Raum

$$g(F_1^{-1}(\Phi(y_1)), F_2^{-1}(\Phi(y_2)), \dots, F_n^{-1}(\Phi(y_n))) \leq 0$$

oder kürzer geschrieben

$$\hat{g}(y_1, y_2, \dots, y_n) \leq 0 \quad (9)$$

Der kürzeste Abstand zwischen dieser Versagensbedingung und dem Koordinatenursprung im  $y$ -Raum wird als Sicherheitsindex

$$\beta = \sqrt{y_1^{*2} + y_2^{*2} + \dots + y_n^{*2}} \quad (10)$$

und der Fußpunkt des Lotes auf die Hyperfläche  $\hat{g} = 0$  mit den Koordinaten  $y_i^*$  als Bemessungspunkt bezeichnet.

Ist  $\hat{g} = 0$  eine Hyperebene, so ist die Versagenswahrscheinlichkeit

$$P_f = 1 - \Phi(\beta) = \Phi(-\beta), \quad (11)$$

da die  $y_i$  jetzt alle standardisiert normalverteilt sind. In der Regel wird  $\hat{g}$  nichtlinear sein, dann liefert (11) einen Näherungswert für  $P_f$ .

Die Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit wird also hier auf die Lösung einer Extremwertaufgabe mit Nebenbedingung

$$\beta = \min \left\{ \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2} \mid \hat{g}(y_1, \dots, y_n) = 0 \right\}$$

zurückgeführt.

Zur Lösung dieser Aufgabe sind spezielle Iterationsverfahren entwickelt worden [5], es können aber auch andere Verfahren der Optimierungsrechnung angewendet werden. Die klassische Lösung von Extremwertaufgaben mit Nebenbedingung nach Lagrange führt auf ein System von  $n + 1$  Gleichungen der Form

$$\hat{g}(y_1^*, \dots, y_n^*) = 0 \quad y_i^* - \lambda \frac{\partial \hat{g}}{\partial y_i} \Big|_{y_i^*} = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (12)$$

mit den Unbekannten  $y_1^*, \dots, y_n^*$  und  $\lambda$ , dem Lagrangeschen Multiplikator.

Wir lösen das gleiche Beispiel nochmals nach der Zuverlässigkeitstheorie 1. Ordnung. Die Transformation (8) lautet für die normalverteilte Zufallsgröße  $X_1$

$$F_1^{-1}(\Phi(y_1)) = \mu_1 + s_1 y_1$$

was einer einfachen Standardisierung entspricht, und für die extremwertverteilte Zufallsgröße  $X_2$

$$F_2^{-1}(\Phi(y_2)) = u - \frac{1}{\alpha} \ln(-\ln \Phi(y_2)).$$

Dies in (9) und (12) eingesetzt ergibt das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \mu_1 + s_1 y_1^* - u + \frac{1}{\alpha} \ln(-\ln \Phi(y_2^*)) &= 0 \\ y_1^* - \lambda s_1 &= 0 \\ y_2^* - \lambda \frac{\varphi(y_2^*)}{\alpha \Phi(y_2^*) \ln \Phi(y_2^*)} &= 0 \quad \text{mit } \varphi(y) = \frac{\partial \Phi(y)}{\partial y} \end{aligned} \quad (13)$$

mit den drei Unbekannten  $y_1^*, y_2^*$  und  $\lambda$ . Durch eine Reihe elementarer Umformungen lassen sich  $\lambda$  und  $y_1^*$  eliminieren und dann mit den Newton-Verfahren die restliche Gleichung für  $y_2^*$  iterativ lösen. Für unsere Zahlenwerte ergibt sich die Lösung  $y_1^* = -1,488$ ,  $y_2^* = 3,349$ ,  $\beta = 3,665$ ,  $P_f = 1,238 \cdot 10^{-4} = 10^{-3,907}$  in überraschend guter Übereinstimmung mit dem exakten Wert.

Der Näherungswert für die Versagenswahrscheinlichkeit nach Gleichung (11) ist kleiner als der exakte Wert, wenn der Versagensbereich im  $y$ -Raum konkav ist, und er ist größer als der exakte Wert, wenn der Versagensbereich konvex ist. Ist der Überlebensbereich im  $y$ -Raum eine  $n$ -dimensionale konzentrische Kugel, so gilt

$$P_f = 1 - K_n(\beta^2) \quad (14)$$

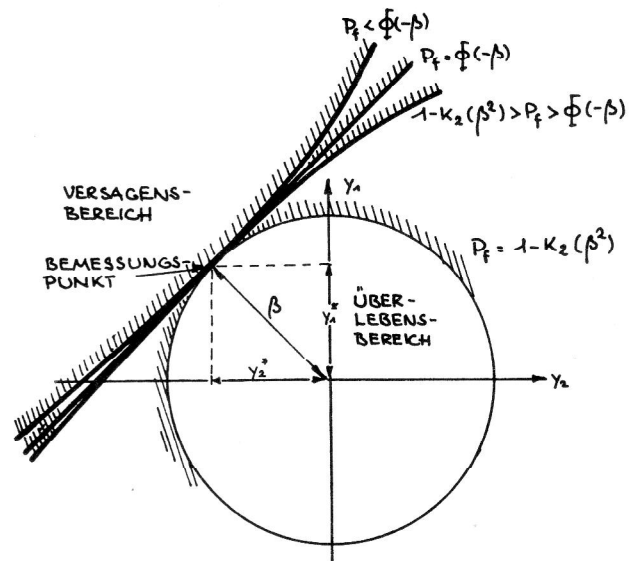


Bild 4  
Eingrenzung der Versagenswahrscheinlichkeit im  $y$ -Raum, dargestellt am 2-dimensionalen Fall

Darin ist  $K_n$  die Verteilungsfunktion der  $\chi^2$ -Verteilung vom Freiheitsgrad  $n$ . Gleichung (14) ist eine obere Schranke für die Versagenswahrscheinlichkeit bei konkaven Versagensbereichen im  $y$ -Raum.

Eine weitere Genauigkeitssteigerung läßt sich erzielen, wenn man die Versagensbedingung  $g$  im Bemessungspunkt durch Hyperflächen 2. Ordnung annähert [6]. Man kann dann von Zuverlässigkeitstheorie 2. Ordnung sprechen.

## 5. Monte-Carlo-Methode

Bei der einfachen Monte-Carlo-Methode werden Zufallszahlen der Zufallsgrößen  $X_1, \dots, X_n$  erzeugt und durch Einsetzen in die Versagensbedingung (1) wird geprüft, ob ein Versagen vorliegt oder nicht. Diese Rechnung, als Versuch bezeichnet, wird nun sehr häufig wiederholt. Es werden die Anzahl der Versuche und die Anzahl der Treffer des Versagensbereiches gezählt. Bei genügend großer Zahl der Versuche ist dann der Quotient

Treffer des Versagensbereiches  
Gesamtzahl der Versuche

ein Näherungswert für die Versagenswahrscheinlichkeit. Dieses sehr einfache Verfahren erfordert allerdings bei kleinen Versagenswahrscheinlichkeiten einen außerordentlich großen Stichprobenumfang. Zur Vermeidung dieser Schwierigkeiten wurden modifizierte Verfahren entwickelt, die eine erhebliche Stichprobenreduktion ermöglichen [7]. Wir gehen von der Beziehung (3) zur Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit aus und führen neue Veränderliche  $u_i$  ein, die mit den  $x_i$  durch die Beziehungen

$$u_i = F_i(x_i) \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = f_i(x_i) \quad (15)$$

verknüpft sind. Da  $F_i$  die Verteilungsfunktion von  $x_i$  ist, kann  $u_i$  nur Werte im Bereich zwischen 0 und 1 annehmen und ist in diesem Intervall gleichverteilt. Mit (15) nimmt (3) die Form

$$P_f = \int \dots \int du_1 \cdot \dots \cdot du_n \quad (16)$$

$$g(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n)) \leq 0$$

an. Durch die Transformation (15) wird die Versagenswahrscheinlichkeit als der Anteil des Volumens eines  $n$ -dimensionalen Einheitswürfels dargestellt, der durch die transformierte Versagensbedingung

$$g(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2), \dots, F_n^{-1}(u_n)) \leq 0$$

abgeschnitten wird. Diese Transformation bringt noch keine Verminderung des Stichprobenumfanges. Es wird deshalb eine zweite Transformation

$$u_i = \psi_i(z_i) \quad i = 1, \dots, n \quad (17)$$

vorgenommen, wobei  $\psi_i$  monotone Abbildungen des Intervalls (0,1) auf sich selbst sind. Jede Funktion  $\psi_i$  wächst monoton von  $\psi_i = 0$  bei  $z_i = 0$  auf  $\psi_i = 1$  bei  $z_i = 1$ . Die  $\psi_i$  werden nun so gewählt, daß im  $z$ -Raum der Versagensbereich vergrößert wird. Dadurch fallen bei der Monte-Carlo-Methode mehr Treffer in den Versagensbereich. Der dadurch entstehende Fehler wird durch eine Gewichtsfunktion ausgeglichen, die im Versagensbereich sehr klein ist.

Mit (17) und  $du_i = \psi_i'(z_i) dz_i$  beträgt dann die Versagenswahrscheinlichkeit

$$P_f = \int \dots \int \psi_1' \cdot \psi_2' \cdot \dots \cdot \psi_n' dz_1 dz_2 \cdot \dots \cdot dz_n$$

$$g(z_1, \dots, z_n) \leq 0$$

darin ist

$$\psi_1' \cdot \psi_2' \cdot \dots \cdot \psi_n' = w$$

diese Gewichtsfunktion. Die Funktionen  $\psi$  müssen nun so gewählt werden, daß tatsächlich eine Genauigkeitssteigerung bzw. Stichprobenreduktion erfolgt. Wenn kleine Werte von  $X_i$  im Versagensbereich liegen (z. B. Festigkeitswerte), dann eignet sich ein Ansatz der Form

$u_i = z_i^k$ , und wenn große  $X_i$  kritisch sind, (z. B. Lasten), ist  $u_i = 1 - (1-z_i)^k$  geeignet. Bild 5 zeigt solche Funktionen und gleichzeitig die gesamte Transformation von  $x_i$  nach  $u_i$  und  $z_i$ .

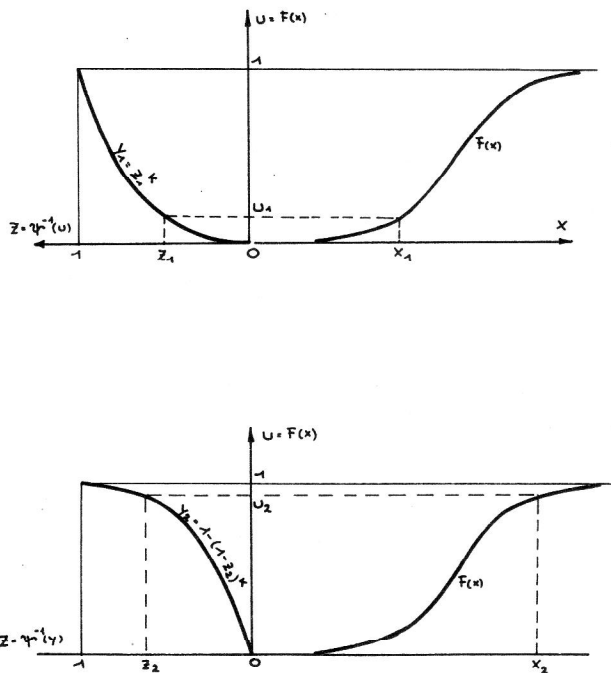


Bild 5  
Beispiel für die Transformation der Zufallsgrößen

Die Genauigkeit der durchgeführten Rechnung ist natürlich von der Wahl des Parameters  $k$  abhängig.  $k = 1$  entspricht der gewöhnlichen Monte-Carlo-Methode. Hannus [7] empfiehlt  $k = 2$  oder  $3$ . Der optimale Wert von  $k$  hängt von der Größe der Versagenswahrscheinlichkeit  $P_f$  und der Dimension  $n$  ab. Reimann [9] gibt ein Verfahren an, mit dem optimale, ganzzahlige  $k$ -Werte iterativ auf der Grundlage einer überschläglichen Vorberechnung bestimmt werden.

Der Berechnungsablauf geht nun folgendermaßen vor sich. Man zieht einen Satz von Zufallszahlen  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , die im Intervall (0,1) gleichverteilt sind. Damit berechnet man die Gewichtsfunktion  $w$  und überprüft, ob der Zufallsvektor mit den Komponenten  $z_1, \dots, z_n$  in den transformierten Versagensbereich des  $z$ -Raumes fällt. Die Gewichtsfunktionen aller Treffer im Versagensbereich werden summiert. Bei genügend großer Zahl von Versuchen konvergiert der Quotient

Summe der Gewichtsfunktionen aller Treffer  
des Versagensbereiches

Summe der Gewichtsfunktionen aller Versuche

gegen die gesuchte Versagenswahrscheinlichkeit  $P_f$ .

Nun ist aber das Integral

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 \psi_1' \cdot \psi_2' \cdot \dots \cdot \psi_n' dz_1 dz_2 \cdot \dots \cdot dz_n = 1.$$

Das bedeutet, daß die Summe der Gewichtsfunktionen aller Versuche gegen die Zahl  $m$  der Versuche konvergiert. Für große  $m$  läßt sich deshalb auch vereinfacht schreiben

$$P_f \cong \frac{\text{Summe d. Gewichtsfunktionen aller Treffer d. Versagensbereiches}}{\text{Anzahl der Versuche}}$$

Für das oben schon mehrfach gerechnete Beispiel ergab eine Computerrechnung mit nur 1000 Versuchen eine Schätzung von  $P_f = 10^{-3,887}$ . Es muß hier natürlich bemerkt werden, daß das Ergebnis einer Zahlenrechnung mit der Monte-Carlo-Methode selbst vom Zufall abhängt. Betrachtungen über den zu erwartenden Fehler findet man in [9].

Es ist offensichtlich, daß bei Anwendungsrechnungen in so einfachen Fällen die Monte-Carlo-Methode nicht in Frage kommen wird. Bei komplizierteren Problemen, insbesondere bei Systemen mit mehreren Versagensmechanismen, die mit anderen Verfahren nur mit hohem Aufwand oder mit grober Näherung gerechnet werden können, stellt die modifizierte Monte-Carlo-Methode mit Stichprobenreduktion ein recht effektives Verfahren dar.

#### LITERATUR

- [1] Tichy, M., Vorlicek, M.: *Statistical Theory of Concrete Structures*. Academia, Prag 1972.
- [2] Spaeth, G.: *Wahrscheinlichkeitstheoretische Analyse der Tragwerkssicherheit. Methoden und Anwendungen*. Bauinformation, Schriftenreihe der Bauforschung, Reihe Technik und Organisation, H. 69, Berlin 1974.
- [3] Ackermann, W. G.: *Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Leipzig 1955.
- [4] Niels, C., Lind, M.: *Formulation of Probabilistic* Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, 1977, S. 273 – 284.
- [5] Fießler, B., Hawranek, R., Rackwitz, R.: *Numerische Methoden für probabilistische Bemessungsverfahren und Sicherheitsnachweise*. TU München, Berichte zur Sicherheitstheorie der Bauwerke H. 14/1976.
- [6] Naumann, H. J., Fießler, B., Rackwitz, R.: *Die genäherte Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit mit Hilfe rotationsymmetrischer Grenzzustandsflächen 2. Ordnung*. TU München, Berichte zur Sicherheitstheorie der Bauwerke H. 22/1977.
- [7] Hannus, M.: *Numerical Analysis of Structural Reliability*. Technical Research Centre of Finland Publication 5, Helsinki 1973.
- [8] Warner, R.F., Kabaila, A.P.: *Monte Carlo Study of structural safety*. Journal of Structural Division, ASEC, 1968, S. 2847 – 2859.
- [9] Reimann, F.: *Mathematische Beschreibung der modifizierten Monte-Carlo-Methode*. Forschungsbericht, Bauakademie der DDR.

Anschrift des Verfassers:  
 Dr.-Ing. Gerhard Spaeth  
 Bauakademie der DDR  
 Institut für Heizung, Lüftung und  
 Grundanliegen der Bautechnik  
 1125 Berlin-Hohenschönhausen,  
 Plauener Straße