

Ein Beitrag zur Schwingungsanalyse an Nanopositionier- und Nanomessmaschinen unter Berücksichtigung von nichtlinearen Reibungsmodellen - Nichtsymmetrisches Stribeck-Modell

K. Zimmermann, I. Zeidis, E. Gerlach, A. Tröbs

In Nanopositionier- und Nanomessmaschinen (NPM-Maschinen) sollen hochdynamische Präzisionspositionierungen durch Kombination von Positioniersystemen mit großen und kleinen Bewegungsbereichen erreicht werden. Beim angestrebten virtuellen Prototyping derartiger Maschinen entsteht im Zusammenhang mit der Modellbildung die Frage nach einer realitätsnahen Beschreibung der Coulombschen Reibung im System, und zwar hinsichtlich der Parameterabhängigkeiten und -größen. In dieser Arbeit wird der Einfluss eines nichtlinearen Reibmodells auf die Dynamik der NPM-Maschine analysiert, welches richtungsabhängige Coulomb-Anteile sowie viskoses Verhalten enthält (nichtsymmetrisches Stribeck-Modell). Die Berücksichtigung der Nichtlinearität führt zu neuen Effekten im Systemverhalten, wie zum Beispiel zu Vibrationsregimes mit stationären Amplituden. Im vorliegenden Artikel wird für den Fall kleiner Reibung mit Hilfe asymptotischer Methoden eine analytische Beziehung für die Ermittlung der genannten stationären Regimes und für deren Stabilitätsanalyse gefunden. Die gewonnenen Abhängigkeiten erlauben auch im Rahmen der Inversen Aufgabe die Ermittlung der Parameter im nichtlinearen Reibgesetz mittels experimenteller Untersuchungen.

1 Einleitung

Die Bestimmung der Parameter im Modell der trockenen Reibung stellt ein wichtiges Problem bei der modellgestützten Entwicklung von NPM-Maschinen dar (Jäger, 2004). In Zimmermann u. a. (2005) wurden Schwingungen der NPM-Maschine mit einem klassischen (linearen) Modell für die trockene Reibung untersucht, d.h. im Falle einer von Null verschiedenen Geschwindigkeit gilt die Beziehung $F_{fr} = F \cdot \operatorname{sgn} V$ (mit $F = \text{const}$, $V \neq 0$). Auf die Veränderlichkeit der Reibungskraft bei gleicher gegebener Geschwindigkeitsrichtung in realen mechanischen Systemen wurde u.a. in Arbeiten von Kauderer (1958), Bowden und Tabor (1964), Hagedorn (1978), Magnus und Popp (1997), De Marchi (1998) hingewiesen. Konkrete funktionale Abhängigkeiten zwischen Reibungskraft und Geschwindigkeit, bei welcher die Kraft für $V \neq 0$ nicht konstant ist, sogenannte „nichtlineare“ Reibungsmodelle (bzw. -gesetze), sind in Arbeiten von Hess und Soom (1990), Canudas de Wit u. a. (1991), Armstrong-Helouvry (1991, 1995), Dupont (1993), Klotzbach und Henrichfreise (2002), Awrejcewicz u. a. (2005) betrachtet worden. Die in diesen Veröffentlichungen teilweise benutzte Terminologie „nichtlineare trockene Reibung“ ist dabei nicht unproblematisch, weil alle Systeme mit trockener Reibung aufgrund der Unstetigkeit an der Stelle $V = 0$ nichtlinear sind. Somit bedeutet oder verweist der Ausdruck „nichtlinear“ eigentlich nur zusätzlich auf die Nichtlinearität der Reibungskraft für $V \neq 0$. Die eingeführte Terminologie soll aber nach dieser notwendigen Bemerkung auch hier weiter verwendet werden. Nichtlineare Gesetze für trockene Reibung berücksichtigen gewöhnlich die Verringerung der Reibungskraft unmittelbar nach dem Beginn der Bewegung und deren mit wachsender Geschwindigkeit danach einsetzende mögliche Vergrößerung. In Awrejcewicz und Olejnik (2005) bzw. Olsson u.a. (1998) finden sich zusammenfassende Beschreibungen von makroskopischen Modellansätzen für die Reibung. In der Arbeit von Klotzbach und Henrichfreise (2002) ist ausführlich ein nichtlineares Modell für trockene Reibung untersucht worden, welches eine Kombination von exponentiellem Abklingen mit linearem Wachstum in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit darstellt. Dieses Stribeck-Modell berücksichtigt die o.a. Reibungseffekte nach Beginn der Bewegung. In der vorliegenden Arbeit wird die Bestimmung der Reibungsparameter des nichtlinearen Modells betrachtet, welches die Richtungsabhängigkeit der Reibungskraft von der Geschwindigkeit bei $V < 0$ und $V > 0$ bei gleichzeitiger Nichtsymmetrie berücksichtigt. Nichtsymmetrie bedeutet, dass der Wert der maximalen Haftreibungskraft unmittelbar vor Bewegungsbeginn unterschiedlich für die jeweilige Bewegungsrichtung ist. Die Kurven der Reibungsfunktion sind auf der Ordinate für $V < 0$ und $V > 0$ um betragsmäßig unterschiedliche Werte verschoben.

2 Mathematisches Modell

Betrachtet wird das Modell der NPM-Maschine aus Zimmermann u. a. (2005), welches im Bild 1 dargestellt ist. Der Positioniertisch ist mit dem Fundament über ein lineares visco-elastisches Element verbunden. Dabei ist c die Steifigkeit, k die Dämpfungskonstante, m die Masse und x_1 die Koordinate zur Beschreibung der Bewegung des Tisches. Es wird angenommen, dass die Erregung des Fundamentes mit der Funktion $x_2(t)$ gegeben ist. Die Bewegungsdifferentialgleichung für den Positioniertisch lautet

$$m \cdot \ddot{x}_1 + c \cdot (x_1 - x_2) + k \cdot (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + F(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = 0, \quad (1)$$

wobei die Funktion F das Gesetz der trockenen Reibung mit richtungsabhängig unterschiedlicher Haftreibungskraft beschreibt (Blekhman, 2000).

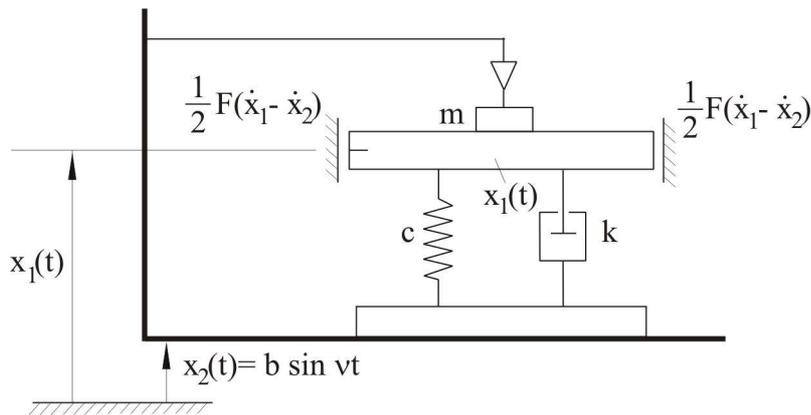


Bild 1. Mechanisches Modell der NPM-Maschine zur Schwingungsanalyse

2.1 Modell der trockenen Reibung

Das Modell der trockenen Reibung $F(V)$ unter Berücksichtigung von Nichtsymmetrie in den Haftreibungskräften wird wie folgt angenommen:

$$F(V) = \begin{cases} F_1(V), & \text{für } V > 0 \\ -F_2(-V), & \text{für } V < 0 \\ \begin{cases} F_{ext}, & \text{wenn } -F_{s-} \leq F_{ext} \leq F_{s+} \\ -F_{s-}, & \text{wenn } F_{ext} < -F_{s-} \\ F_{s+}, & \text{wenn } F_{ext} > F_{s+} \end{cases}, & \text{für } V = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Darin kennzeichnet F_{ext} die Resultierende aller vom Fundament auf die Masse m wirkenden Kräfte. Für die anderen Bezeichnungen gilt: $F_{s+} = F_1(0)$, $F_{s-} = F_2(0)$, $F_2(V) - F_1(V) = F_{s-} - F_{s+}$. Für die weiteren Untersuchungen sei angenommen, dass $F_{s-} \geq F_{s+} \geq 0$ ist.

Die Funktionen $F_1(V)$ und $F_2(V)$ werden nach Klotzbach und Henrichfreise (2002) in der Form

$$F_1(V) = F_k + (F_{s+} - F_k) \cdot \exp(-V/V_s) + d \cdot V, \quad (3)$$

$$F_2(V) = F_{s-} - F_{s+} + F_k + (F_{s+} - F_k) \cdot \exp(-V/V_s) + d \cdot V$$

gegeben, wobei $d \geq 0$ und $V_s > 0$ sind.

Die Funktion $F(V)$ ist im Bild 2 dargestellt. Diese Darstellung macht zugleich die mathematische Bedeutung der Koeffizienten in den Beziehungen (3) deutlich. F_{s+} und F_{s-} kennzeichnen die Schnittpunkte der Funktionen $F_1(V)$ und $F_2(V)$ mit der Ordinate, F_k ist der Schnittpunkt der Asymptote der Funktion $F_1(V)$ mit

der Ordinate, d ist der Anstieg der Asymptote, V_s - ist der Abszissenwert des Schnittpunktes der Tangente an die Funktion $F_1(V)$ im Punkt $(0, F_{s+})$ mit der Asymptote. V_s wird als Stribeck-Geschwindigkeit bezeichnet. Der Koeffizient $\mu = F_{s+}/F_{s-} \leq 1$ charakterisiert die Größe der Nichtsymmetrie in den richtungsabhängigen Haftreibungskoeffizienten.

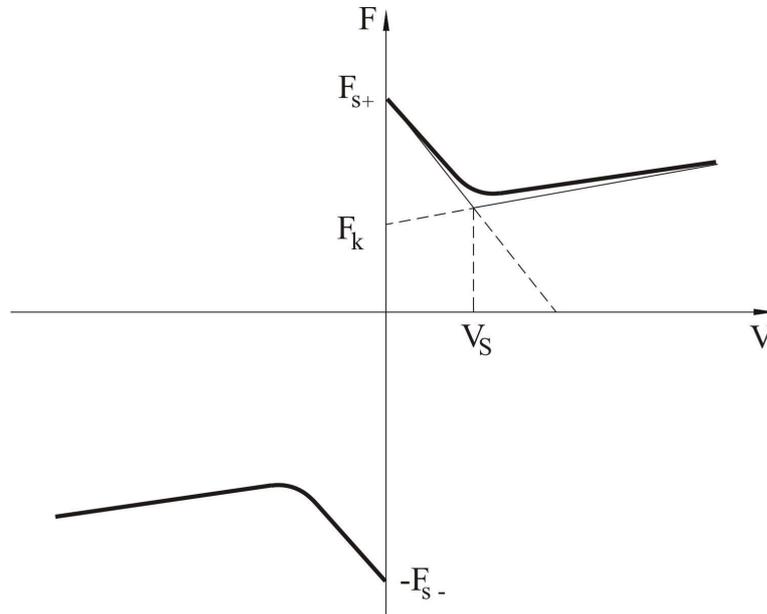


Bild 2. Nichtlineares Modell der trockenen Reibung (Nichtsymmetrisches Stribeck-Modell) nach Klotzbach und Henrichfreise (2002)

2.2 Analyse des Modells

Die von Seiten des Fundamentes ausgehende Erregung sei mit

$$x_2(t) = b \cdot \sin \psi = b \cdot \sin v t \quad (4)$$

gegeben, wobei b die Amplitude und v die Erregerkreisfrequenz sind.

Für die nachfolgenden Untersuchungen werden dimensionslose Größen gemäß

$$(x_1, x_2) = (x_1^*, x_2^*)/l, \quad t = t^* \cdot \omega, \quad f(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = F(\dot{x}_1^* - \dot{x}_2^*)/F_{s-}, \quad \omega := \sqrt{c/m}, \quad \gamma := v/\omega, \\ \varepsilon := F_{s-}/m l \omega^2, \quad \varepsilon \cdot \eta = k/m\omega \quad (\eta = k l \omega / F_{s-}), \quad \varepsilon \cdot \rho = b/l \quad (\rho := m b \omega^2 / F_{s-})$$

eingeführt. l ist eine charakteristische Länge des Systems. Nachfolgend werden ausschließlich dimensionslose Größen mit denselben Bezeichnungen wie für die entsprechenden dimensionsbehafteten Größen benutzt.

Die Gleichung (1) nimmt unter Berücksichtigung von (4) die Form

$$\ddot{x}_1 + x_1 - \varepsilon \cdot \rho \cdot \sin \gamma t + \varepsilon \cdot \eta \cdot \dot{x}_1 - \varepsilon^2 \cdot \rho \eta \gamma \cdot \cos \gamma t + \varepsilon \cdot f(\dot{x}_1 - \varepsilon \cdot \rho \gamma \cdot \cos \gamma t) = 0 \quad (5)$$

an. Die Funktion (3) aus dem Gesetz der trockenen Reibung (2) lautet in dimensionsloser Form

$$f_1(V) = \lambda + (\mu - \lambda) \exp(-V/V_s) + \beta V, \\ f_2(V) = 1 - \mu + \lambda + (\mu - \lambda) \exp(-V/V_s) + \beta V, \quad (6)$$

mit $\mu := F_{s+}/F_{s-} \leq 1$, $\lambda := F_k/F_{s-}$, $\beta := d l \omega / F_{s-}$, $(V, V_s) := (V^*, V_s^*)/l \omega$.

Nachfolgend wird auf den Index an der Koordinate x verzichtet, so dass (5) die endgültig zu untersuchende Form

$$\ddot{x} + x + \varepsilon [f(\dot{x} - \varepsilon \cdot \rho \gamma \cos \gamma t) + \eta \dot{x} - \rho \sin \gamma t - \varepsilon \cdot \rho \eta \gamma \cos \gamma t] = 0 \quad (7)$$

erhält.

Unter der Annahme, dass der Parameter ε klein ($\varepsilon \ll 1$) ist, wird auf (7) eine Mittelungsprozedur angewendet. (Bogoljubow und Mitropolski, 1965). Physikalisch bedeutet die Kleinheit des Parameters ε , dass sowohl die aus der kinematischen Erregung resultierende Kraft, als auch die dissipativen Kräfte (trockene und viskose Reibung) klein im Verhältnis zur elastischen Kraft sind.

Folgendes sei an dieser Stelle besonders angemerkt: Die Anwendung der Mittelungsmethode setzt eine ununterbrochene Bewegung, d.h. eine Bewegung, bei der die Geschwindigkeit auf einem endlichen Intervall niemals den Wert Null annimmt. Auf der anderen Seite sind bei der Bewegung von Systemen mit trockener Reibung Bewegungen mit Halt – sogenanntes Stick-Slip-Verhalten oder Ruckgleiten – möglich. Diese Tatsache ist u.a. in Arbeiten von Kauderer (1958), Andronov u. a. (1965), Hagedorn (1978), Magnus und Popp (1997) angemerkt und untersucht worden. Bei kleinen Werten der trockenen Reibung ist die summierte Zeitdauer der „Stick-Intervalle“ jedoch um vieles kleiner als die Zeitabschnitte der Bewegung. Deshalb kann man in erster Näherung den „Stick-Effekt“ vernachlässigen (Bolotnik u. a., 2006).

Vor der Anwendung der Mittelungsmethode wird die Gleichung (7) in die Standardform nach Bogoljubow und Mitropolski (1965) überführt. Mit der Transformation von x und \dot{x} gemäß

$$x = a \cos \varphi, \quad \dot{x} = -a \sin \varphi, \quad \varphi = t + \theta$$

erhält man aus Gleichung (7)

$$\dot{a} = \varepsilon \sin \varphi [f(-a \sin \varphi - \varepsilon \cdot \rho \gamma \cos \psi) - \eta a \sin \varphi - \rho \sin \psi - \varepsilon \cdot \rho \eta \gamma \cos \psi], \quad (8)$$

$$\dot{\theta} = \varepsilon \frac{\cos \varphi}{a} [f(-a \sin \varphi - \varepsilon \cdot \rho \gamma \cos \psi) - \eta a \sin \varphi - \rho \sin \psi - \varepsilon \cdot \rho \eta \gamma \cos \psi].$$

Hierin bezeichnet $f(V) = f_1(V)$ bei $V > 0$ und $f(V) = -f_2(-V)$ bei $V < 0$.

Betrachtet wird das Verhalten des Systems in der Umgebung der Hauptresonanz, d.h. wenn gilt $\gamma = 1 + \varepsilon \Delta$. Der Mittelungsprozedur folgend wird die neue „langsame“ Variable ξ eingeführt.

$$\xi = \psi - \varphi = \gamma t - (t + \theta) = t(\gamma - 1) - \theta = \varepsilon \Delta \cdot t - \theta.$$

Abschließend erhält man somit aus (8) das System (9) in der Form

$$\dot{a} = \varepsilon \sin \varphi [f(-a \sin \varphi - \varepsilon \cdot \rho \gamma \cos(\xi + \varphi)) - \eta a \sin \varphi - \rho \sin(\xi + \varphi) - \varepsilon \cdot \rho \eta \gamma \cos(\xi + \varphi)],$$

$$\dot{\xi} = -\varepsilon \left\{ \frac{\cos \varphi}{a} [f(-a \sin \varphi - \varepsilon \cdot \rho \gamma \cos(\xi + \varphi)) - \eta a \sin \varphi - \rho \sin(\xi + \varphi) - \varepsilon \cdot \rho \eta \gamma \cos(\xi + \varphi)] - \Delta \right\}, \quad (9)$$

$$\dot{\varphi} = 1 + \dot{\theta}.$$

Um analytische Ausdrücke für das gemittelte System zu erhalten, werden die Funktionen aus der Beziehung (6) durch stückweise lineare approximiert: für $0 \leq V \leq V_s$ mittels einer Tangente im Punkt $(0, F_{s+})$ und einer Asymptote, welche sich bei $V = V_s$ schneiden. Diese Approximation erfasst die wesentlichen Besonderheiten der nichtlinearen Reibung: die Verringerung der Reibkraft unmittelbar nach Bewegungsbeginn und die Vergrößerung der Reibkraft bei einem bestimmten Wert der Geschwindigkeit $V = V_s$. Auch die Nichtsymmetrie wird ebenso beachtet.

In dimensionsloser Form hat die Funktion f , welche die nichtlineare trockene Reibung mit Unsymmetrie darstellt, die Form (Bild 3):

$$f = \begin{cases} -r \cdot V + \mu, & 0 < V \leq V_s \\ \beta \cdot V + \lambda, & V > V_s \\ -r \cdot V - 1, & -V_s \leq V < 0 \\ \beta \cdot V - (1 - \mu + \lambda), & V < -V_s \end{cases}, \quad (10)$$

mit $r = \frac{\mu - \lambda}{V_s} - \beta \geq 0$, $0 < \mu \leq 1$.

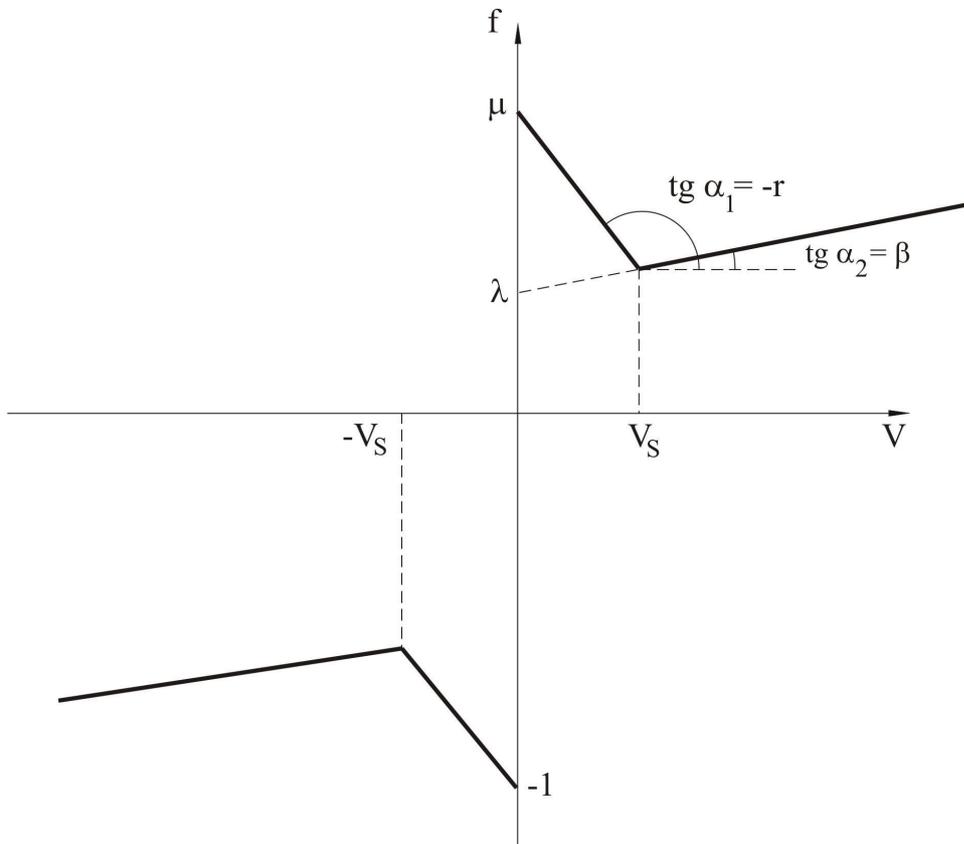


Bild 3. Approximation des Reibungsgesetzes

Der angegebenen Methodik folgend wird auf die rechte Seite des Systems (9) die Prozedur $\langle \dots \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\dots) d\varphi$

(Mittelung über die „schnelle“ Variable φ) angewendet. Als Ergebnis erhält man unter Berücksichtigung von Termen zweiter Ordnung in ε folgende Gleichungen:

- für $a > V_s$

$$\dot{a} = \frac{\varepsilon}{2\pi} \left[a(r + \beta)(2\kappa - \sin 2\kappa) + 4(\mu - \lambda)\cos\kappa - 2(1 + \mu) - \frac{a\beta}{2} - \frac{a\eta}{2} - \pi\rho\cos\xi \right] \quad (11)$$

mit $\kappa = \arcsin \frac{V_s}{a}$ und

- für $a \leq V_s$

$$\dot{a} = \varepsilon \left[\frac{r - \eta}{2} a - \frac{1 + \mu}{\pi} - \frac{\rho}{2} \cos\xi \right]. \quad (12)$$

Für die Variable ξ folgt die Gleichung

$$\dot{\xi} = \varepsilon \left(\frac{\rho}{2a} \cdot \sin \xi + \Delta \right). \quad (13)$$

Nachfolgend werden (11) und (12) auf die neue Form

$$\dot{a} = \begin{cases} \varepsilon \left[\frac{\mu - \lambda}{2} \cdot \frac{a}{V_s} - \frac{\eta + \beta}{2} a - \frac{1 + \mu}{\pi} - \frac{\rho}{2} \cos \xi \right], & a \leq V_s, \\ \varepsilon \left[\frac{\mu - \lambda}{\pi} \left(\frac{a}{V_s} \arcsin \frac{V_s}{a} + \sqrt{1 - \frac{V_s^2}{a^2}} \right) - \frac{\eta + \beta}{2} a - \frac{1 + \mu}{\pi} - \frac{\rho}{2} \cos \xi \right], & a > V_s. \end{cases} \quad (14)$$

transformiert.

Aus der Gleichung (14) ist erkennbar, dass der Geradenanstieg nach der Knickstelle im Reibungsgesetz (10) nur auf den Dämpfungskoeffizient Einfluss hat. Somit kann man für die Berücksichtigung dieses Effektes einen effektiven dimensionslosen Dämpfungskoeffizient $\eta' = \eta + \beta$ einführen.

Für den Fall $V_s \rightarrow 0$ (d.h. die Knickstelle strebt zum Koordinatenursprung) und bei endlicher Amplitude a

erhält man mit der Genauigkeit von Gliedern zweiter Ordnung in $\frac{V_s^2}{a^2}$:

$$\dot{a} = \varepsilon \left[\frac{\mu - 2\lambda - 1}{\pi} - \frac{\eta'}{2} a - \frac{\rho}{2} \cos \xi \right] + O\left(\frac{V_s^2}{a^2}\right). \quad (15)$$

Folglich erscheint der Unstetigkeitspunkt V_s in der linearen Näherung bezüglich $\frac{V_s}{a}$ nicht. Die Gleichung (15)

für die Amplitude mit der Genauigkeit von Gliedern zweiter Ordnung in $\frac{V_s}{a}$ ist identisch zu der entsprechenden

Gleichung im Falle der sogenannten linearen symmetrischen Coulombschen Reibung, welche in der Arbeit Zimmermann u. a. (2005) analysiert wurde.

Aus der Gleichung (15) folgt, dass das Auftreten der Stribeck-Geschwindigkeit V_s nur in der zweiten Näherung eine Rolle spielt

$$\dot{a} = \varepsilon \left[\frac{\mu - 2\lambda - 1}{\pi} - \frac{\mu - \lambda}{3\pi} \cdot \frac{V_s^2}{a^2} - \frac{\eta'}{2} a - \frac{\rho}{2} \cos \xi \right] + O\left(\frac{V_s^4}{a^4}\right).$$

Der asymptotischen Methode folgend, sucht man die Bewegung mit einer stationären Amplitude, d.h. wenn $\dot{a} = 0$. Dann folgt aus der Gleichung (14) $\xi = const$.

Zuerst wird der Fall $a \leq V_s$ analysiert. Für diese Annahme gewinnt man aus der Gleichung (13) und der ersten Gleichung von (14) unter Beachtung von $\xi = const$ eine Bestimmungsgleichung für die Amplitude a :

$$\left[\left(\frac{\mu - \lambda}{2V_s} - \frac{\eta'}{2} \right)^2 + \Delta^2 \right] a^2 - \frac{2(1 + \mu)}{\pi} \left(\frac{\mu - \lambda}{2V_s} - \frac{\eta'}{2} \right) a + \frac{(1 + \mu)^2}{\pi^2} - \frac{\rho^2}{4} = 0. \quad (16)$$

Die Bedingungen, bei welcher (16) zwei positive Lösungen besitzt, welche die Forderung $a \leq V_s$ erfüllen, lauten:

$$\frac{2}{\pi} \cdot \frac{(1 + \mu)|\Delta|}{\sqrt{\left(\frac{\mu - \lambda}{2V_s} - \frac{\eta'}{2} \right)^2 + \Delta^2}} < \rho < \frac{2(1 + \mu)}{\pi},$$

$$\frac{\mu - \lambda}{V_s} > \eta', \quad \frac{1 + \mu}{\pi} \cdot \left(\frac{\mu - \lambda}{2V_s} - \frac{\eta'}{2} \right) < V_s, \quad (17)$$

$$\left[\left(\frac{\mu - \lambda}{2V_s} - \frac{\eta'}{2} \right) V_s - \frac{1 + \mu}{\pi} \right]^2 + \Delta^2 V_s^2 - \frac{\rho^2}{4} \geq 0.$$

Entsprechend folgt als Bedingung für die Existenz nur einer Lösung für $a \leq V_s$

$$\rho \geq \frac{2(1 + \mu)}{\pi}, \quad \left[\left(\frac{\mu - \lambda}{2V_s} - \frac{\eta'}{2} \right) V_s - \frac{1 + \mu}{\pi} \right]^2 + \Delta^2 V_s^2 - \frac{\rho^2}{4} \geq 0. \quad (18)$$

Im Fall $a > V_s$ nimmt die Bestimmungsgleichung für die stationäre Amplitude a die Form

$$\left[\frac{\lambda - \mu}{\pi} \cdot \left(\frac{a}{V_s} \arcsin \frac{V_s}{a} + \sqrt{1 - \frac{V_s^2}{a^2}} \right) + \frac{\eta'}{2} a + \frac{1 + \mu}{\pi} \right]^2 + a^2 \Delta^2 - \frac{\rho^2}{4} = 0 \quad (19)$$

an. Der transzendente Charakter der Gleichung (19) erschwert ihre analytische Untersuchung mit dem Ziel die Anzahl der Lösungen zu ermitteln. Bei V_s gegen Null strebend, folgt $\frac{a}{V_s} \arcsin \frac{V_s}{a} \rightarrow 1$ und die Gleichung (19) wird eine quadratische Gleichung für die Amplitude a . Für $\mu = \lambda$ unterscheiden sich die Gleichungen (16) und (19) nicht und sie fallen mit der entsprechenden Gleichung für die stationäre Amplitude aus der Arbeit Zimmermann u. a. (2005) zusammen. Dieses Resultat erhält man auch aus der Beziehung (19) für $\mu \neq \lambda$ wenn $V_s \rightarrow \infty$ angenommen wird. Wenn die Knickstelle V_s fehlt und somit die Nichtlinearität im Reibungsgesetz sich nur in der Änderung der Reibung (Verringerung bei $\beta < 0$ und Vergrößerung bei $\beta > 0$, Bild 3) mit wachsender Geschwindigkeit ausdrückt, können die gesuchten Parameter mit der Beziehung aus der o.g. Arbeit gewonnen werden, wenn man anstelle des Dämpfungskoeffizienten η den neuen (effektiven) Dämpfungskoeffizient $\eta' = \eta + \beta$ einführt.

Bemerkung: Im Fall der nichtlinearen Reibung nimmt die Amplitude a einen endlichen Wert im Fall der Resonanz ($\Delta = 0$) und bei fehlender Dämpfung ($\eta = 0$, oder sogar $\eta' = 0$) an, sobald $\mu \neq \lambda$ gilt.

3 Stabilitätsanalyse

Für die Untersuchung der Stabilität der stationären Amplitude werden die aus (13) und (14) folgenden Variationsgleichungen aufgestellt.

Im Fall $a \leq V_s$ gilt:

$$\delta \dot{a} = \frac{\varepsilon}{2} \left[\left(\frac{\mu - \lambda}{V_s} - \eta' \right) \delta a + \rho \sin \xi \cdot \delta \xi \right], \quad (20)$$

$$\delta \dot{\xi} = -\varepsilon \frac{\rho}{2a} \left(\frac{1}{a} \sin \xi \cdot \delta a - \cos \xi \cdot \delta \xi \right).$$

Das charakteristische Polynom $P(q)$ für das System (20) hat die Form:

$$P(q) = q^2 - \varepsilon \left(\frac{\mu - \lambda}{V_s} - \eta' - \frac{1 + \mu}{\pi} \cdot \frac{1}{a} \right) q + \varepsilon^2 \left[\left(\frac{\mu - \lambda}{2V_s} - \frac{\eta'}{2} \right) \left(\frac{\mu - \lambda}{2V_s} - \frac{\eta'}{2} - \frac{1 + \mu}{\pi} \cdot \frac{1}{a} \right) + \Delta^2 \right]. \quad (21)$$

Die Positivität der Koeffizienten des Polynoms (21) als Bedingung für die Stabilität (Gantmacher, 1960) führt zu den Forderungen:

$$\frac{\mu - \lambda}{V_s} - \eta' - \frac{1 + \mu}{\pi} \cdot \frac{1}{a} < 0, \quad (22)$$

$$\left(\frac{\mu - \lambda}{2V_s} - \frac{\eta'}{2} \right) \left(\frac{\mu - \lambda}{2V_s} - \frac{\eta'}{2} - \frac{1 + \mu}{\pi} \cdot \frac{1}{a} \right) + \Delta^2 > 0.$$

Aus (22) folgt im Speziellen, dass für $\frac{\mu - \lambda}{V_s} \leq \eta'$ die Stabilitätsbedingung sichtbar nicht erfüllt wird.

Gleichzeitig kann man dem Ausdruck (17) entnehmen, dass in diesem Fall nicht mehr als eine stationäre Amplitude existiert. Für die Existenz dieser Amplitude, welche die Bedingung $a \leq V_s$ erfüllt, ist die Einhaltung der Ungleichungen (18) notwendig und hinreichend.

Im Fall $a > V_s$ lauten die Variationsgleichungen

$$\delta \dot{a} = \frac{\varepsilon}{2} \left\{ \left[\frac{\mu - \lambda}{\pi} \cdot \frac{2}{V_s} \left(\arcsin \frac{V_s}{a} - \frac{\frac{V_s}{a}}{\sqrt{1 - \frac{V_s^2}{a^2}}} \right) - \eta' \right] \delta a + \rho \sin \xi \cdot \delta \xi \right\}, \quad (23)$$

$$\delta \dot{\xi} = -\varepsilon \frac{\rho}{2a} \left(\frac{1}{a} \sin \xi \cdot \delta a - \cos \xi \cdot \delta \xi \right),$$

und das davon abgeleitete charakteristische Polynom

$$P(q) = q^2 - \varepsilon \cdot \frac{1}{V_s} \left[\frac{\mu - \lambda}{\pi} \left(2 \arcsin \frac{V_s}{a} + \frac{V_s}{a} \sqrt{1 - \frac{V_s^2}{a^2}} - \frac{\frac{V_s}{a}}{\sqrt{1 - \frac{V_s^2}{a^2}}} \right) - \frac{1 + \mu}{\pi} \cdot \frac{V_s}{a} - \eta' V_s \right] q +$$

$$+ \varepsilon^2 \left\{ \frac{1}{V_s^2} \left[\frac{\mu - \lambda}{\pi} \left(\arcsin \frac{V_s}{a} + \frac{V_s}{a} \sqrt{1 - \frac{V_s^2}{a^2}} \right) - \frac{1 + \mu}{\pi} \cdot \frac{V_s}{a} - \frac{\eta'}{2} \cdot V_s \right] \times \right.$$

$$\left. \times \left[\frac{\mu - \lambda}{\pi} \left(\arcsin \frac{V_s}{a} - \frac{\frac{V_s}{a}}{\sqrt{1 - \frac{V_s^2}{a^2}}} \right) - \frac{\eta'}{2} \cdot V_s \right] + \Delta^2 \right\}. \quad (24)$$

Die Forderung nach positiven Koeffizienten von (24) zur Sicherung der Stabilität ergibt die Ungleichungen:

$$\frac{\mu - \lambda}{\pi} \left(2 \arcsin \frac{V_s}{a} + \frac{V_s}{a} \sqrt{1 - \frac{V_s^2}{a^2}} - \frac{\frac{V_s}{a}}{\sqrt{1 - \frac{V_s^2}{a^2}}} \right) - \eta' V_s - \frac{1 + \mu}{\pi} \cdot \frac{V_s}{a} < 0, \quad (25)$$

$$\frac{1}{V_s^2} \left[\frac{\mu - \lambda}{\pi} \cdot \frac{V_s}{a} \left(\frac{a}{V_s} \arcsin \frac{V_s}{a} + \sqrt{1 - \frac{V_s^2}{a^2}} \right) - \frac{\eta'}{2} V_s - \frac{1 + \mu}{\pi} \cdot \frac{V_s}{a} \right] \times$$

$$\times \left[\frac{\mu - \lambda}{\pi} \cdot \frac{V_s}{a} \left(\frac{a}{V_s} \arcsin \frac{V_s}{a} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V_s^2}{a^2}}} \right) - \frac{\eta'}{2} \cdot V_s \right] + \Delta^2 > 0.$$

Nach Einführung der Größe $\kappa = \arcsin \frac{V_s}{a}$ (mit $0 < \kappa < \frac{\pi}{2}$) erhält man die Ungleichung (25) in der kompakteren Form

$$\frac{\mu - \lambda}{\pi} (2\kappa - \operatorname{tg} \kappa) - \eta' V_s - \frac{1 + \mu}{\pi} \cdot \sin \kappa < 0, \quad (26)$$

$$\frac{1}{V_s^2} \left[\frac{\mu - \lambda}{2\pi} \cdot (2\kappa + \sin 2\kappa) - \frac{\eta'}{2} V_s - \frac{1 + \mu}{\pi} \cdot \sin \kappa \right] \cdot \left[\frac{\mu - \lambda}{\pi} \cdot \frac{V_s}{a} (\kappa - \operatorname{tg} \kappa) - \frac{\eta'}{2} \cdot V_s \right] + \Delta^2 > 0.$$

Somit sind für die Stabilität der stationären Amplituden, welche aus der Gleichung (16) für $a \leq V_s$ bzw. aus Gleichung (19) für $a > V_s$ gefunden werden, notwendige und hinreichende Bedingungen die Erfüllung der entsprechenden Bedingungen (22) und (25) (oder (26)).

4 Ergebnisse der Simulationen

Im Bild 4 sind $x(t)$ und $a(t)$ als numerische Lösung der exakten Gleichungen (7) bzw. als ebenfalls numerische Lösung aus dem gemittelten Gleichungssystem (13), (14) für folgende Parameterwerte:

$$\mu = 0.8, \lambda = 0.2, \eta = 0, \beta = 0 (\eta' = 0), V_s = 0.5, \rho = 1.5, \Delta = 0.5, \varepsilon = 0.1 \quad (27)$$

gezeigt. Die angenommenen Werte in (27) bedeuten mit Blick auf das Reibungsgesetz (Bild 3)

- Dämpfung ist nicht vorhanden ($\eta = 0$)
- nach dem Punkt $V = V_s$ beginnt ein horizontaler Abschnitt ($\beta = 0$)
- die Reibung ist nicht symmetrisch, d.h. die Größe der Reibungskraft ist abhängig von der Richtung der Geschwindigkeit ($\mu = 0.8$)
- nach dem Beginn der Bewegung gibt es eine deutliche Verringerung der Reibung ($\lambda = 0.2$).

Aus dem Bild 4 ist sichtbar, dass es eine gute Übereinstimmung zwischen der Schwingungsamplitude, welche aus der exakten Gleichung ermittelt wurde, und der Amplitude, die aus der gemittelten Gleichung folgt, gibt. Die Amplitude $a(t)$ erweist sich quasi als „Hüllkurve“ der Funktion $x(t)$, und beginnend mit $t \approx 600$ wird die Amplitude a stationär. Der mit Hilfe der Beziehung (19) bestimmte stationäre Wert der Amplitude ist $a = 1.46$. Die Nichtsymmetrie der Reibung beeinflusst das Ergebnis wenig, das Bild ist praktisch symmetrisch bezüglich der Ordinate. Die nachfolgenden Berechnungen zeigen, dass erst bei großen Werten der Nichtsymmetrie ($\mu = 0.5$) und der relativen Reibung ($\varepsilon = 0.5$) deren Einfluss deutlich sichtbar wird, vorausgesetzt alle anderen Werte bleiben erhalten.

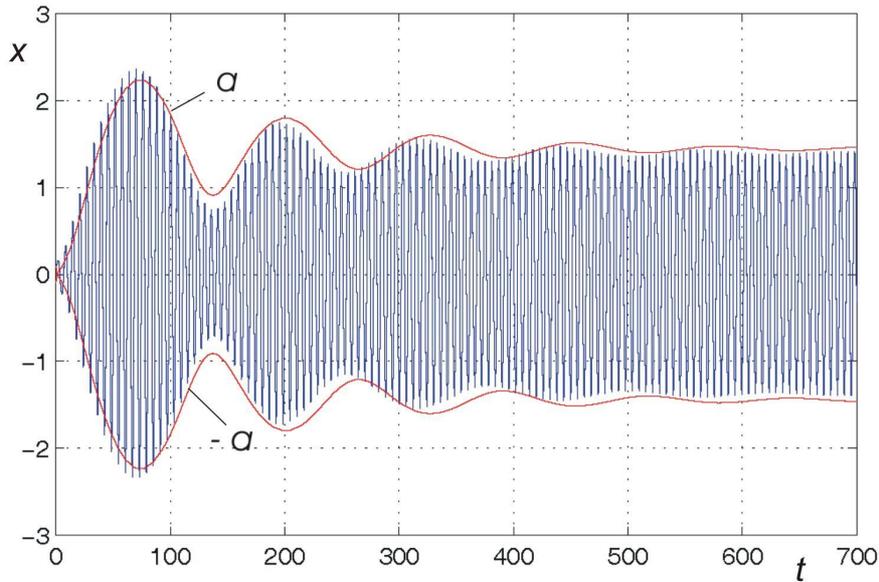


Bild 4. Funktionen $x(t)$ und $a(t)$ als Lösungen der exakten und der gemittelten Gleichung

Für die gefundenen Amplitudenwerte und die o.g. Parameter (27) wird die Forderung (26) erfüllt. Folglich ist die entsprechende stationäre Amplitude stabil. Das Bild 5 zeigt das Phasenporträt, welches aus dem gemittelten Systemen (13) und (14) gewonnen wurde. Mit den Kreisen sind die äquidistanten (bezogen auf die Zeit) Punkte in der Phasebene gekennzeichnet. Dem Bild 5 ist zu entnehmen, dass der stationäre Amplitudenwert $a = 1.46$ (der zugehörige Phasenwert beträgt $\xi = 4.45$) ein stabiler Strudelpunkt ist.

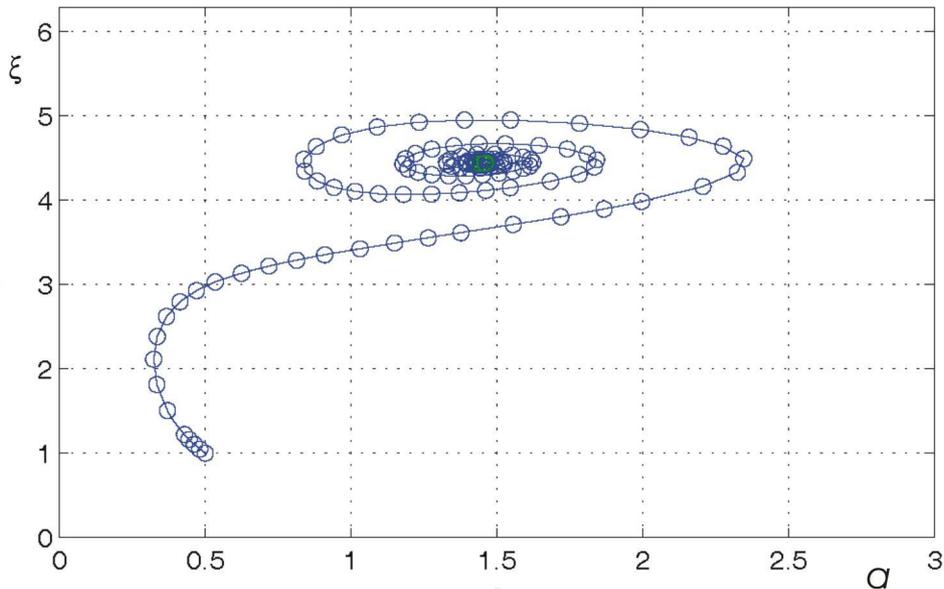


Bild 5. Grafische Darstellung der Phase $\xi(t)$ über der Amplitude $a(t)$ im Fall einer stationären Amplitude

Das Phasenbild für den Fall zweier stationärer Amplituden ist in den Bildern 6 und 7 gezeigt. Die Parameterwerte für diese Beispiele

$$\mu = 0.8, \lambda = 0.2, \eta = 0.1, \beta = 0.1 (\eta' = 0.2), V_s = 1, \rho = 1.0, \Delta = 0.3, \varepsilon = 0.1 \quad (28)$$

führen, wie angeführt, zu zwei Amplituden, von denen aber nur eine stabil ist. Diese Amplituden sind in verschiedenen Phasenbildern gezeigt, da für die Veranschaulichung einer instabilen Amplitude ein deutlich größerer Maßstab notwendig ist. Im Bild 6 sind drei, von unterschiedlichen Punkten ausgehende, Phasenkurven dargestellt, die in einen Punkt einlaufen, welcher zur stationären Amplitude $a = 1.15$ gehört. Der Phasenwert dazu beträgt $\xi = 3.95$. Für die stationäre Amplitude $a = 1.15$ werden die Stabilitätsbedingungen (26) erfüllt.

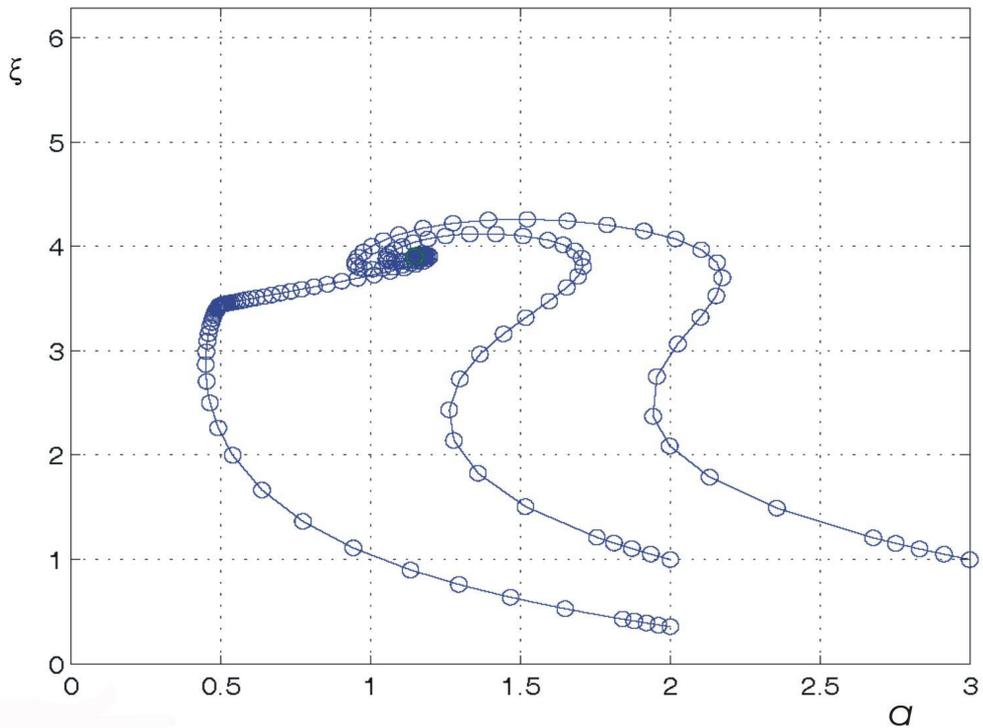


Bild 6. Phasenbild bei zwei stationären Amplituden (dargestellt für die stabile Amplitude)

Das Bild 7 zeigt das Phasenporträt für den nicht stabilen stationären Punkt ($a = 0.438$, $\xi = 3.4$) in einem im Vergleich zum Bild 6 deutlich vergrößerten Maßstab. Auf der rechten Seite ist noch ein Teil der Kurve zu sehen, welche zum stabilen Punkt hinläuft (siehe linke Kurve im Bild 6).

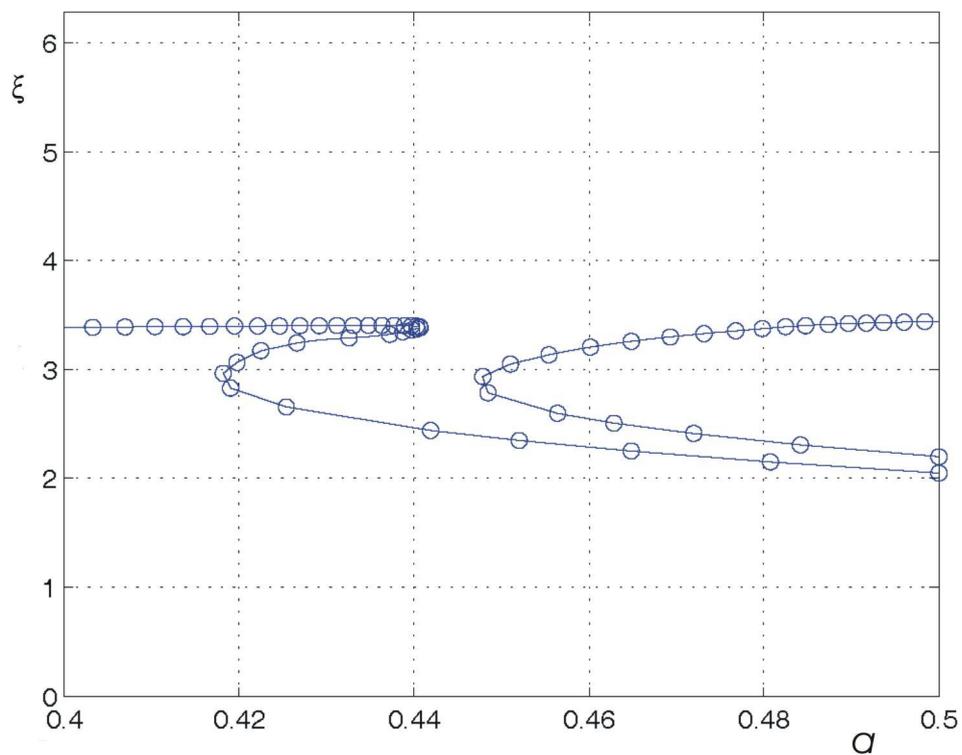


Bild 7. Phasenbild bei zwei stationären Amplituden (dargestellt für die nicht stabile Amplitude)

Für den Wert der stationären Amplitude $a = 0.438$ (Phase $\xi = 3.4$) wird die Stabilitätsbedingung (22) nicht erfüllt und die Phasenkurven laufen auseinander.

5 Zusammenfassung

Die asymptotische Methode (Mittelungsmethode) ermöglicht für eine relative kleine Reibung analytische Beziehungen zur Bestimmung der stationären Amplitude der Schwingung und deren Stabilitätsuntersuchung bei einem nichtlinearen Reibungsgesetz mit Nichtsymmetrie zu formulieren. Dabei kann für die Korrektheit der Anwendung der genannten Methode die Reibung selbst durchaus nicht klein sein, wenn nur die Fundamentsteifigkeit genügend groß ist. Im Fall der stückweise linearen Approximation des Reibungsgesetzes wird es möglich, im Sinne einer Inversen Aufgabe, aus den gefundenen Abhängigkeiten die Reibungsparameter aus Experimenten zu ermitteln. Es wurde gezeigt, dass die charakteristische Besonderheit des nichtlinearen Gesetzes der trockenen Reibung die Existenz mehrerer stationärer Amplituden ist. Somit ist die experimentelle Bestimmung der Reibparameter mit dem Auffinden solcher Amplituden bei verschiedenen kinematischen Anregungen verbunden. Nach der Durchführung einer Serie von Experimenten und den dazu gehörenden Messergebnissen kann man aus den Gleichungen für die stationären Amplituden der Schwingungen Beziehungen für die Parameteridentifikation im nichtlinearen Reibgesetz erhalten. Die gefundenen Ergebnisse werden zur Modellbildung und Analyse der Dynamik der NPM-Maschine, basierend auf unterschiedlichen Abstraktionsstufen, eingesetzt.

Literatur

- Andronov, A.A.; Witt A.A.; Chaikin S.E.: *Theorie der Schwingungen*. Akademie-Verlag, Berlin, (1965).
- Armstrong-Helouvry, B.: *Control of Machines with Friction*. Kluwer Academic Publishers, (1991).
- Armstrong-Helouvry, B.: A Survey of Models, Analysis Tools and Compensation Methods for the Control of Machines with Friction. *Automatica*, 30(7), (1994), p. 1083 – 1138.
- Awrejcewicz, J.; Olejnik, P.: Analysis of Dynamic Systems with various Friction Laws. *Appl. Mechanics Review*. 58 (2005), p. 389-411.
- Blekhman I.I.: *Vibrational Mechanics: Nonlinear Dynamics. Effects, General Approach, Applications*. World Scientific, (2000).
- Bogoljubow, N.N.; Mitropolski, Yu. A.: *Asymptotische Methoden in der Theorie der nichtlinearen Schwingungen*. Akademie-Verlag, Berlin, (1965).
- Bolotnik, N.N.; Zeidis, I. M.; Zimmermann, K.; Yatsun, S.F.: Dynamics of Controlled Motion of Vibration-Driven Systems. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 45(5), (2006), p. 831-840
- Bowden, F.B.; Tabor, D.: *Friction and Lubrication of Solids*. Oxford University Press, (1964).
- Canudas de Wit, C.; Noel, P.; Aubin, A.; Brogliato, B.: Adaptive Friction compensation in Robot Manipulators: Low Velocities. *The International Journal of Robotic Research*, 10(3), (1991), p. 189 – 199.
- De Marchi, J.A.: Modelling of Dynamic Friction, Impact Backlash and Elastic Compliance Nonlinearities in Machine Tools, with Applications to Asymmetric Viscous and Kinetic Friction Identification. PhD-Thesis, Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, New York, 1998
- Dupont, P.: The Effect of Friction on the Forward Dynamics Problem . *The International Journal of Robotic Research*, 12(2), (1993), p. 164 – 178.
- Gantmacher, F.R.: *The Theory of Matrices*. Chelsea Publishing Company, New York, N.Y., (1960).
- Hagedorn P.: *Nichtlineare Schwingungen*. Wiesbaden, (1978).
- Henrichfreise, H.; Witte, C.: Beobachtergestützte nichtlineare Kompensation trockener Reibung in einem Positionierantrieb. *Automatisierungstechnik*, 46(3), (1998), p. 128 – 135.
- Hess, D.P.; Soom, A.: Friction at a Lubricated Line Contact Operating at Oscillating Sliding Velocities, *Journal of Tribology*, 112(1), (1990), p. 147 – 152.
- Jäger, G.: Applications of miniature interferometers to nanomeasuring and nanopositioning devices. *Proceedings TEDA-Conference "Scanning Probe Microscopy, Sensors and Nanostructures"*, 24. – 27.05.2004, Peking, China, (2004), p. 23 – 24.
- Johnson, C.T.; Lorenz, R.D.: Experimental Identification of Friction and Its Compensation in Precise, Position Controlled Mechanisms. *IEEE Trans. of Industry Applications*, 28(1992)6, pp. 1392-1398
- Kauderer, H.: *Nichtlineare Mechanik*. Springer - Verlag, Berlin – New York, (1958).
- Klotzbach, S.; Henrichfreise, H.: Ein nichtlineares Reibmodell für die numerische Simulation reibungsbehafteter mechatronischer Systeme. *16. Symposium Simulationstechnik ASIM 2002*, 10. – 13.09.2002, Rostock, Deutschland, (2002).
- Magnus, K.; Popp, K.: *Schwingungen*. Teubner – Verlag, Stuttgart, (1997).
- Olsson, H.; Aström, K.J.; Canudas de Witt, C.; Gäfvert, M.; Lischinsky, P.: Friction Models and Friction Compensation. *European J. of Control*. 4 (1998), p. 176-195.

Zimmermann, K.; Zeidis, I.; Grabow, J.; Gerlach, E.; Tröbs, A.: Parameteridentifikation und Virtuelles Prototyping von Nanopositionier- und Nanomessmaschinen basierend auf Methoden der Mehrkörperdynamik. *Technische Mechanik*, 25(2), 2005, p. 90 - 99.

Die Arbeit entstand im Rahmen des Teilprojektes B1 des von der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) geförderten Sonderforschungsbereiches SFB 622.

Adresse: Prof. Dr. Klaus Zimmermann, Dr. Igor Zeidis, Dr. Erik Gerlach, Dipl.-Ing. Anita Tröbs, TU Ilmenau, Fakultät für Maschinenbau, PF 100565, D-98684 Ilmenau.
E-Mail: klaus.zimmermann@tu-ilmenau.de