

Zur Analyse hydroakustisch erregter Strukturschwingungen auf FE-BE-Basis

P. Möller, U. Röhr

The prediction of excitation, reflection and radiation behaviour of complex structures immersed in incompressible/compressible, non-viscous fluid represents a theoretical and numerical demanding task due to fluid-structure interaction. The paper presented is addressed to a method based on the mathematical model of a boundary value problem of the Laplace/Helmholtz Equation and the added matrix concept. A combined FE-BE-procedure utilizing a direct boundary integral formulation of the potential fluid problem in interior/exterior domains is employed. The discretization in fluid domain is realized by boundary element collocation method using conventional as well as semi-infinite boundary element formulations. The solution of this partial problem is represented by frequency depended added mass and damping matrix being added to the equations of motion of the structure. Multi-body systems are considered explicitly. The convergence and the influence of frequency and structural impedance in hydro-acoustic range are demonstrated by numerical examples dealing with practical relevant excitation problems.

1 Einleitung

Zuverlässige Prognosen zum Schwingungsniveau sind neben festigkeitsmäßigen Aspekten grundlegend für eine betriebsfeste und optimale Auslegung eines Tragwerks. Nach wie vor erweist sich jedoch die Analyse des Schwingungsverhaltens flüssigkeitsbeaufschlagter Strukturen selbst unter der Annahme einer Reihe von physikalischen Vereinfachungen als äußerst komplex.

Aktuelle Entwicklungen hydroelastischer Rechenmodelle sind u. a. bei Röhr, Möller (1997), Möller, Röhr (1999), und Röhr, Möller (2001) beschrieben. Sie behandeln bevorzugt Fluid-Struktur-Interaktionen für den unteren Frequenzbereich, in welchem die Kompressibilität des Fluids vernachlässigbar und die Beschreibung des Flüssigkeitsverhaltens durch ein Randwertproblem der Laplace-Gleichung zulässig ist.

Schwingungstechnische Untersuchungen an Großausführungen weisen darüber hinaus auf lokale hydroelastische Effekte hin – insbesondere in den Bereichen mit hoch konzentrierter Energieeinleitung durch hydroakustische Erregung, vgl. Van Gent (1991).

Bei den dabei im Mittelpunkt stehenden Anwendungen stellt die Kompressibilität des Fluids einen wesentlichen physikalischen Einfluss dar. Die Beschreibung des Verhaltens der als reibungs- und drehungsfrei sowie kompressibel vorausgesetzten Flüssigkeit geschieht in Form eines Randwertproblems der Helmholtz-Gleichung, s. Möller, Röhr (2003). Im Hinblick auf die angestrebte Erfassung externer Erregung muss dabei jedoch die zusätzliche Anwesenheit vollständig getauchter, separater Körper in das Kalkül einbezogen werden können. Das mathematische Modell hat folglich das Problem der hydroelastischen Mehrkörper-Interaktion explizit zu berücksichtigen. Als methodische Grundlage dient ein gekoppeltes Finite-Elemente/Rand-Elemente-Modell zur Simulation des linearen dynamischen Strukturverhaltens in einer kompressiblen, nicht viskosen Flüssigkeit unbeschränkter Ausdehnung.

Für die Methodenwahl maßgebend ist die Spezifik des Problems, der im Unterschied zu FE-Standardmodellen mit einer BE-Formulierung durch vereinfachte Modellgenerierung (Reduzierung der geometrischen Dimension), angepasstes Preprocessing sowie Einschluss der Sommerfeldschen Abstrahlbedingung mittels semi-infiniten Randelemente im Fernfeld entsprochen werden kann.

Nachfolgend werden die wesentlichen Grundgedanken des Rechenmodells dargelegt. Eine in das Detail gehende Darstellung wird in Möller, Röhr (2003) gegeben.

2 Mathematisches Modell

Beschrieben wird die Methodenentwicklung für den akustischen Frequenzbereich. Der Einfluss der als ideal und kompressibel vorausgesetzten Flüssigkeit soll dabei als Feldproblem durch den zeitabhängigen hydrodynamischen Druck $p(\mathbf{x}, t)$ repräsentiert werden. Ausgangspunkt ist die bekannte Wellengleichung

$$\Delta p(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad ; \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T \quad (1)$$

mit c als Schallgeschwindigkeit im Fluid. Ω sei ein räumliches Flüssigkeitsgebiet. Γ bezeichne den Rand von Ω und $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ die Vereinigung von Gebiet und Rand. Das zu Ω komplementäre Gebiet Ω^c ergänzt $\bar{\Omega}$ zum dreidimensionalen Vollraum: $\Omega^c = \mathbf{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$. Der Rand Γ besteht aus einer freien Oberfläche Γ_f und den benetzten Oberflächen Γ_{k0} eines partiell getauchten sowie $\Gamma_{k1}, \dots, \Gamma_{kN}$ von N voll getauchten Körpern. Demnach ist

$\Gamma = \Gamma_f \cup \Gamma_k$; $\Gamma_k = \bigcup_{i=0}^N \Gamma_{ki}$. An Γ werden die üblichen Glattheitsforderungen gestellt, vgl. Möller, Röhr (2003).

Diese Verquickung von Halb- und Außenraum-Problem soll künftig Halbraum-Problem der Ordnung N heißen, wobei dem eigentlichen Halbraum-Problem die Ordnung $N=0$ zugewiesen wird. Abb. 1 illustriert den beschriebenen Sachverhalt.

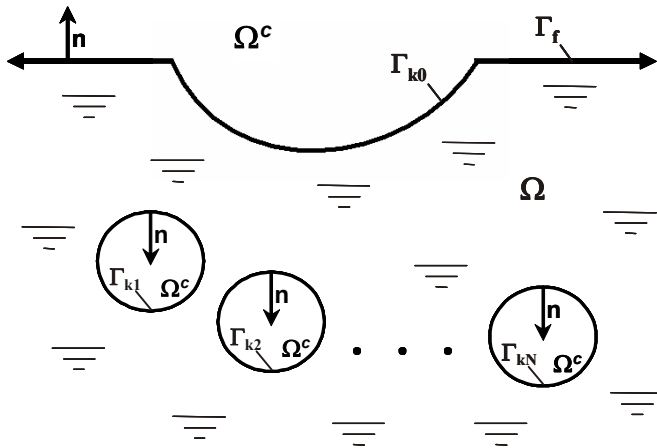


Abb. 1: Hydroakustische Mehrkörper-Interaktion als Halbraum-Problem der Ordnung N

Die freie Oberfläche ist in einem globalen kartesischen Koordinatensystem (x_1, x_2, x_3) in der Ebene $x_3 = 0$ platziert. Je nach Art der Problemstellung und Beschaffenheit des Gebietsrandes Γ sind mit Vorgabe von $p(\mathbf{x}, t)$ bzw. $\frac{\partial p(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{n}}$ Dirichlet- bzw. Neumann-Randbedingungen zu fordern, wobei unter \mathbf{n} stets der an Γ angetragene Außennormalenvektor verstanden werden soll. Für den Fall eines unbeschränkten Flüssigkeitsgebietes ist der hydrodynamische Druck der Sommerfeldschen Abstrahlbedingung zu unterwerfen, um eine Reflexion der Wellen im Unendlichen auszuschließen.

An der freien Oberfläche sind schwingungsinduzierte Oberflächenwellen von marginalem Einfluss, so dass die freie Flüssigkeitsoberfläche ohne Wellenerhebungen hinreichend durch die Randbedingung $p(\mathbf{x}, t) = 0$ beschrieben wird.

Für die benetzten Flächen der Strukturen Γ_{ki} ($i = 0, \dots, N$) werden die Neumann-Bedingungen des Halbraumproblems zunächst formal durch

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = \bar{q} \quad \text{auf } \Gamma_{ki} \quad (2)$$

eingeführt. Im Grenzfall einer starren Wand gilt $\bar{q} = 0$.

Betrachtet wird ausschließlich der zeitharmonische Fall. Alle auftretenden orts- und zeitabhängigen Zustandsgrößen seien deshalb einem Separationsansatz der Form

$$p(\mathbf{x}, t) = P(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} \quad (3)$$

unterworfen mit ω als Kreisfrequenz. Dies betrifft neben dem Druck p auch die Randvorgaben. Somit entsteht das Randwertproblem der Helmholtz-Gleichung für die als stetig vorausgesetzte Feldfunktion P im Frequenzbereich:

$$\Delta P(\mathbf{x}) + k^2 P(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (4)$$

mit reellem $k = \frac{\omega}{c}$ sowie

$$P = 0 \quad \text{auf } \Gamma_f \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}} = \bar{Q} \quad \text{auf } \Gamma_{ki} \quad ; \quad \lim_{R \rightarrow \infty} R \left(\frac{dP}{dR} - ikP \right) = 0 \quad (5)$$

als Randvorgaben. Dabei sei \bar{Q} die strukturseitig initiierte randnormale Ableitung von P . Die Sommerfeldsche Abstrahlbedingung besitzt im Frequenzbereich die in (5) angegebene Gestalt, vgl. Ihlenburg (1998).

Problemstellungen für niedrigere Frequenzen werden durch die Gleichungen (4), (5) als Randwertproblem der Laplace-Gleichung für ein inkompressibles Fluid ($k = 0$) erfasst.

Die angestrebte Überführung in eine zweidimensionale Formulierung zum Zwecke einer Diskretisierung mittels Randelementen unter gleichzeitigem Einschluss der Neumann-Bedingungen auf den benetzten Oberflächen Γ_{ki} bedarf gesonderter Betrachtungen. Den Ausgangspunkt dazu bildet das obige Randwertproblem.

Mit uneingeschränkt zugelassenen Gewichtsfunktionen G und \bar{G} und unter Einbeziehung der Neumann-Bedingungen auf Γ_k sowie unter der Voraussetzung erfüllter Dirichlet- und Sommerfeld-Bedingungen stellt

$$\int_{\Omega} (\Delta P + k^2 P) G \, d\Omega + \int_{\Gamma_k} \left(\frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}} - \bar{Q} \right) \bar{G} \, d\Gamma = 0 \quad (6)$$

die zugehörige schwache Form dar. Ausdrücklich zugelassen sind in Gleichung (6) auch solche Gewichtsfunktionen $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ und $\bar{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, die abhängig von zwei Raumpunkten, definiert durch die Ortsvektoren \mathbf{x} und \mathbf{y} , für den Fall $R = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = 0$ unbeschränkt werden.

Daher und andererseits wegen der Unbeschränktheit des Lösungsgebietes geht der Ausdruck (6) über in eine uneigentliche Integralform. Nach Herausschneiden einer Kugel mit dem Radius ε und der Oberfläche Γ_ε um den Raumpunkt \mathbf{x} aus dem Integrationsgebiet entsprechend Abb. 2a wird Gleichung (6) einer partiellen Integration zugänglich.

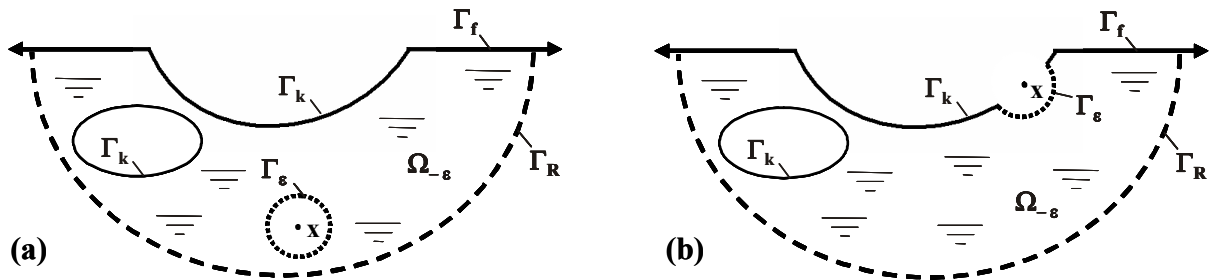


Abb. 2: Das Gebiet Ω_ε für \mathbf{x} als gebietsinternen Beobachtungspunkt (a) bzw. als Randpunkt (b)

Ferner beschränke die Halbkugelsphäre Γ_R mit großem, jedoch endlichem Radius R_A das Lösungsgebiet hilfsweise auf das in Abb. 2a dargestellte Ω_ε , dessen Rand durch

$$\Gamma_A = \Gamma_f \cup \Gamma_R \cup \Gamma_k \cup \Gamma_\varepsilon \quad (7)$$

beschrieben wird. Die sich an die Integration anschließenden Grenzprozesse $\varepsilon \rightarrow 0$ sowie $R_A \rightarrow \infty$ überführen das reduzierte Flüssigkeitsgebiet $\Omega_{-\varepsilon}$ wieder in das originale.

Partielle Integration über das derart reduzierte Integrationsgebiet liefert zunächst

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_{-\varepsilon}} (\Delta G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + k^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{y})) P(\mathbf{y}) d\Omega + \int_{\Gamma_A} \frac{\partial P(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Gamma - \int_{\Gamma_A} P(\mathbf{y}) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_k} \frac{\partial P(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}} \bar{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Gamma - \int_{\Gamma_k} \bar{Q}(\mathbf{y}) \bar{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

mit \mathbf{y} als Integrationsvariablen. Die erlangte Integralform kann durch eine geeignete Wahl der Gewichtsfunktionen gezielt vereinfacht werden. Dazu bietet es sich an, auf der Gesamtheit der benetzten Oberflächen Γ_k für $\bar{G} = -G$ zu wählen, so dass die zugeordneten Beiträge im zweiten und vierten Term von Gleichung (8) sich egalalisieren. Daneben ist das dritte Integral über Γ_f identisch null bei Einhaltung der homogenen Dirichlet-Bedingungen.

Mit der Konkretisierung der Gewichtsfunktion als Fundamentallösung des Helmholtz-Differenzialoperators in der Gestalt

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi R} \frac{e^{ikR}}{R} \quad \text{mit} \quad R = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \quad (9)$$

was insbesondere

$$\Delta G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + k^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega_{-\varepsilon} \quad (10)$$

bedeutet, wird auch das Feldintegral aus Gleichung (8) identisch null. Die Sommerfeld-Bedingung ist für die Funktion (9) wegen

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \left(\frac{dG(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{dR} - ikG(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right) = 0 \quad (11)$$

streng erfüllt. Es sei angemerkt, dass auch die konjugiert komplexe Funktion von (9) eine Lösung der Helmholtz-Gleichung (4) darstellt.

Die Ausweitung der Gültigkeit von Gleichung (8) auf das Ursprungsgebiet Ω gelingt durch die erwähnten Grenzwertbetrachtungen, vgl. Wolf (2005). Aus dem Mittelwertsatz in Verbindung mit der Sommerfeld-Bedingung (11) folgt ein Verschwinden der Summe des zweiten und dritten Integrals über die Halbkugeloberfläche Γ_R für $R_A \rightarrow \infty$. Ebenso kann mit überschaubaren Abschätzungen gezeigt werden, dass das zweite Integral auf Γ_ε im Grenzfall zu null wird. Für das dritte wiederum steht ausführlich

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} P(\mathbf{y}) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma = \int_{\Gamma_\varepsilon} P(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{e^{ikR}}{4\pi R} \right) \Big|_{R=\varepsilon} d\Gamma = \int_{\Gamma_\varepsilon} P(\mathbf{y}) \frac{e^{ik\varepsilon}}{4\pi\varepsilon^2} (1 - ik\varepsilon) d\Gamma \quad (12)$$

wobei zu beachten ist, dass der Radiusvektor und der Randnormalenvektor \mathbf{n} auf Γ_ε entgegengesetzt orientiert sind. Da ε bezüglich der Integration invariant ist, gilt

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} P(\mathbf{y}) \frac{e^{ik\varepsilon}}{4\pi\varepsilon^2} (1 - ik\varepsilon) d\Gamma = \frac{e^{ik\varepsilon}}{4\pi\varepsilon^2} (1 - ik\varepsilon) \int_{\Gamma_\varepsilon} P(\mathbf{y}) d\Gamma \quad (13)$$

und der Mittelwertsatz sichert, dass im Integrationsgebiet Γ_ε ein Raumpunkt \mathbf{y}^* existiert mit der Eigenschaft

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} P(\mathbf{y}) d\Gamma = P(\mathbf{y}^*) |\Gamma_\varepsilon| = P(\mathbf{y}^*) 4\pi\varepsilon^2. \quad (14)$$

Die Grenzwertbildung $\varepsilon \rightarrow 0$ führt unter Beachtung der Stetigkeit von P auf

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{y}^* = \mathbf{x} \quad \text{und} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P(\mathbf{y}^*) = P(\mathbf{x}). \quad (15)$$

Die Beziehungen (13), (14) und (15) liefern

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} P(\mathbf{y}) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{e^{ik\varepsilon}}{4\pi\varepsilon^2} (1 - ik\varepsilon) P(\mathbf{y}^*) 4\pi\varepsilon^2 \right] = P(\mathbf{x}). \quad (16)$$

Zusammengefasst, insbesondere unter Beachtung von (16), folgt schließlich für die Integralform (8):

$$P(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma_f} \frac{\partial P(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Gamma - \int_{\Gamma_k} P(\mathbf{y}) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma + \int_{\Gamma_k} \bar{Q}(\mathbf{y}) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Gamma \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \quad (17)$$

Mit Gleichung (17) ist über (8) eine schwache Form für das Randwertproblem (4), (5) gefunden, welche die Neumann-Bedingung auf den benetzten Oberflächen Γ_{ki} als natürliche Randbedingung a priori einschließt.

In Gleichung (17) treten nur Oberflächenintegrale auf. Der Quellpunkt \mathbf{y} ist also ein Oberflächenpunkt und seine Koordinaten sind zugleich Integrationsvariablen. Folglich lässt sich damit der Druck P in jedem Punkt \mathbf{x} im Inneren des Gebietes Ω direkt berechnen, sofern die Randdaten bekannt sind. Mithin beinhaltet Gleichung (17) wegen \mathbf{x} als räumlichem Beobachtungspunkt aus Ω unverändert eine dreidimensionale Darstellung des Feldproblems, da sie für alle Punkte des Flüssigkeitsgebietes zu erfüllen ist.

Für einen auf Γ gelegenen Beobachtungspunkt \mathbf{x} (Abb. 2b) führt das Ausschnittsprinzip zu einem Integrationsgebiet Γ_ε in Gleichung (8), das nicht die gesamte Kugeloberfläche $4\pi\varepsilon^2$, sondern nur noch den Anteil $\alpha(\mathbf{x})\varepsilon^2$ umfasst. Die geometrieabhängige Größe

$$\alpha(\mathbf{x}) = - \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\Gamma \quad (18)$$

bedeutet denjenigen Raumwinkel, unter welchem man von \mathbf{x} aus die gesamte Fläche Γ_ε erfasst und die daher zwischen dem Wert 0 bis 4π variiert. Unter den so veränderten Integrationsgrenzen folgt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} P(\mathbf{y}) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma = \frac{\alpha(\mathbf{x})}{4\pi} P(\mathbf{x}) \quad (19)$$

anstelle der Beziehung (16). Die Randintegralgleichung (17) für das Halbraum-Problem geht somit über in die generalisierte Form

$$\alpha(\mathbf{x})P(\mathbf{x}) = 4\pi \left[\int_{\Gamma_f} \frac{\partial P(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Gamma - \int_{\Gamma_k} P(\mathbf{y}) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma + \int_{\Gamma_k} \bar{Q}(\mathbf{y}) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Gamma \right] \quad (20)$$

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega \cup \Gamma_k \cup \Gamma_f.$$

Unter Einhaltung der Dirichlet- und der Sommerfeld-Bedingung auf Γ_f ist das Problem (20) eindeutig lösbar und äquivalent zur Helmholtz-Gleichung (4) nebst Randbedingungen (5).

3 Numerisches Modell

Vorgenommen wird die Diskretisierung des Problems nach der Randelemente-Methode. Die dabei auftretenden Schwierigkeiten sind wohlbekannt, vgl. Vladimirov (1972), Amini et al. (1992), da es sich bei dem analytischen Problem (20) um ein dreidimensionales handelt. Zum Zwecke einer Randformulierung wäre die formale Einschränkung der Integralgleichung (20) auf den Gebietsrand Γ wünschenswert. Sie wird in der Literatur als Surface Helmholtz Equation – SHE – bezeichnet. Durch den Verzicht auf sämtliche Gleichungen für gebietsinterne Punkte \mathbf{x} tritt jedoch im Allgemeinen ein solcher Informationsverlust ein, dass die Äquivalenz zum Originalproblem und damit die eindeutige Lösbarkeit verloren geht. Zahlreiche Lösungsansätze sind versucht worden, um die genannten Schwierigkeiten zu überwinden, Amini et al. (1992) bietet hierzu einen Überblick. Stellvertretend sei an dieser Stelle eine Methode erwähnt, welche CHIEF (Combined Helmholtz Integral Equation Formulation) genannt wird: Zusätzlich zur diskretisierten SHE wird die Randintegralgleichung

in ergänzenden Kollokationspunkten im Gebietsinneren gefordert. Es entsteht ein überbestimmtes Gleichungssystem, welches mittels Methode der kleinsten Fehlerquadrate behandelt wird. Dieses Beispiel illustriert gut den wesentlichen Unterschied zwischen der SHE-Formulierung und der Problemstellung (20), nämlich das Fehlen der Gleichungen in inneren Punkten von Ω , welchem bei der CHIEF-Methode entgegengearbeitet wird. Dabei bereitet jedoch die Wahl von Anzahl und Lage dieser internen Zusatzpunkte Schwierigkeiten. Nachfolgend wird deshalb ein alternatives Verfahren zur Herleitung einer Randformulierung vorgestellt.

3.1 BE-Modell

Den Ausgangspunkt bildet ein Gedankenmodell, mit dem das eindeutig lösbare Problem (20) zunächst in eine dreidimensionale Finite-Elemente-Diskretisierung in Verbindung mit dem Kollokationsverfahren überführt wird. Es sei betont, dass diese Überlegungen keine direkte methodische Umsetzung erfahren werden. Vielmehr ist das dreidimensionale Modell (auch als „FE-Basismodell“ bezeichnet) als theoretischer Zwischenschritt für den Übergang zu einer zweidimensionalen Rand-Elemente-Formulierung aufzufassen.

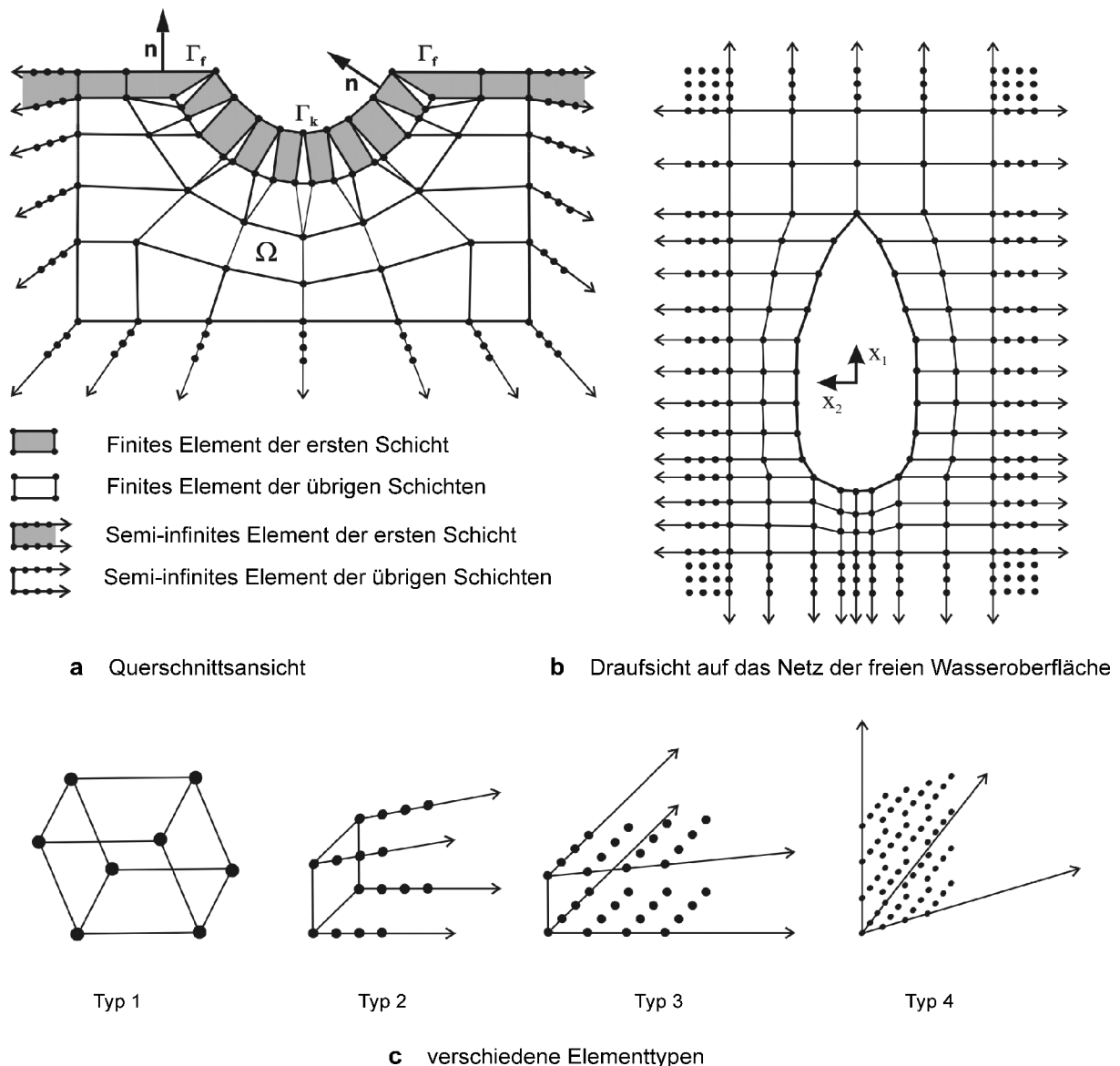


Abb. 3: Vernetzung des Flüssigkeitsgebietes im FE-Basismodell (Halbraum-Problematik)

Angenommen sei dazu im Nahfeld des Gebietes Ω eine orthodoxe Vernetzung mit üblichen isoparametrischen trilinearen Hexaederelementen, also mit einer bilinearen Charakteristik auf deren Oberflächen. Abb. 3 zeigt

schematisch das Beispiel eines Halbraum-Problems der Ordnung $N=0$. Die Vernetzung von Γ_{k0} ist in der Draufsicht der Übersichtlichkeit halber ausgeblendet.

Im Gegensatz zu den gebräuchlichen Vernetzungsstrategien dieser Problematik wird das Nahfeld nicht durch die Oberfläche einer Halbkugel begrenzt, sondern durch die eines Quaders. Hieraus erwächst für Aufgaben mit Strukturen schlanker Kontur eine essenzielle Einsparung von Freiheitsgraden. Das angrenzende Fernfeld sei mittels semi-infiniten Elemente diskretisiert. Hierbei handelt es sich um Elemente mit unbeschränkter Geometrie und Ansätzen, welche die Abstrahlbedingung aus (5) a priori erfüllen. Letztere weist radialen Charakter auf, was sich qualitativ in den Ansatzfunktionen niederschlagen soll, nicht aber in der Geometrie des Nahfeldes.

Die Form der Vernetzung soll in Bezug auf die Koordinatenrichtungen x_1 und x_2 im Fernfeld orthogonal bleiben, in x_3 -Richtung dagegen sind die Elementkanten dem radialen Charakter der Sommerfeld-Bedingung anzupassen, damit ein korrektes Abkling- und Schwingungsverhalten nachgebildet werden kann. Den Elementen des Fernfeldes werden in Form von p-Ansätzen entsprechend der Ansatzordnung parametrische Freiheitsgrade zugewiesen. Die Existenz der Gesamtheit derartiger Ansätze einschließlich der erforderlichen Kompatibilitätseigenschaften kann ohne Einschränkungen vorausgesetzt werden, vgl. Möller, Röhr (2003).

Mit den vorstehend beschriebenen Elementformen sei eine Diskretisierung des Problems (20) vorgenommen. Eingesetzt wird dabei das Kollokationsverfahren. Es konvergiert für fortgesetzte Netzverfeinerung im Nahfeld (h-Konvergenz) und im Fernfeld durch entsprechende Netzverfeinerung auf der Nahfeld-Grenze sowie Steigerung der Ordnung der höhergradigen Ansätze (h-p-Konvergenz). Voraussetzung hierfür ist allerdings eine mathematisch begründete Wahl der Kollokationspunkte. Zum einen muss ihr System mit fortschreitender Netzfeinheit den diskretisierten Bereich beliebig dicht überdecken können, zum anderen besteht die Forderung nach eindeutiger Lösbarkeit des jeweils entstehenden linearen Gleichungssystems, Möller, Röhr (2003). Aus diesem Grund bieten sich im Nahfeld die Knoten der finiten Elemente als Kollokationspunkte an. Im Fernfeld richtet sich die Anzahl der Kollokationspunkte nach der der parametrischen Freiheitsgrade – eine mögliche Anordnung ist in Abb. 3 dargestellt. Allerdings müssen hiervon noch die auf Γ_f liegenden Punkte ausgenommen werden, da sie lediglich der Erfüllung der homogenen Dirichlet-Bedingung dienen.

Bezeichnen P^m und Q^m die Diskretisierungsansätze des m-ten Elementes der ersten Schicht, so geht Gleichung (20) über in

$$\frac{\alpha(\mathbf{x}_j)}{4\pi} P(\mathbf{x}_j) - \sum_{m \in M_f} \int_{\Gamma_f^m} Q^m(\mathbf{y}) G(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}) d\Gamma + \sum_{m \in M_k} \int_{\Gamma_k^m} P^m(\mathbf{y}) \frac{\partial G(\mathbf{x}_j, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma = \sum_{m \in M_k} \int_{\Gamma_k^m} \bar{Q}^m(\mathbf{y}) G(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}) d\Gamma \quad (21)$$

für $j = 1, \dots, K$ Kollokationspunkte. Es gilt dabei jedoch zu beachten, dass für Q^m hier noch die Abhängigkeit von den P-Ansätzen gemäß $Q^m = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(P^m)$ besteht. M_f bzw. M_k seien die Indexmengen der an Γ_f bzw. Γ_k

angrenzenden Volumenelemente. Der Ausdruck (21) ist verallgemeinert als eine schwache Residuenform unter Einbeziehung der Neumann-Bedingungen aufzufassen. Auf die Gesamtheit der Kollokationspunkte im Gebiet Ω und auf dem Rand Γ angewendet, führt er verfahrenstypisch zu einem linearen Gleichungssystem.

Alle „randnächsten“ Kollokationspunkte – d. h. die direkt auf Γ_k befindlichen sowie diejenigen, die zu Elementen gehören, welche an Γ_f angrenzen – werden nunmehr unter dem Typ 1 zusammengefasst. Alle übrigen seien vom Typ 2, vgl. Abb. 4.

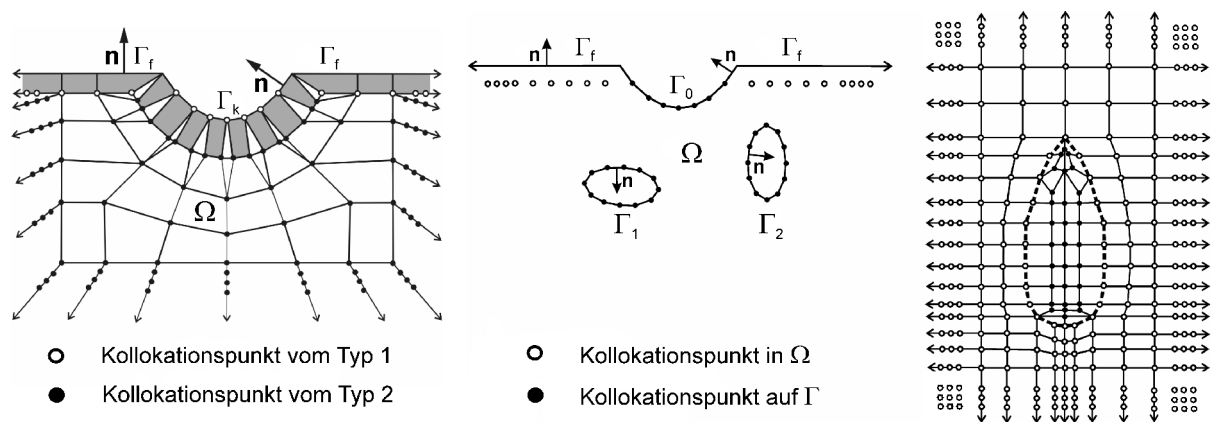


Abb. 4: Kollokationspunkt-System für das Halbraumproblem (links) und Randelemente-Vernetzung eines Halbraum-Problems der Ordnung 2 (rechts)

Die Struktur des Gleichungssystems folgt aus der frei wählbaren Reihenfolge der Kollokationspunkte. Wird diese entsprechend obiger Typeneinteilung vorgenommen, so repräsentiert die j-te Zeile, gebildet gemäß Gleichung (21), den j-ten Kollokationspunkt \mathbf{x}_j . Wird ferner angenommen, dass zunächst lückenlos alle Kollokationspunkte vom Typ 1 stehen, ergibt sich formal die nachstehende Gleichungsstruktur

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \end{bmatrix} \quad (22)$$

mit Blockindizes entsprechend den Typ-Nummern. Im ersten Zeilenblock handelt es sich um Randintegrale sowie um Funktionswerte $\alpha(\mathbf{x}_j)P(\mathbf{x}_j)$, die ausschließlich Freiheitsgraden vom Typ 1 zugeordnet sind, so dass für den zweiten Block der ersten Matrixzeile zwangsläufig

$$\mathbf{A}_{12} = \mathbf{0} \quad (23)$$

gilt. Damit wird das partielle Gleichungssystem

$$\mathbf{A}_{11} \mathbf{P}_1 = \mathbf{R}_1 \quad (24)$$

separat und eindeutig auflösbar. Die restlichen Gleichungen dienen lediglich der Bestimmung der Feldgrößen in den Kollokationspunkten vom Typ 2. Demnach reduziert sich der Gültigkeitsbereich des diskretisierten Problems (21) für das FE-Basismodell vom Volumen $\bar{\Omega}$ auf eine Fläche, nämlich diejenige, auf welcher sich die zur Lösung des Teilproblems (24) zugeordneten Kollokationspunkte vom Typ 1 befinden. Selbige sind zum Teil auch im Inneren des Flüssigkeitsgebietes angeordnet. Im Gegensatz zu dem erwähnten CHIEF-Verfahren stellt sich auf diesem Wege jedoch kein überbestimmtes, sondern ein eindeutig lösbares Gleichungssystem ein.

Mit diesen Überlegungen gelingt der Übergang von dem hilfswise eingeführten dreidimensionalen FE-Basismodell zu einem äquivalenten 2D-Rand-Elemente-Modell. Die Terme in (24) besitzen dreidimensionalen Charakter, da ihre elementweise Berechnung mittels P^m bzw. $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(P^m)$ auf Γ aus den P-Ansätzen der

Volumenelemente der ersten Schicht erfolgt. Betrachtet man jedoch die Qualität dieser Verläufe, eingeschränkt auf die jeweilige Elementfläche, welche auf Γ liegt, so kann gezeigt werden, dass es sich in beiden Fällen stets um beliebige bilineare Funktionen handelt, vgl. Möller, Röhr (2003). Daraus ergibt sich die Berechtigung, das gesamte Problem mit einer äquivalenten zweidimensionalen Rand-Elemente-Formulierung darzustellen. So darf, wie üblicherweise praktiziert, mit einer ausschließlich und direkt auf Γ ausgeführten zweidimensionalen Vernetzung mit bilinearen Ansatzfunktionen für P^m auf Γ_k sowie davon unabhängig für Q^m (mit separaten Freiheitsgraden) im Nahfeldbereich von Γ_f der Ausdruck (21) diskretisiert werden. Der Charakter der Fernfeldansätze für Q^m ergibt sich analog aus dem des FE-Basismodells. Das Kollokationspunktsystem ist hiervon unberührt, es liegt nach wie vor auf einer Fläche – zum einen Γ_k , zum anderen einer zu Γ_f parallelen Ebene $x_3 = -H$.

Die ursprünglichen dreidimensionalen Ansätze des FE-Basismodells reduzieren sich auf eine zweidimensionale Form. So sind die Randelemente des Nahfeldes als bilineare zugelassen und für das Fernfeld dienen infinite Streifen- und Viertelebenen-Randelemente. Im Einzelnen lauten diese:

- isoparametrisches, gegebenenfalls degeneriertes Vierknotenelement auf Γ_k :

$$P^m(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 (1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta) P_i^m \quad ; \quad \xi, \eta \in [-1, +1] \quad ; \quad \xi_i, \eta_i = \pm 1 \quad (25)$$

- isoparametrisches Vierknotenelement auf Γ_f :

$$Q^m(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 (1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta) Q_i^m \quad (26)$$

- orthogonaler semi-infiniten Streifen auf Γ_f :

$$\begin{aligned}
Q^m(\xi, \eta) &= \left[Q_1 \cdot \frac{e^{ikR_{S_1}}}{R_{S_1}^h} \cdot c_{h|S_1} + \sum_{v=2}^{h-1} A_{v|S_1} \cdot e^{ikR_{S_1}} \cdot \left(\frac{c_{v|S_1}}{R_{S_1}^v} - \frac{c_{h|S_1}}{R_{S_1}^h} \right) \right] \frac{b-\eta}{2b} + \\
&\quad \left[Q_2 \cdot \frac{e^{ikR_{S_2}}}{R_{S_2}^h} \cdot c_{h|S_2} + \sum_{v=2}^{h-1} A_{v|S_2} \cdot e^{ikR_{S_2}} \cdot \left(\frac{c_{v|S_2}}{R_{S_2}^v} - \frac{c_{h|S_2}}{R_{S_2}^h} \right) \right] \frac{b+\eta}{2b} \\
&\quad \xi \in [0, \infty) \ ; \ \eta \in [-b, +b] \\
R_{S_1/S_2}(\xi) &= \sqrt{(\eta_0 \mp b)^2 + (\xi_0 + \xi)^2} \ ; \ c_{v|S_1/v|S_2} = \frac{R_{S_1/S_2}^v(0)}{e^{ikR_{S_1/S_2}(0)}}
\end{aligned} \tag{27}$$

► infinite Viertelebene auf Γ_f :

$$\begin{aligned}
Q^m(\tilde{r}, \tilde{\varphi}) &= Q_0 \cdot \frac{e^{ikR(\tilde{r}, \tilde{\varphi})}}{R^h(\tilde{r}, \tilde{\varphi})} \cdot c_h + \sum_{v=2}^{h-1} \sum_{\mu=0}^{h-1} A_{v\mu} \cdot e^{ikR(\tilde{r}, \tilde{\varphi})} \cdot \tilde{\varphi}^\mu \cdot \left(\frac{c_v}{R^v(\tilde{r}, \tilde{\varphi})} - \frac{c_h}{R^h(\tilde{r}, \tilde{\varphi})} \right) \\
\tilde{r} &\in [0, \infty) \ ; \ \tilde{\varphi} \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right] \ ; \ \tilde{x} = \tilde{r} \cdot \cos \tilde{\varphi} \ ; \ \tilde{y} = \tilde{r} \cdot \sin \tilde{\varphi} \\
c_v &= \frac{R_0^v}{e^{ikR_0}} \ ; \ R = \sqrt{(\tilde{x}_0 + \tilde{x})^2 + (\tilde{y}_0 + \tilde{y})^2} \ ; \ R_0 = \sqrt{\tilde{x}_0^2 + \tilde{y}_0^2}
\end{aligned} \tag{28}$$

Hierbei bezeichnen h die maximale Ordnung der Ansätze sowie b die halbe Elementbreite im Falle des semi-infiniten Streifens. Q_1, Q_2 in (27) bzw. Q_0 in (28) sind die Freiheitsgrade der jeweiligen Anschlussknoten an das Nahfeld, $A_{v|S_1}, A_{v|S_2}$ bzw. $A_{v\mu}$ hingegen parametrische Freiheitsgrade. Schließlich kennzeichnet R stets den Abstand vom Ursprung des globalen Koordinatensystems und $\xi_0, \eta_0, \tilde{x}_0, \tilde{y}_0$ dienen der Beschreibung der Lage der jeweiligen lokalen Elementsysteme.

Die konkrete Gestalt der rechten Seite des Gleichungssystems (24) folgt aus der Neumann-Bedingung, die sich im Frequenzbereich mit den oberflächennormalen Verschiebungen auf den benetzten Flächen durch

$$\frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}} = \bar{Q} = \rho \omega^2 U_n \quad \text{auf } \Gamma_k \tag{29}$$

ausdrücken lässt und die Wechselwirkung mit der Struktur repräsentiert. Diskretisiert geht sie in den Term

$$\sum_{m \in M_k} \int_{\Gamma_k^m} \bar{Q}^m(\mathbf{y}) G(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}) d\Gamma \tag{30}$$

des Ausdrucks (21) ein. Unter der Voraussetzung einer kompatiblen Elementierung von Struktur und Fluid im Bereich der benetzten Flächen sowie mit \mathbf{D} als globalem Struktur-Verschiebungsvektor lässt sie sich stets in die einfache lineare Form

$$\bar{Q}^m(\mathbf{y}) = \rho \omega^2 \mathbf{R}^m(\mathbf{y}) \mathbf{D} \tag{31}$$

überführen. Bedeutet im System (24) $\mathbf{P}_1^T = [\mathbf{P}_k \ \mathbf{Q}_f]^T$ – mit \mathbf{P}_k als Knotenvektor aller Druckfreiheitsgrade der Ansätze (25) sowie \mathbf{Q}_f als Vektor der Freiheitsgrade aus (26), (27), (28) – so nimmt mit Gleichung (31) das entsprechende Teilsystem aus (21) für die $K_1 < K$ Kollokationspunkte vom Typ 1 die Form

$$[\mathbf{A}_k \quad \mathbf{A}_f] \begin{bmatrix} \mathbf{P}_k \\ \mathbf{Q}_f \end{bmatrix} = \mathbf{R}_1 = \rho\omega^2 \begin{bmatrix} \sum_{m \in M_k} \int_{\Gamma_k^m} \mathbf{R}^m(\mathbf{y}) \frac{e^{ik|\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}|}}{4\pi|\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}|} d\Gamma \\ \vdots \\ \sum_{m \in M_k} \int_{\Gamma_k^m} \mathbf{R}^m(\mathbf{y}) \frac{e^{ik|\mathbf{x}_{K1} - \mathbf{y}|}}{4\pi|\mathbf{x}_{K1} - \mathbf{y}|} d\Gamma \end{bmatrix} \mathbf{D} = \rho\omega^2 \mathbf{C} \mathbf{D} \quad (32)$$

an. Hierbei interessieren lediglich die Parameter \mathbf{P}_k , sind doch ausschließlich sie für die Druckverteilung P auf Γ_k maßgebend. Zu ihrer eindeutigen Bestimmung dient der Zusammenhang

$$\mathbf{P}_k = \rho\omega^2 \mathbf{Z} \mathbf{D} \quad (33)$$

wobei \mathbf{Z} den entsprechenden ersten Zeilenblock von $[\mathbf{A}_k \quad \mathbf{A}_f]^{-1} \mathbf{C}$ repräsentiert.

3.2 Fluid-Struktur-Kopplung

Die diskrete Lösung (33) für die Druckverteilung des als separate BE-Darstellung vorliegenden Halbraum-Problems steht in linearer Abhängigkeit vom unbekanntem Knotenverschiebungsvektor \mathbf{D} der Struktur. Dieser ergibt sich naturgemäß erst im Zuge der Lösung des gekoppelten Fluid-Struktur-Interaktionsproblems. Ausgangspunkt dafür sind die Ortsdiskretisierten Bewegungsgleichungen im Frequenzbereich

$$-\omega^2 \mathbf{M} \mathbf{D} - i\omega \mathbf{B} \mathbf{D} + \mathbf{K} \mathbf{D} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_H \quad (34)$$

mit \mathbf{M} , \mathbf{B} und \mathbf{K} als Strukturmassen-, Strukturdämpfungs- bzw. Struktursteifigkeitsmatrix. \mathbf{F} bezeichnet den externen Systemknotenkraftvektor. Die Erfassung der elastokinetischen und der fluiddynamischen Wechselwirkung gelingt auf einfachem Wege durch Einfügen eines die Flüssigkeit repräsentierenden arbeitsäquivalenten Kraftvektors \mathbf{F}_H .

Mit P als den Druckverteilungen auf den benetzten Flächen, die mit Gleichung (33) in diskreter Form in den Knoten vorliegen, und \mathbf{u} als den Strukturverschiebungen ist nach dem Prinzip der Arbeitsäquivalenz

$$\delta W_H = \delta \mathbf{D}^T \mathbf{F}_H = \int_{\Gamma_k} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{n} P d\Gamma \quad (35)$$

zu fordern. Aus der Diskretisierung dieses integralen Ausdrucks mit den Ansätzen (25) und unter Verwendung üblicher Interpolationen für die Verschiebungen \mathbf{u} folgt

$$\delta \mathbf{D}^T (\mathbf{F}_H - \omega^2 \mathbf{Q} \mathbf{Z} \mathbf{D}) = 0 \quad \text{mit} \quad \mathbf{Q} = \rho \int_{\Gamma_k} \mathbf{H}_D^{mT} \mathbf{n} \mathbf{H}_P^m d\Gamma \quad (36)$$

womit

$$\mathbf{F}_H = \omega^2 \mathbf{Q} \mathbf{Z} \mathbf{D} \quad (37)$$

wird. Eingeführt in die Beziehung (34) lauten die um die fluiddynamischen Wirkungen erweiterten Bewegungsgleichungen

$$-\omega^2 (\mathbf{M} + \mathbf{M}_H) \mathbf{D} - i\omega (\mathbf{B} + \omega \mathbf{B}_H) \mathbf{D} + \mathbf{K} \mathbf{D} = \mathbf{F} \quad (38)$$

wobei die Matrix $\mathbf{Q} \mathbf{Z}$ formal in Real- und Imaginärteil gemäß

$$\mathbf{M}_H = \text{Re}(\mathbf{Q} \mathbf{Z}) \quad ; \quad \mathbf{B}_H = \text{Im}(\mathbf{Q} \mathbf{Z}) \quad (39)$$

aufgespalten ist. Wegen ihrer Stellung innerhalb der Gleichung (38) sind \mathbf{M}_H und $\omega \mathbf{B}_H$ als fluiddynamische Zusatzmassen- bzw. Zusatzdämpfungsmatrix aufzufassen.

4 Validation und Anwendungen

Die nachfolgend vorgestellten Ergebnisse sollen einerseits die Konvergenz des Algorithmus demonstrieren und andererseits die Anwendbarkeit der vorgestellten Methodik auf Fallbeispiele aus der Berechnungspraxis nachweisen.

Die Behandlung des Strukturmodells kann mittels geeigneter kommerzieller FEM-Software erfolgen, welche nach Berechnung der Strukturmatrizen deren Summation mit den Zusatzmatrizen realisiert und anschließend das gekoppelte Problem löst. Entsprechende Schnittstellen sind für das System ANSYS erstellt worden. Das Preprocessing dagegen erfolgt im BE-Programm, eine mögliche Nahfeldvernetzung zeigt Abb. 4 rechts.

4.1 Innenraumprobleme – Tankschwingungen

Ein aus praktischer Sicht relevantes Anwendungsfeld stellt das Schwingungsverhalten verbundener Tanksysteme dar. Mathematisch sind sie als Innenraumprobleme zu behandeln. Vorgestellt werden Ergebnisse für den Fall eines inkompressiblen Fluids bei Anwesenheit eines Dirichletschen Randanteils.

Der dabei häufig vorkommenden Unterteilung der Tanks durch Zwischenwände in mehrere kommunizierende Flüssigkeitsgebiete und den damit verbundenen Problemen beidseitig benetzter Flächen innerhalb des BE-Modells kann durch das Einfügen so genannter virtueller Elemente einfach Rechnung getragen werden. Abb. 5 demonstriert diesen im Folgenden näher erläuterten Sachverhalt; die virtuellen Elemente sind gestrichelt angedeutet.

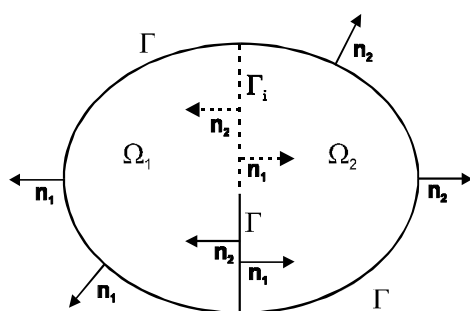


Abb. 5: Zerlegung eines Fluidgebietes in einer unterteilten Tankstruktur

Wie in Möller, Röhr (1999) gezeigt, sind für eine im gesamten Fluidgebiet Ω definierte Funktion P die Aussagen (40) und (41) äquivalent, wenn Ω in die beiden Teilgebiete Ω_1, Ω_2 zerfällt und mit Γ_i die aus virtuellen Elementen bestehende Trennfläche bezeichnet wird:

$$\Delta P = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (40)$$

$$\Delta P_j = 0 \quad \text{in } \Omega_j \quad \text{für } j \in \{1;2\} \quad \text{und auf } \Gamma_i \text{ gilt: } P_1 = P_2 \quad ; \quad \frac{\partial P_1}{\partial \mathbf{n}_1} = -\frac{\partial P_2}{\partial \mathbf{n}_2} \quad (41)$$

P_j sei jeweils die Einschränkung von P auf das Teilgebiet Ω_j , vgl. Abb. 5. Diese Aussage ermöglicht die problemlose numerische Behandlung geometrisch beliebig unterteilter Flüssigkeitsgebiete durch die oben beschriebene Zerlegung unter Beachtung der Nebenbedingungen (41).

Abb. 6 zeigt eine Konvergenzstudie für diese Methode. Für einen gefüllten Tank mit Querschott variabler Höhe wurde durch Vorgabe spezieller Randbedingungen jeweils eine einfache polynomiale Lösung für die Druckverteilung erzwungen und anhand des Vergleichs von numerischer und analytischer Lösung der Einfluss der Netzfeinheit ermittelt.

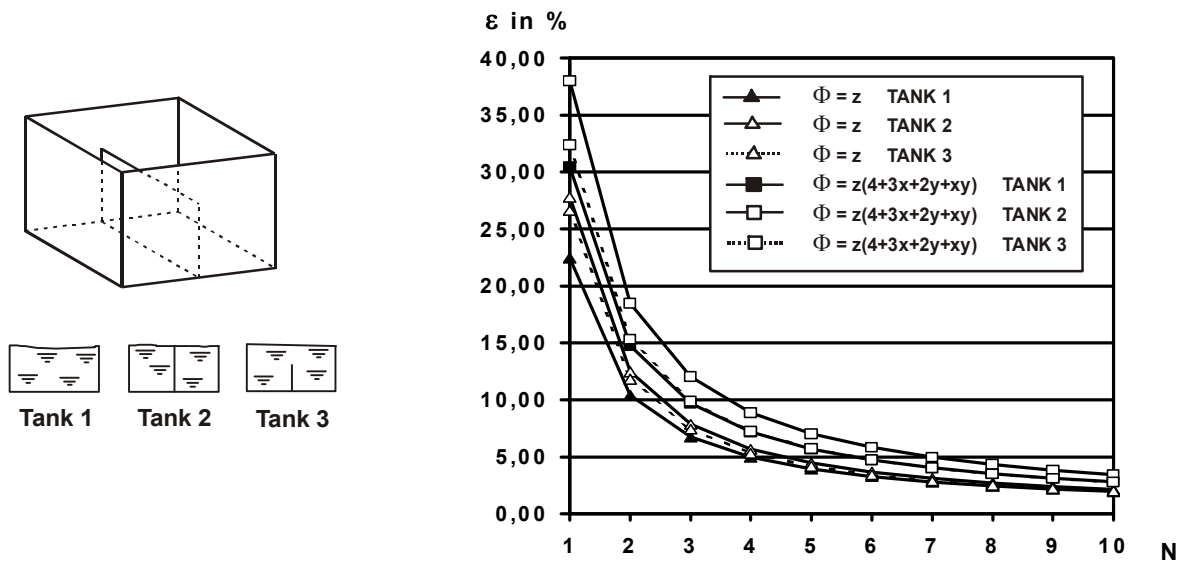


Abb. 6: Konvergenzstudie Innenraumproblem

Für ein typisches Fallbeispiel aus der Berechnungspraxis zeigt Abb. 7 das Modell und ausgewählte Schwingformen eines gefüllten Tanks. Die Struktur besitzt einen Deckel, welcher der Übersichtlichkeit halber in der Abbildung ausgeblendet wurde. Der Füllstand erreicht dessen z-Koordinate nicht ganz, um die Existenz einer freien Oberfläche zu gewährleisten.

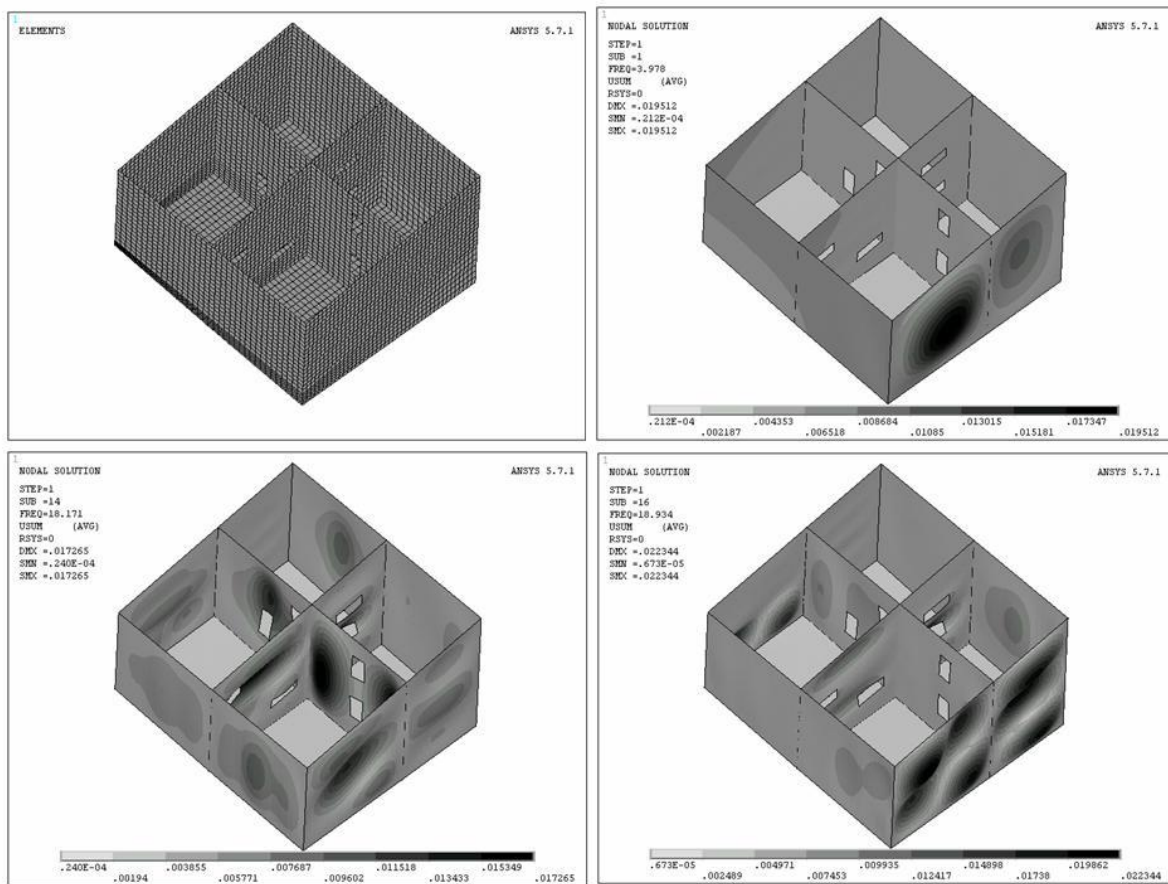


Abb. 7: Modell und ausgewählte Schwingformen einer realen Tankstruktur

4.2 Außenraumproblem mit hydroakustischer Erregung

Vorangestellt sei eine Konvergenzstudie für den Fall eines kompressiblen Fluids. Aufgrund der Kenntnis der analytischen Lösung wird das Problem der tief getauchten, pulsierenden Kugel betrachtet. Werden der Mittelpunkt in $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$ und der Radius mit R_K angenommen, so besitzt diese die radialsymmetrische Form

$$P(R) = C \frac{e^{ikR}}{R} ; \quad R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \quad (42)$$

welche als Vielfaches der Fundamentallösung trivialerweise sowohl die Helmholtz-Gleichung als auch die Sommerfeldbedingung in Ω erfüllt. Die Konstante C bestimmt sich dabei aus der auf der Kugelsphäre Γ_k als konstant vorzugebenden oberflächennormalen Randableitung

$$\frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}} = \bar{Q} = \text{const} \quad \text{auf } \Gamma_k \quad (43)$$

für den Druck. Ziel der Rechnung ist die Bewertung des Fehlers des Fluid-Teilproblems. Bezeichnen $\tilde{\mathbf{P}}$ den Vektor der numerisch ermittelten Druckwerte aller auf der Kontaktfläche befindlichen Kollokationspunkte, $\hat{\mathbf{P}}$ dagegen den der entsprechenden Werte der analytischen Lösung in diesen Punkten, so berechnet sich gemäß

$$\varepsilon = \frac{\|\hat{\mathbf{P}} - \tilde{\mathbf{P}}\|}{\|\hat{\mathbf{P}}\|} \quad \text{mit der Norm} \quad \|\mathbf{f}\| := \sqrt{\sum_{j=1}^n [\text{Re}^2(f_j) + \text{Im}^2(f_j)]} \quad \text{sowie} \quad \mathbf{f} \equiv \hat{\mathbf{P}} \text{ bzw. } \tilde{\mathbf{P}} \quad (44)$$

die Norm des relativen Gesamtfehlers.

Im Folgenden wird das Konvergenzverhalten der numerischen Lösung in Abhängigkeit von der Netzfeinheit untersucht. Letztere ist durch einen Index F charakterisiert, der die Anzahl der Abschnitte angibt, in welche die Halbkugelsphäre in Umfangsrichtung unterteilt worden ist. In Abb. 8 sind ausgewählte Resultate für verschiedene Parameter ω im höheren Frequenzbereich dargestellt. (Man beachte dabei, dass in dem jeweils betrachteten Gesamtfehler sogar derjenige der geometrischen Approximation der Kugelsphäre als Polyeder bereits enthalten ist.)

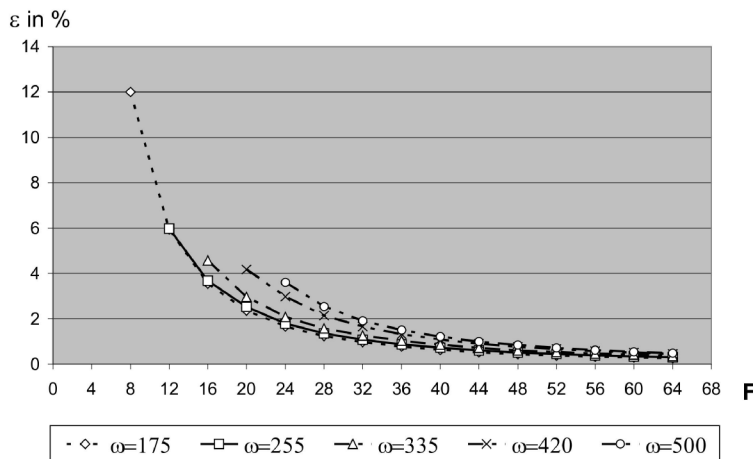


Abb. 8: Norm des relativen Fehlers in Abhängigkeit von Netzgüte F und Kreisfrequenz ω

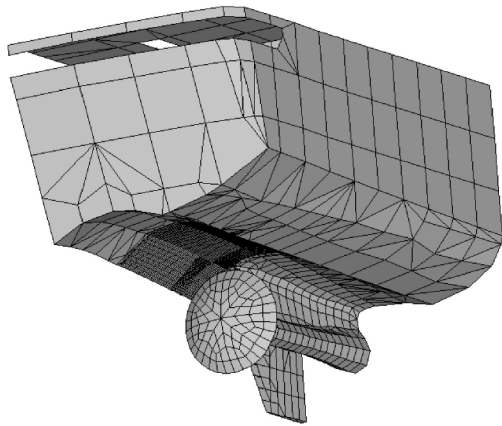
Die folgende Analyse demonstriert die Anwendbarkeit der Methode auf eine praxisrelevante Fragestellung im akustischen Frequenzbereich. Betrachtet wird das Modell eines propellererregten Hinterschiffes mit praxistypischer äußerer und ausgesteifter innerer Strukturgeometrie. Im Hinblick auf die Feinheit der Diskretisierung ist zu beachten, dass nicht die Schallgeschwindigkeit und die daraus resultierende Wellenlänge in der Flüssigkeit den Vernetzungsgrad auf der benetzten Fläche bestimmen, sondern die Forderung nach Darstellbarkeit der sich einstellenden Schwingformen der Struktur – im Allgemeinen eine wesentlich härtere Bedingung. Die Folge ist, dass zur Aufwandsbegrenzung Kompromisse einzugehen sind, die lediglich im

praktisch interessierenden Bereich der benetzten Fläche eine angemessene Netzfeinheit zulassen. In dieser Richtung ist auch die Beschränkung des Strukturmodells auf den Hinterschiffsbereich begründet.

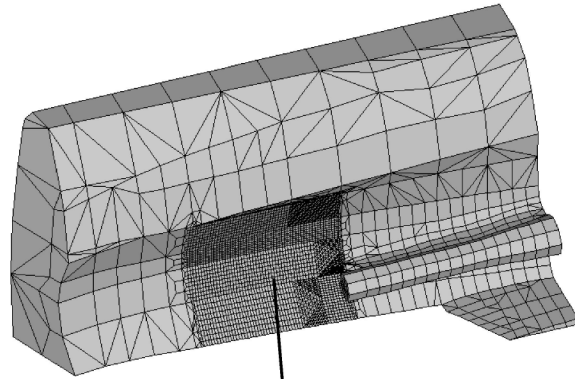
Betrachtet wird das Modell eines schnellen Zweischraubenschiffes. Abb. 9a zeigt das FE-Halbmodell. (Die numerischen Analysen erfolgten dagegen für das Gesamtmodell.) Die Erregung wurde stark vereinfacht simuliert mittels zweier dünnwandiger, deformierbarer Körper mit diskusförmiger Oberfläche. Dennoch ist der Effekt der Mehrkörper-Problematik gegeben, wobei allerdings hier die Fluid-Struktur-Interaktion des Hinterschiffes im Vordergrund steht. Vorgegeben wurde eine Wegerregung auf der Oberfläche der Zusatzkörper. Als interessierendes Teilgebiet wurde ein Patch im Bereich des Propellerbrunnens (lediglich auf einer Hinterschiffshälfte) definiert, das betreffende Netz in erheblichem Maße verfeinert und kompatibel in das umgebende Globalnetz eingefügt, Abb. 9b.

Das globale FE-Modell außerhalb des Patches erweist sich für eine lokale Schwingungsanalyse als ungeeignet, fällt doch die Netzfeinheit gegenüber dem Patch bis um einen ungefähren Faktor von 20 ab, so dass die Darstellbarkeit der Schwingformen dort nicht gewährleistet werden kann und folglich die Resultate nicht vertrauenswürdig sind. Die Vernetzung der freien Wasseroberfläche ist in Abb. 9c dargestellt.

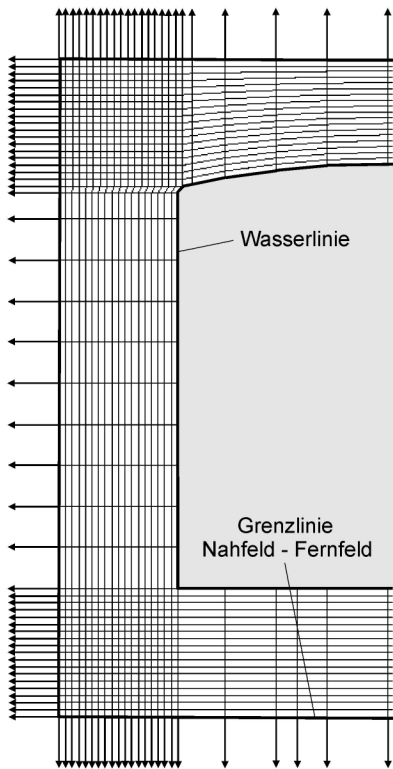
Das Anliegen dieser Analyse besteht in der Erfassung der Impedanzwirkungen der Struktur, d. h. in der Untersuchung der Veränderungen des Druckfeldes infolge erregter Geschwindigkeit der benetzten Struktur Oberfläche. Zur Demonstration des Interaktionseffektes werden die Resultate der deformierbaren Struktur jeweils denen des entsprechenden Modells für die starre Struktur gegenübergestellt. Die Abbildungen 10a und 10b zeigen die Druckverteilungen nebst einer Ausschnittsvergrößerung für den Patch. Zur Auswertung gelangen dabei die letztendlich ermittelten physikalischen Druckgrößen auf der benetzten Außenhaut für eine Erregerfrequenz von 100 Hz. Dargestellt ist diejenige Druckverteilung, welche sich zum Zeitpunkt des Auftretens der (global) maximalen Amplitude einstellt. Der hydroelastische Einfluss auf den sich einstellenden Druckverlauf wird mittels dieser Bilder deutlich belegt.



a Finite-Elemente-Halbmodell



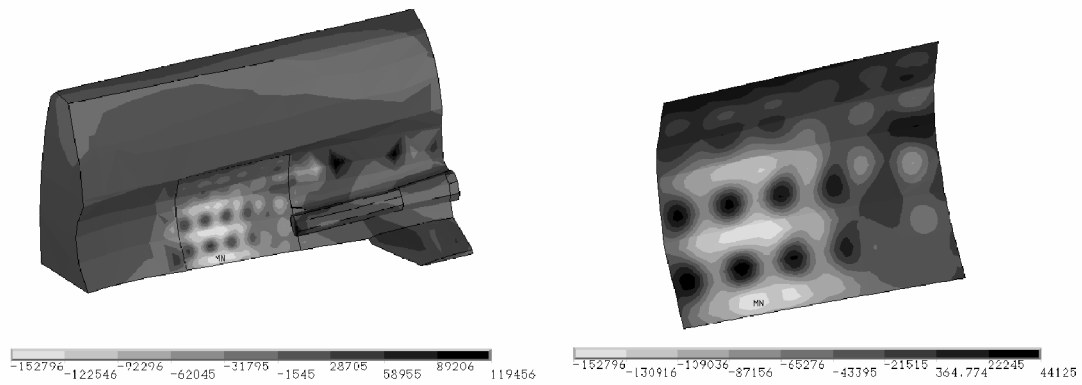
b Fein vernetzter Patch im Bereich des Propellerbrunnens



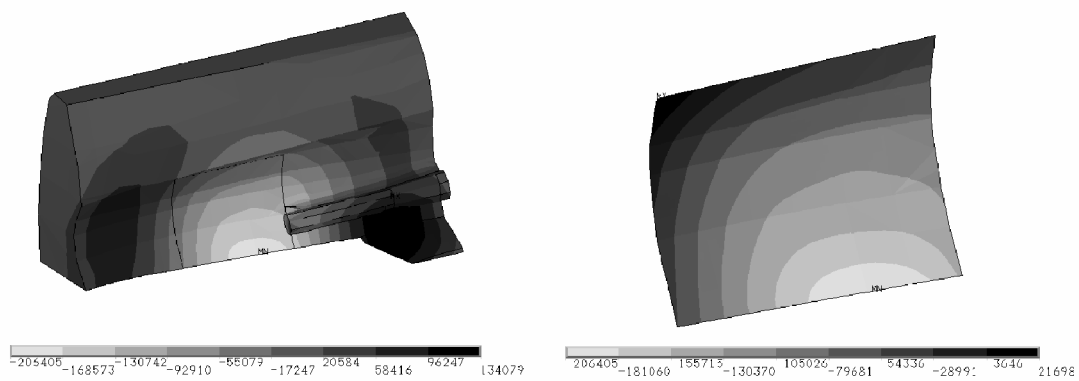
c Vernetzung der freien Wasseroberfläche

Abb. 9: Hydroakustisches Interaktionsproblem am Beispiel eines Hinterschiffes, Finite-Elemente/Randelemente-Modellierung

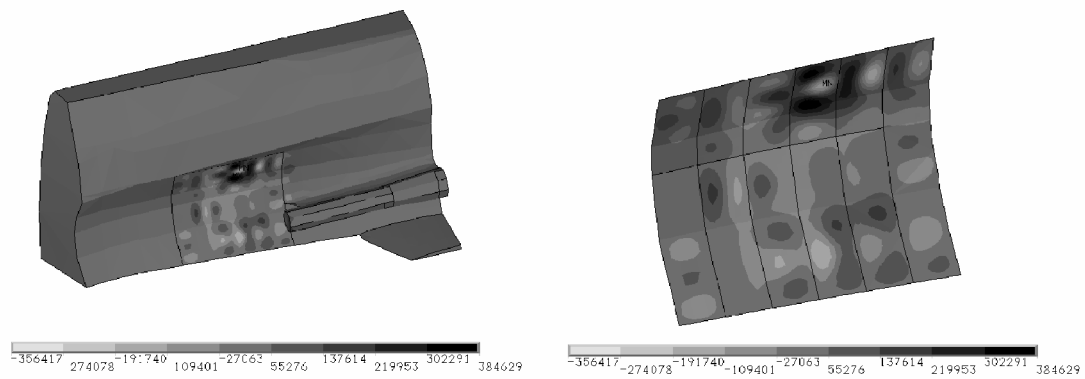
Darüber hinaus wird im vorgegebenen Frequenzbereich der Einfluss der Kompressibilität des umgebenden Fluids untersucht und zu diesem Zwecke die Berechnung eines weiteren Fallbeispiels durchgeführt. Abb. 10c repräsentiert die Resultate für das deformierbare Hinterschiff, wobei ein inkompressibles Fluid als Grenzfall des Rechenmodells zugrunde gelegt wurde. Man erkennt aus einem Vergleich der Abbildungen 10a und 10c den essenziellen Einfluss der Kompressibilitätseigenschaft im akustischen Frequenzbereich für Strukturmodelle dieser Abmessungen.



a deformierbares Strukturmodell, kompressibles Fluid



b starres Strukturmodell, kompressibles Fluid



c deformierbares Strukturmodell, inkompressibles Fluid

Abb. 10: Hydroakustisches Interaktionsproblem am Beispiel eines Hinterschiffes, Druckverteilung zum Zeitpunkt des Auftretens der maximalen Amplitude (Erregerfrequenz 100 Hz)

5 Schlussfolgerungen

Das Ziel der vorgestellten Entwicklungen bestand in der Schaffung von Algorithmen und Simulationsmodellen zur Behandlung hydroelastischer und hydroakustischer Problemstellungen mit harmonischer Erregung. Untersuchungen zum Einfluss der Strukturimpedanz in der Umgebung von Energieeinleitungspunkten sowie zur expliziten Berücksichtigung einer hydroelastischen Mehrkörper-Interaktion standen dabei im Mittelpunkt. Den theoretischen Ausgangspunkt bildet ein Randwertproblem der Helmholtz-Gleichung mit Druckansatz, das mittels schwacher Formulierung in eine eindeutig lösbare Randintegralgleichung für ein Halbraum-Problem mit

ggf. mehrfach zusammenhängendem Flüssigkeitsgebiet überführt wird. Alternativ zu bekannten BE-Formulierungen wird ein Randverfahren vorgestellt, das in Verbindung mit der Kollokationsmethode erstmals auf theoretisch fundierte Kollokationspunkt-Systeme führt. Es gelingt eine diskretisierte Darstellung des Problems auf der Berandung des Flüssigkeitsgebietes mit unabhängigen Ansätzen für die Druckverteilung und ihre Randnormalenableitung. Benutzt werden dazu isoparametrische Randelemente im Nahfeld sowie spezielle semi-infinite Elemente im Fernfeld, welche das Abkling- und Schwingungsverhalten der analytischen Lösung unter strenger Einhaltung der Sommerfeldschen Abstrahlbedingung qualitativ korrekt widerspiegeln.

Die Kopplung des elastokinetischen Strukturmodells mit dem hydrodynamischen Modell über ein Arbeitsprinzip führt schließlich auf eine Darstellung der Trägheits- und Dämpfungswirkungen der Flüssigkeit in Form von hydrodynamischen Zusatzmatrizen, die den Matrizen in den Bewegungsgleichungen der Struktur überlagert werden.

Die separate Behandlung des hydrodynamischen Modells bietet für dessen programmtechnische Realisierung den Vorzug, dass es optional über Schnittstellen an jeweilig verfügbare kommerzielle FE-Software angeschlossen werden kann. Diese Strategie wird insbesondere durch die Entwicklung eines spezifischen BE-Preprozessors unterstützt, der die Vernetzung der Oberflächen des Flüssigkeitsgebietes anhand einiger weniger Parameter automatisiert und kompatibel zur FE-Vernetzung der Kontaktfläche der Struktur generiert.

Allgemein ist für die gewählte Vorgehensweise ein vergleichsweise hoher numerischer Aufwand des BE-Algorithmus typisch, welcher in erster Linie aus der Eigenschaft der vollen Besetztheit der Systemmatrix in (24) resultiert und sich auch bei der Lösung des gekoppelten Problems (38) relevant auswirkt. Er nimmt in Abhängigkeit von der Anzahl der Kollokationspunkte – welche für größere Probleme in etwa demselben Maße anwächst wie die Zahl der Randelemente – quadratisch zu für den Vorgang der Berechnung der Element-Integrale, in dritter Potenz dagegen bei der Lösung der Systemgleichungen und der sich anschließenden Berechnung der Zusatzmatrizen.

Man ersieht daraus, dass das Bestreben, den Algorithmus effektiver zu gestalten, vordringlich an den beiden letztgenannten Punkten ansetzen sollte. In diesem Sinne wird insbesondere mit der Schnittstellentechnik erreicht, dass im Hinblick auf aufwandsintensive Algorithmen, wie das Lösen des Gleichungssystems bzw. die Multiplikation großer Matrizen, eine Ankopplung externer, optimierter Programmbausteine – vorzugsweise für die Mehrprozessor-Rechentechnik ausgelegt – möglich wird.

Anhand numerischer Studien für Fallbeispiele mit bekannter analytischer bzw. überschaubarer numerischer Lösung können die theoretisch nachgewiesenen Konvergenzeigenschaften des entwickelten BE-Algorithmus bestätigt werden.

Mit der Analyse ausgewählter Probleme zur Propellererregung eines Hinterschiffes kann der physikalische Einfluss der Kompressibilität bei einer hydroelastischen Mehrkörper-Interaktion rechnerisch bestätigt und quantifiziert werden. Die im akustischen Frequenzbereich, vorzugsweise von 100 Hz bis 300 Hz, vorgenommenen Untersuchungen belegen eine markant impedanzbeeinflusste Verteilung des hydrodynamischen Druckes und seiner Amplituden. Zur Verdeutlichung dieses Phänomens wird in Anlehnung an übliche hydrodynamische Modellversuche der Grenzfall von als starr anzusehenden Modellkörpern herangezogen. Entsprechende, wenn auch abgeschwächte Effekte zeigen sich selbst noch im unteren Frequenzbereich, der üblicherweise der globalen Schwingungserregung zugeordnet wird.

Literatur

Amini, S.; Harris, P. J.; Wilton, D. T.: Coupled Boundary and Finite Element Methods for the Solution of the Dynamic Fluid-Structure Interaction Problem. *Lecture Notes in Engineering 77*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1992).

Ihlenburg, F.: Finite Element Analysis of Acoustic Scattering. Springer-Verlag, New York (1998).

Möller, P.; Röhr, U.: Hydrodynamische Massen- und Dämpfungsmatrizen. *Schlussbericht zum Teilvorhaben A 5.2 des BMBF-Verbundvorhabens „Life Cycle Design“*. Universität Rostock (1999).

Möller, P.; Röhr, U.: Analyse propellerinduzierter Schwingungen unter Berücksichtigung der Impedanz des Schiffskörpers. *Schlussbericht zum Teilvorhaben D2 des BMBF-Verbundvorhabens WiPS*. Universität Rostock (2003).

Röhr, U.; Möller, P.: Elastische Schiffskörperschwingungen in begrenztem Fahrwasser. *Jahrbuch der STG*, 91. Band, Springer: Berlin, Heidelberg, New York, Barcelona, Hongkong, London, Mailand, Paris, Singapur, Tokio (1997).

Röhr, U.; Möller, P.: Hydroelastic Vibration Analysis of Wetted Thin-Walled Structures by Coupled FE-BE-Procedure. *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 12, No. 1 (2001), pp. 101 – 118.

Van Gent, W.: A Study on Propeller Cavitation Induced Vibration Excitation. *SWZ*, pp. 183–186, 4- (1991).

Vladimirov, V.S.: Gleichungen der mathematischen Physik. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1972).

Wolf, V.: Untersuchungen zum Grenzschiefeinfluss auf hydroakustisch erregte Mehrkörperschwingungen und -interaktionen mit einem FE-BE-Modell. *Diplomarbeit*, Universität Rostock (2005).

Adresse: Dr. rer. nat. Peter Möller, Prof. Dr.-Ing. Udo Röhr, Lehrstuhl für Strukturmechanik, Universität Rostock, D-18051 Rostock