

Selbsterregte Schwingungen eines Systems mit mehreren Reibflächen

G. Duntchev

In dieser Arbeit werden die fast-harmonischen selbsterregten Schwingungen eines Reibschwingers untersucht. Der Schwinger besitzt zwei Energiekanäle (Reibflächen) und die Reibkräfte sind von den Relativgeschwindigkeiten der Reibpartner abhängig. Die allgemeinen Überlegungen werden durch ein konkretes Beispiel illustriert. Zwei wichtige technische Anwendungen der Ergebnisse sind auch angegeben.

1 Einleitung

In der Schwingungslehre werden Reibschwinger mit einer Reibfläche (Energiekanal) untersucht (s. z.B. Magnus und Popp, 2002; Kononenko, 1964, 1980). In Maschinen gibt es auch Bauteile, die nicht nur eine, sondern zwei oder mehrere Reibflächen (Energiekanäle) besitzen. Durch eine Reibfläche kann Energie von außen dem Schwinger zugeführt werden und gleichzeitig kann durch die andere Reibfläche die Energie von dem Schwinger abgeführt werden (fallende bzw. steigende Reibkennlinie). In dieser Arbeit wird ein Reibschwinger solcher Art untersucht, der zwei Reibflächen (Energiekanäle oder Energiespeicher) besitzt.

2 Das Modell

Bild 1 zeigt das betrachtete Modell. Zwischen zwei Rollen 1 und 2 befindet sich der Körper 3, der über eine Feder 4 und einen Dämpfer 5 mit der festen Umgebung verbunden ist und nur eine Bewegung in vertikaler Richtung ausführen kann. Die Rollen werden durch zwei Motoren 6 und 7 angetrieben. Zwischen den Rollen und dem Körper herrscht trockene Reibung.

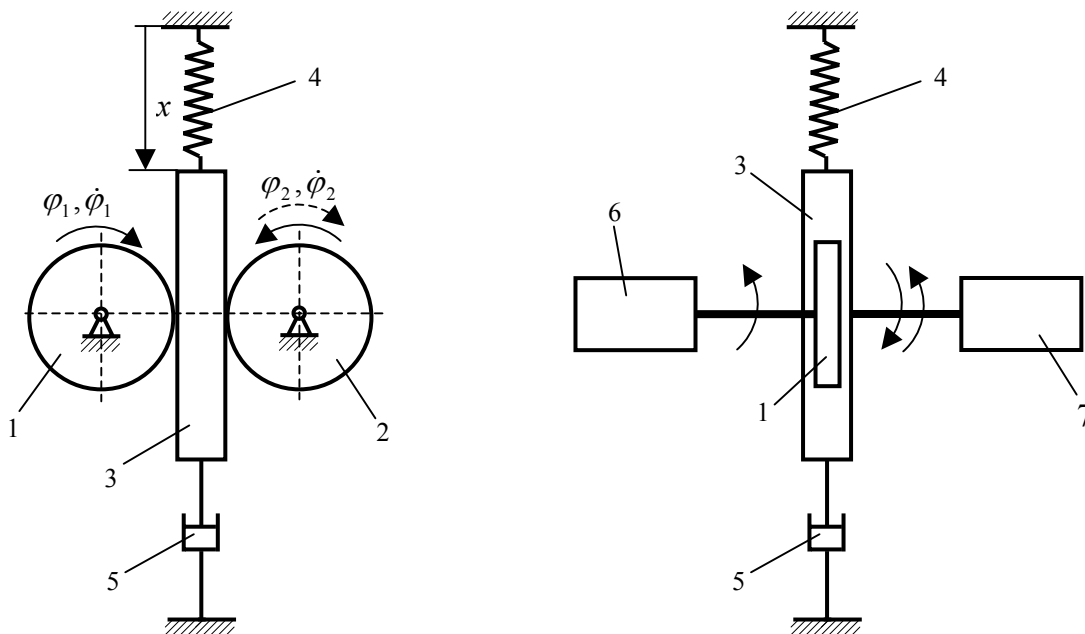


Bild 1. Reibschwinger mit zwei Reibflächen

Die benutzten Bezeichnungen sind:

- m - Masse des Körpers,
- J_i - Trägheitsmoment der Motoren mit den Rollen ($i = 1,2$),
- c - Federkonstante,
- b - Dämpfungskonstante des Dämpfers,
- N_i - Normalkraft zwischen den Rollen und dem Körper ($i = 1,2$),
- R_i - Reibungskräfte ($i = 1,2$),
- M_i - Betriebsmoment der Motoren ($i = 1,2$),
- r - Radius der Rollen,
- φ_i - Drehkoordinate der Rotoren der Motoren ($i = 1,2$),
- x - Bewegungskordinate des Körpers,
- $v_i = r\dot{\varphi}_i$ - Umfangsgeschwindigkeit der Rollen ($i = 1,2$).

Im Gegensatz zu den Modellen aus Magnus und Popp (2002), Kononenko (1964, 1980) werden hier zwei Energiekanäle betrachtet (s. z. B. Duntchev, 1994; Casini und Vestroni, 2003). Dies spielt eine wichtige Rolle für die möglichen Schwingungen des Systems. Die Reibungskräfte hängen von den Relativgeschwindigkeiten $v_{rel_i} = (v_i - \dot{x})$ ab, mit R_i nach Bild 2.

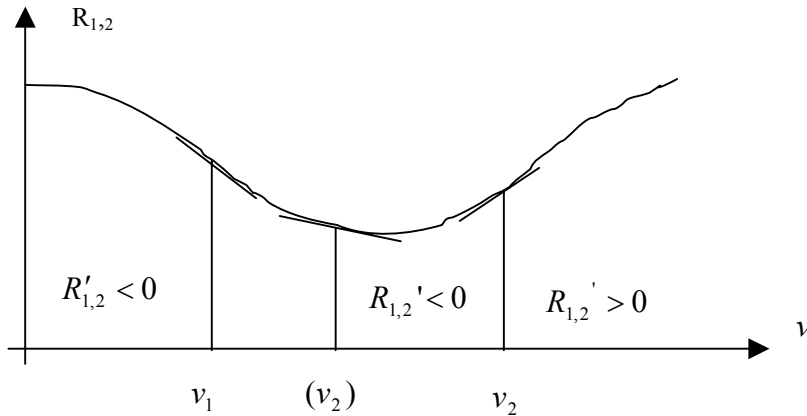


Bild 2. Reibkennlinie

3 Bewegungsgleichungen, stationäre Amplitude

Die Bewegungsgleichungen werden nach Bild 3 aufgestellt. Es werden zwei Möglichkeiten der Winkelgeschwindigkeitsrichtungen betrachtet: $\dot{\varphi}_1$ und $\dot{\varphi}_2$ sind entweder entgegen- oder gleichgerichtet.

Falls die Winkelgeschwindigkeiten entgegen gerichtet sind, lauten die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}
 J_1 \ddot{\varphi}_1 &= M_1 - rR_1, \\
 J_2 \ddot{\varphi}_2 &= M_2 - rR_2, \\
 m\ddot{x} &= -cx - b\dot{x} + R_1 + R_2.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Es wird angenommen, dass $\dot{x} \ll v_i$ gilt, so dass die Reibungskräfte R_1 und R_2 in Taylor-Reihen nach der Geschwindigkeit \dot{x} entwickelt werden können:

$$\begin{aligned}
 R_1 &= R_{10} - R'_1 \dot{x} + \frac{R''_1}{2} \dot{x}^2 - \frac{R'''_1}{6} \dot{x}^3, \\
 R_2 &= R_{20} + R'_2 \dot{x} + \frac{R''_2}{2} \dot{x}^2 + \frac{R'''_2}{6} \dot{x}^3,
 \end{aligned} \tag{2}$$

worin $(\cdot)' = \frac{d(\cdot)}{dv}$.

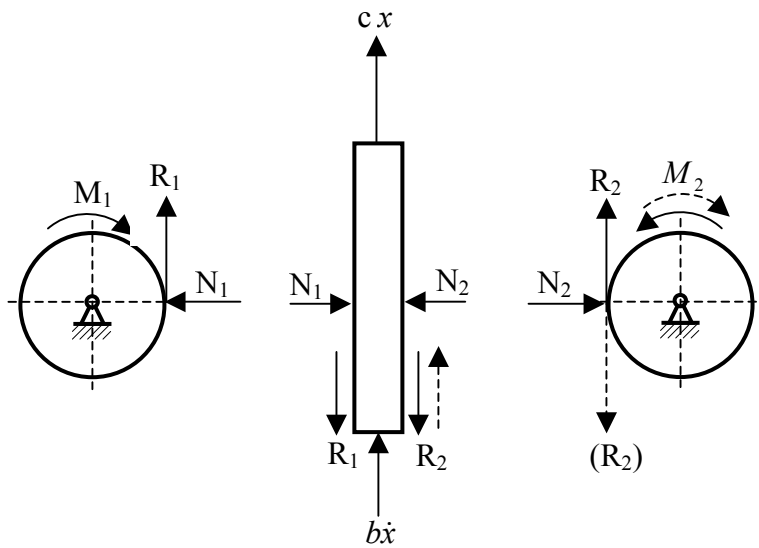


Bild 3. Freikörperbild des Schwingers

Mit $M_1 = M_{10} - b_1\dot{\phi}_1$ und $M_2 = M_{20} - b_2\dot{\phi}_2$, ($M_{10}, M_{20}, b_1, b_2 = konst$) sowie Einsetzen von (2) in (1) erhält man die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}
 J_1\ddot{\phi}_1 &= M_{10} - b_1\dot{\phi}_1 - rR_{10} + rR_1'\dot{x} - \frac{rR_1''}{2}\dot{x}^2 + \frac{rR_1'''}{6}\dot{x}^3, \\
 J_2\ddot{\phi}_2 &= M_{20} - b_2\dot{\phi}_2 - rR_{20} + rR_2'\dot{x} - \frac{rR_2''}{2}\dot{x}^2 + \frac{rR_2'''}{6}\dot{x}^3, \\
 m\ddot{x} + cx &= -b\dot{x} + (R_{10} + R_{20}) - (R_1' + R_2')\dot{x} + \frac{1}{2}(R_1'' + R_2'')\dot{x}^2 - \frac{1}{6}(R_1''' + R_2''')\dot{x}^3.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Falls die Winkelgeschwindigkeiten gleichgerichtet sind, lauten die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}
 J_1\ddot{\phi}_1 &= M_1 - rR_1, \\
 J_2\ddot{\phi}_2 &= M_2 - rR_2, \\
 m\ddot{x} &= -cx - b\dot{x} + R_1 - R_2.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Weil nun $v_{rel,1} = (v_1 - \dot{x})$ und $v_{rel,2} = (v_2 + \dot{x})$ gilt, liefert eine Taylor-Entwicklung :

$$\begin{aligned}
 R_1 &= R_{10} - R_1'\dot{x} + \frac{R_1''}{2}\dot{x}^2 - \frac{R_1'''}{6}\dot{x}^3, \\
 R_2 &= R_{20} + R_2'\dot{x} + \frac{R_2''}{2}\dot{x}^2 + \frac{R_2'''}{6}\dot{x}^3,
 \end{aligned} \tag{5}$$

worin $(\cdot)' = \frac{d(\cdot)}{dv}$.

Einsetzen von (5) in (4) liefert

$$\begin{aligned}
J_1\ddot{\phi}_1 &= M_{10} - b_1\dot{\phi}_1 - rR_{10} + rR_1'\dot{x} - \frac{rR_1''}{2}\dot{x}^2 - \frac{rR_1'''}{6}\dot{x}^3, \\
J_2\ddot{\phi}_2 &= M_{20} - b_2\dot{\phi}_2 - rR_{20} + rR_2'\dot{x} - \frac{rR_2''}{2}\dot{x}^2 - \frac{rR_2'''}{6}\dot{x}^3, \\
m\ddot{x} + cx &= -b\dot{x} + (R_{10} - R_{20}) - (R_1' + R_2')\dot{x} + \frac{1}{2}(R_1'' - R_2'')\dot{x}^2 - \frac{1}{6}(R_1''' + R_2''')\dot{x}^3.
\end{aligned} \tag{6}$$

Die Gleichungssysteme (3) und (6) haben gleiche Struktur, so dass die allgemeine Schreibweise

$$\begin{aligned}
J_1\ddot{\phi}_1 &= M_{10} - b_1\dot{\phi}_1 - rR_{10} + rR_1'\dot{x} - \frac{rR_1''}{2}\dot{x}^2 - \frac{rR_1'''}{6}\dot{x}^3, \\
J_2\ddot{\phi}_2 &= M_{20} - b_2\dot{\phi}_2 - rR_{20} + rR_2'\dot{x} - \frac{rR_2''}{2}\dot{x}^2 - \frac{rR_2'''}{6}\dot{x}^3, \\
m\ddot{x} + cx &= -b\dot{x} + (R_{10} \pm R_{20}) - (R_1' + R_2')\dot{x} + \frac{1}{2}(R_1'' \pm R_2'')\dot{x}^2 - \frac{1}{6}(R_1''' + R_2''')\dot{x}^3
\end{aligned} \tag{7}$$

gilt. Durch das hergeleitete Gleichungssystem (7) können jetzt die möglichen Schwingungen, der Einfluss des Motorgetriebes auf die Schwingungen und andere mechanische Vorgänge untersucht werden.

Sehr oft in der technischen Praxis kann der Einfluss der Schwingungen des Körpers auf die Drehung der Motoren vernachlässigt werden (Kononenko, 1964). Dann kann die dritte Gleichung von (3) unabhängig von den beiden ersten Gleichungen betrachtet werden.

Nach Umformen nimmt diese Gleichung die Form

$$\ddot{x} + k^2x = n_0 - n_1\dot{x} + n_2\dot{x}^2 - n_3\dot{x}^3 \tag{8}$$

an mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned}
k^2 &= \frac{c}{m}, & n_0 &= \frac{R_{10} \pm R_{20}}{m}, & n_1 &= \frac{b + R_1' + R_2'}{m}, \\
n_2 &= \frac{R_1'' \pm R_2''}{2m}, & n_3 &= \frac{R_1''' + R_2'''}{6m}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Die Gleichung (8) (und ihre Lösung) ist ähnlich der bekannten Bewegungsgleichung des Reibschwingers (Magnus und Popp, 2002; Kononenko, 1980) mit stationärer Amplitude $a = \frac{2}{k} \sqrt{-\frac{n_1}{n_3}}$ mit einem wichtigen

Unterschied: die Koeffizienten n_1 und n_3 hängen von zwei Parametern ab, und mit (9) ist die Amplitude

$$a = \frac{2}{k} \sqrt{-\frac{b + R_1' + R_2'}{R_1''' + R_2'''}}. \tag{10}$$

Sehr oft ist b vernachlässigbar und dann folgt

$$a = \frac{2}{k} \sqrt{-\frac{R_1' + R_2'}{R_1''' + R_2'''}}. \tag{11}$$

4 Ergebnisse

Die Analyse der Gleichung (9) und der Ausdruck für die Amplitude (11) zeigen:

- Selbsterregte Schwingungen sind unabhängig von der Richtung der Energiezufuhr (Energieabfuhr). Diese Richtungen bestimmen nur die Gleichgewichtslage des Schwingers (Koeffizient n_0).
- Unabhängig von der Richtung der Energiezufuhr werden die Koeffizienten n_1 und n_3 immer durch Addition der höheren Ableitungen R'_1, R'_2, R'''_1 und R'''_2 bestimmt.
- Die Amplitude a hängt von $(R'_1 + R'_2)$ ab. Wie in Bild 2 aufgezeigt ist, gibt es dafür verschiedene Möglichkeiten:
Im Fall $R'_1 < 0$ und $R'_2 < 0$ (fallende Reibkennlinien) sind Schwingungen des Körpers möglich ($a \neq 0$).
Eine andere Möglichkeit ist $R'_1 < 0$; $R'_2 > 0$ (fallende bzw. steigende Reibkennlinie). Während für $|R'_1| > |R'_2|$ dann auch Schwingungen möglich sind ($a \neq 0$), sind sie für $|R'_1| < |R'_2|$ ausgeschlossen ($a = 0$).

5 Technische Anwendungen der Ergebnisse am konkreten Beispiel

Als Anwendungsbeispiel wird der Schwinger in Bild 4. betrachtet. Ein Körper vom Gewicht $G = mg$ und Trägheitsmoment J bezüglich des Schwerpunktes S stützt sich auf zwei Rollen ab. Die Rollen drehen sich in den gezeigten Richtungen mit konstanten Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 (die Umfangsgeschwindigkeiten sind v_1 und v_2). Die Höhe des Schwerpunktes ist h , der Abstand $O_1O_2 = 2l$. Die Reibungszahlen zwischen den Rollen und dem Körper sind μ_1 und μ_2 , die Normal- und die Reibungskräfte sind N_1, N_2 und R_1, R_2 .

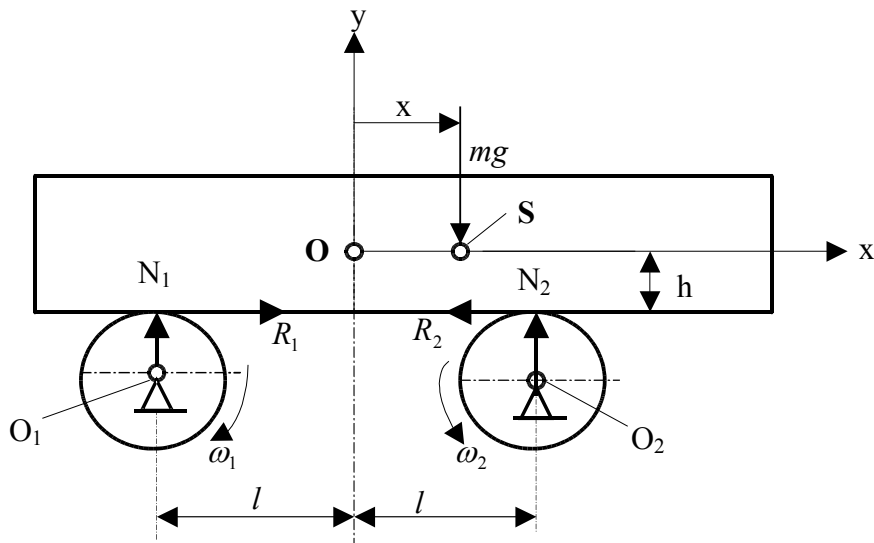


Bild 4. Reibschwinger

Dieser Schwinger besitzt zwei Energiekanäle. Die Energiezufuhr von den Rollen zum Körper wird durch die beiden Reibungskräfte realisiert. Dabei kann das System ohne äußere Feder betrieben werden. Die benötigte Rückstellkraft ist die Differenz $(R_1 - R_2)$ zwischen beiden Reibungskräften.

Das System hat noch eine Besonderheit derart, dass die Eigenkreisfrequenz k^2 im Fall ohne äußere Feder nicht von der Masse m des Körpers abhängt.

Für den Fall $\mu_1 = \mu_2 = \mu = \text{const}$ (Coulombsche Reibung) ergibt sich für diesen Fall die Bewegungsgleichung in x -Richtung zu

$$\ddot{x} + k^2 x = 0 \quad \text{mit} \quad k^2 = \frac{\mu g}{(l \pm \mu h)}. \quad (12)$$

Gleichung (12) beschreibt die freien Schwingungen des Körpers. Da der Luftwiderstand sehr klein ist, wird der Körper lange Zeit schwingen. Experimente zeigen aber, dass unter bestimmten Bedingungen die Schwingungen verschwinden, während sie unter anderen Bedingungen (als selbsterregte Schwingungen) existieren. Daraus folgt, dass die Annahme Coulombscher Reibung nicht alle Phänomene dieses Schwingungssystems richtig erklären kann.

5.1 Bewegungsgleichung des Schwingers

Im x, y – Koordinatensystem (siehe Bild 4) liefern Kräfte- und Momentenbilanz

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= R_1 - R_2, \\ m\ddot{y} &= 0 = N_1 + N_2 - mg, \\ J\ddot{\varphi} &= 0 = R_1 h - R_2 h - N_1(l+x) + N_2(l-x). \end{aligned} \quad (13)$$

Aus den beiden letzten Gleichungen in (13) sind die Reibungskräfte zu

$$\begin{aligned} R_1 &= \mu_1 mg \frac{l-x-h\mu_2}{2l-h(\mu_1+\mu_2)}, \\ R_2 &= \mu_2 mg \frac{l+x-h\mu_1}{l-h(\mu_1+\mu_2)} \end{aligned} \quad (14)$$

bestimmbar. Einsetzen von (14) in die erste Gleichung von (13) liefert

$$\ddot{x} = g \frac{(\mu_1 - \mu_2)l - (\mu_1 + \mu_2)x}{2l - h(\mu_1 + \mu_2)}. \quad (15)$$

Werden jetzt die Reibungszahlen in Taylor-Reihen nach der Geschwindigkeit \dot{x} entwickelt und nur die ersten drei Glieder berücksichtigt, ergibt sich

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \mu_{10} - \mu_1' \dot{x} + \frac{\mu_1''}{2} \dot{x}^2 - \frac{\mu_1'''}{6} \dot{x}^3, \\ \mu_2 &= \mu_{20} + \mu_2' \dot{x} + \frac{\mu_2''}{2} \dot{x}^2 + \frac{\mu_2'''}{6} \dot{x}^3, \quad \text{worin } (.)' = \frac{d(.)}{dv}. \end{aligned} \quad (16)$$

Einsetzen von (16) in (15) und Umformen liefert die Bewegungsgleichung in der endgültigen Form

$$\ddot{x} + k^2 x = n_0 + n_1 \dot{x} + n_2 \dot{x}^2 + n_3 \dot{x}^3 + q_1 x \dot{x} + q_2 x \dot{x}^2 + q_3 x \dot{x}^3 + p_1 \ddot{x} + p_2 \ddot{x}^2 + p_3 \ddot{x}^3 \quad (17)$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned}
 k^2 &= \frac{gl}{a}(\mu_{10} + \mu_{20}), & q_2 &= \frac{g}{2a}(\mu_1'' + \mu_2''), & n_0 &= \frac{gl}{a}(\mu_{10} + \mu_{20}), \\
 q_3 &= -\frac{g}{6a}(\mu_1''' - \mu_2'''), & n_1 &= -\frac{gl}{a}(\mu_1' + \mu_2'), & p_1 &= -\frac{h}{a}(\mu_1' - \mu_2'), \\
 n_2 &= \frac{gl}{2a}(\mu_1'' + \mu_2''), & p_2 &= \frac{h}{2a}(\mu_1'' + \mu_2''), & n_3 &= -\frac{gl}{6a}(\mu_1''' + \mu_2'''), \\
 p_3 &= -\frac{h}{6a}(\mu_1''' - \mu_2'''), & q_1 &= -\frac{g}{a}(\mu_1' - \mu_2'), & a &= 2l - h(\mu_{10} + \mu_{20}).
 \end{aligned} \tag{18}$$

Die hergeleitete Bewegungsgleichung erlaubt die Untersuchung selbsterregter Schwingungen des Systems. Wie diese Untersuchungen (s. Kap. 5.2) zeigen, hängen die resultierenden Schwingungen in erster Näherung nur von den Koeffizienten n_0, n_1, n_3 in (17) ab, die gemäß (18) alle durch Summen höherer Ableitungen der Reibwerte unabhängig von der Geschwindigkeitsrichtung gekennzeichnet sind.

5.2 Schwingungen des Systems

Es werden nur die stationären Schwingungen betrachtet. Die Bewegungsgleichung (17) wird mit der Methode der langsam veränderlichen Amplitude gelöst. Die stationäre Amplitude und die Frequenz der selbsterregten Schwingungen sind

$$a = 2 \sqrt{-\frac{6[2l \mp h(\mu_{10} + \mu_{20})](\mu_1' + \mu_2')}{g(\mu_{10} + \mu_{20})(\mu_1''' + \mu_2''')}}}, \tag{19}$$

$$k^2 = \frac{g(\mu_{10} + \mu_{20})}{2l \mp h(\mu_{10} + \mu_{20})}. \tag{20}$$

Wenn $\mu_1 = \mu_2$ und $v_1 = v_2$ gilt (Umfangsgeschwindigkeiten der Rollen sind gleich), dann liefert dies

$$\mu_{10} = \mu_{20} = \mu_0; \mu_1' = \mu_2' = \mu'; \mu_1''' = \mu_2''' = \mu'''. \tag{21}$$

Einsetzen von (21) in (19) und (20) führt auf

$$a = 2 \sqrt{-\frac{6(l \mp h\mu_0)}{g\mu_0} \cdot \frac{\mu'}{\mu'''}}, \tag{22}$$

$$k^2 = \frac{g\mu_0}{l \mp h\mu_0}. \tag{23}$$

Für $h \ll l$ nehmen (19), (20), (22) und (23) die Form

$$a = 4 \sqrt{-\frac{3l(\mu_1' + \mu_2')}{g(\mu_{10} + \mu_{20})(\mu_1''' + \mu_2''')}}}, \tag{24}$$

$$k^2 = \frac{g(\mu_{10} + \mu_{20})}{2l}, \tag{25}$$

$$a = 4 \sqrt{-\frac{3l\mu'}{2g\mu_0\mu'''}}, \tag{26}$$

$$k^2 = \frac{g\mu_0}{l} \tag{27}$$

an. Die Amplitude und die Frequenz hängen von der Lage des Schwerpunktes des Körpers ab. Das Minuszeichen in (19), (20), (22) und (23) gilt für $y_S = h > 0$ (der Schwerpunkt S liegt oberhalb der Berührungsebene zwischen der Rollen und dem Körper) und das Pluszeichen für $y_S = h < 0$.

Für positive Werte von h gibt es zwei Möglichkeiten: Ist $2l - h(\mu_{10} + \mu_{20}) > 0$, so ist $k^2 > 0$ und die Schwingungen existieren. Für den Fall $2l - h(\mu_{10} + \mu_{20}) < 0$ ist $k^2 < 0$ und Schwingungen sind dann unmöglich. Der Körper führt eine Scheibenbewegung aus, mit $y \neq 0$ und $\varphi \neq 0$. Für negative Werte von h gilt immer $k^2 > 0$, und die Schwingungen können existieren.

Selbstverständlich muss der Schwinger im fallenden Bereich der Reibkennlinie arbeiten, damit die Schwingungen überhaupt existieren (siehe Kap. 4.).

Aus den hergeleiteten Ausdrücken in (17) bis (27) folgt außerdem, dass

- die Amplitude und die Frequenz nicht von der Masse des Schwingers abhängen und
- für $h \ll l$ die Amplitude und die Frequenz vor allem vom Abstand l beeinflusst werden, wobei die Amplitude relativ groß wird und die Frequenz niedrig.

5.3 Technische Anwendungen der Ergebnisse

5.3.1 Bestimmung der Reibkennlinie

Die Vermessung trockener Reibung auf einem Labor-Prüfstand hat nach wie vor große Bedeutung für die technische Praxis (Brandl, 2000). Das vorgestellte System ist dafür sehr geeignet.

Durch Messung der Frequenz $k^2(v_1)$ für verschiedene Umfangsgeschwindigkeiten v_1 kann nämlich experimentell der fallende Bereich der Reibkennlinie einfach festgestellt werden (s. Bild 5).

Aus (27) folgt $\mu_0(v_1) = k^2(v_1) \frac{l}{g}$. Weiter kann mit diesen schon bekannten Werten dann der fallende Bereich der Reibkennlinie approximiert werden. Bei einer Geschwindigkeit v^* verschwinden die Schwingungen ($\mu' = 0$) und μ_0 nimmt seinen minimalen Wert an. Wenn $v > v^*$ ist, sind keine Schwingungen mehr möglich. Trotzdem kann man auch den steigenden Bereich der Reibkennlinie feststellen. Eine von beiden Rollen wird mit ihrer Geschwindigkeit im fallenden Bereich der Reibkennlinie festgelegt (Umfangsgeschwindigkeit der Rolle ist v_1 , s. Bild 5); die Geschwindigkeit v_2 der anderen Rolle dagegen im steigenden Bereich verändert. Wenn dann die Schwingungen verschwinden, gilt $\mu_0(v_1) = \mu_0(v_2)$ und man kann so experimentell zunächst $\mu_0(v_2)$ feststellen.

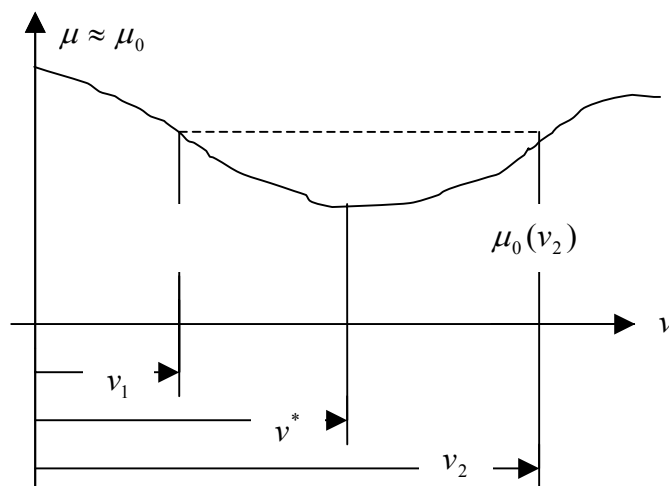


Bild 5. Bestimmung der Reibkennlinie

Anschließend wird v_2 der anderen Rolle im steigenden Bereich verändert, und wenn die Schwingungen erneut verschwinden, dann gilt $\mu_0(v_1) = \mu_0(v_2)$. So kann man auch experimentell $\mu_0(v_2)$ feststellen.

Da die Kreisfrequenz niedrig ist, kann man sie mit größerer Genauigkeit messen und damit auch die Reibkennlinie genauer bestimmen.

Die für den Schwingungsvorgang wichtigste Größe ist $\frac{\mu'_1 + \mu'_2}{\mu''_1 + \mu''_2}$ bzw. $\left(\frac{\mu'}{\mu''}\right)$. Sie kann ebenfalls bestimmt werden. Aus (20) folgt nämlich

$$2l \mp h(\mu_{10} + \mu_{20}) = \frac{g(\mu_{10} + \mu_{20})}{k^2}. \quad (28)$$

Setzt man (28) in (19) ein, erhält man

$$a = \frac{2}{k} \sqrt{-6 \frac{\mu'_1 + \mu'_2}{\mu''_1 + \mu''_2}} \quad \text{also} \quad \frac{\mu'_1 + \mu'_2}{\mu''_1 + \mu''_2} = -\frac{ak^2}{24} \quad \text{und} \quad \frac{\mu'}{\mu''} = -\frac{ak^2}{24}. \quad (29)$$

5.3.2 Niedrigfrequenter Schwingungszustand

Harmonische Schwingungen mit niedrigen Frequenzen zu realisieren ist eine schwere Aufgabe der Messtechnik. Mit dem betrachteten Reibschwinger können fast-harmonische Schwingungen mit sehr niedrigen Frequenzen einfach realisiert werden. Mit $l = 0,5(\text{m}), h = 0,1(\text{m}), \mu_{10} = \mu_{20} = \mu_0 = 0,2$ und $g = 9,81 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)$ beispielweise

berechnet sich die Kreisfrequenz k zu $k = \sqrt{\frac{9,81(0,2+0,2)}{1 \mp 0,1(0,2+0,2)}} = \begin{cases} 2,02 \\ 1,94 \end{cases} (\text{s}^{-1})$. Die Periode ist

$$\tau = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2,02} \approx \frac{2\pi}{1,94} \approx 3,14(\text{s}) \quad \text{und für die Frequenz erhält man} \quad f = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{3,14} \approx 0,319(\text{Hz}).$$

Dabei besitzt der Schwinger eine sehr nützliche Eigenschaft, dass nämlich die Frequenz unabhängig von der Masse wird.

6 Zusammenfassung

Gegenstand der Arbeit ist die Untersuchung eines Reibschwingers mit zwei Energiekanälen. Dabei zeigt sich, dass - unabhängig von den Richtungen der Energiezufuhr - die Koeffizienten der Bewegungsgleichung durch Addition der höheren Ableitungen der Reibungskräfte (Reibungszahlen) bestimmt werden können. Man kann zeigen, dass bei Systemen mit mehreren Energiespeichern diese Regel immer gilt. Der Einfluss der Geschwindigkeit der Energiezufuhr (der Energieabfuhr) auf den Schwingungsvorgang wird auch im Detail erklärt. Die allgemeinen Überlegungen sind durch ein konkretes Beispiel illustriert. Es wird veranschaulicht, wie die Ergebnisse dieser Untersuchung praktisch angewendet werden können.

Literatur

Brandl, M.: *Messung von Trockenreibung*, Fortschr.-Ber. VDI, Reihe 11, Nr.292. VDI-Verlag, Düsseldorf, (2000).

Casini P., Vestroni F.: *Non-Smooth Dynamics of a Double-Belt Friction Oscillator*, IUTAM Symposium, 08-13 June 2003, Rome, Italy.

Duntschev G.: Über die selbsterregte Reibschwingungen, *Zeitschrift Maschinenbau*, Heft 5-6, Sofia, (1994) (in Bulgarisch).

Kononenko W.: *Schwingungssysteme mit begrenzter Erregung*, Nauka, Moskau, (1964) (in Russisch).

Kononenko W.: *Nichtlineare Schwingungen von mechanischen Systemen*. Naukova Dumka, Kiew, (1980) (in Russisch).

Magnus K., Popp K.: *Schwingungen. Eine Einführung in die physikalischen Grundlagen und die theoretische Behandlung von Schwingungsproblemen*. 6. durchgesehene Auflage, B.G. Teubner, Stuttgart-Leipzig-Wiesbaden, (2002).

Adresse: Dr.-Ing. Geno Duntchev, Fakultät für deutsche Ingenieur- und Betriebswirtschaftsausbildung, Technische Universität Sofia, BG-1756 Sofia, Bulgarien.
e-mail: duntchev@tu-sofia.bg