

# Chaos-Polynome in der probabilistischen Sicherheitsanalyse von Stabtragwerken

J. Biehounek, H. Grolik, S. Herz

*Die Arbeit verbindet die im Konstruktiven Ingenieurbau beim Bemessen von Stabtragwerken allgemein übliche Deformationsmethode mit modernen Ergebnissen der Stochastik: Zufällige Unsicherheiten der Bemessungsgrößen (Materialparameter, Belastung) werden über WIENER-HERMITE-Polynome in orthonormierten GAUSSschen Zufallsgrößen erfasst. Der Vorzug des neuartigen Zugangs zur probabilistischen Sicherheitsanalyse von Stabtragwerken besteht vor allem darin, dass das Rechenverfahren der Deformationsmethode im Grundsatz erhalten bleibt. Dies kommt den Bedürfnissen der Praxis entgegen. Das Verfahren liefert die analytische Darstellung der sicherheitsrelevanten Ausgangsgrößen (Knotenverschiebungen, Spannungen) als Polynome GAUSSscher Zufallsgrößen. Der Einfluss von Parameterunsicherheiten kann beurteilt werden. Ferner lassen sich die statistischen Momente der Ausgangsgrößen und die Versagenswahrscheinlichkeit  $P_f$  ableiten. Dies ermöglicht eine breitere Sicht auf das Verhalten eines Tragwerks bei unsicheren Bemessungsgrößen. Die Methode wird durch Beispiele illustriert. Vom Standpunkt der Mechanik wird die Plausibilität der benutzten Ansätze untersucht. Ferner dienen die erweiterten Möglichkeiten der probabilistischen Analyse zu Aussagen darüber, wie Veränderungen von Konstruktionsparametern und die Lage der Schnittstelle auf die Tragwerksicherheit wirken. Zur Bestimmung von  $P_f$  bietet sich die Monte-Carlo-Methode an. Zur Varianzreduktion wird neben der importance-sampling-Technik ein KALMAN-Filter eingesetzt.*

## 1 Einführung

Die mathematische Modellierung vieler physikalisch-technischer Systeme wird heutigen Ansprüchen an Wirklichkeitsnähe nur dann gerecht, wenn sie der Unbestimmtheit von Systemparametern Rechnung trägt. Häufig wird es sich dabei um ihre natürliche, von zufälligen Messfehlern überlagerte Variabilität handeln. In anderen Fällen um äußere Einwirkungen, die nicht mit letzter Sicherheit quantifizierbar sind. Auf diese beiden Arten von Unbestimmtheit stößt man auch im konstruktiven Ingenieurbau. So muss die Tragwerksstatik die Sicherheit von Konstruktionen gewährleisten, obwohl die Bemessungsparameter mehr oder weniger unbestimmt sind. Zufällige Fluktuationen von Stoff- oder Geometriegrößen sind bei der Bemessung ebenso zu berücksichtigen wie die Unsicherheit der Lastannahmen. Die zur Bewältigung dieses Problems eingesetzten Methoden sind vielgestaltig. Eine grobe Einteilung unterscheidet statistische von deterministischen Ansätzen. In Deutschland vollzieht sich zur Zeit ein Übergang zu Normen, welche die Bemessung nach Grenzzuständen mit Teilsicherheitsbeiwerten vorschreiben. Diese erfassen die Unbestimmtheiten bei Belastung und Widerstand der Konstruktion. Das probabilistische Sicherheitskonzept, dem die Forschung gegenwärtig besondere Aufmerksamkeit widmet, geht von der Annahme aus, dass sich sowohl die natürliche Variabilität gewisser Größen als auch unsichere Parameter-Annahmen mit Methoden der Stochastik beschreiben lassen (Ditlevsen und Madsen, 1996). Während das gegenwärtig angewandte baupraktische Sicherheitskonzept stochastische Methoden umgeht, trägt das probabilistische Vorgehen der Unbestimmtheit von Bemessungsgrößen in mathematisch adäquater Weise Rechnung. Als Maß der Tragwerksicherheit dient hier die Versagenswahrscheinlichkeit  $P_f$ . Diese Methode ist leistungsfähiger. Sie deckt Einflüsse von Konstruktionsparametern auf, die beim herkömmlichen Vorgehen in dieser Deutlichkeit nicht sichtbar werden. Außerdem werden die Sicherheitsbeiwerte zu einem Gegenstand der Theorie. Die tiefergehende Risikoanalyse wird durch das Vordringen elektronischer Rechner begünstigt und hat auch wirtschaftliche Gründe.

Die in der Tradition von MAYER, FREUDENTHAL u.a. (s. z.B. Mayer, 1926, Freudental, 1947) stehende probabilistische Theorie der Tragwerksicherheit nach RACKWITZ und FIESSLER (s. z.B. Fießler u. a., 1976, Rackwitz, 1977) ermittelt die Versagenswahrscheinlichkeit von Tragwerken auf einem Wege, der allgemein von der Wahrscheinlichkeitsrechnung vorgezeichnet wird. Dem gemäß steht die Wahrscheinlichkeitsdichte  $f_{\bar{b}}$  des

Vektors  $\vec{B}$  der zufälligen Bemessungsgrößen im Mittelpunkt. Mit Hilfe der Grenzzustandsfunktion  $g$  wird der Versagensbereich

$$V = \left\{ \vec{b} \mid g(\vec{b}) < 0 \right\} \quad (1)$$

definiert. Schließlich ergibt sich die Versagenswahrscheinlichkeit aus

$$P_f = P(g(\vec{B}) < 0) = \int_V f_{\vec{B}}(\vec{b}) d\vec{b} . \quad (2)$$

Dabei bezeichnet  $\vec{b}$  die Realisierungen von  $\vec{B}$ . Die Auswertung des Integrals (2) ist das Grundproblem der klassischen probabilistischen Sicherheitstheorie. Eine analytische Behandlung ist nur bei normalverteilten Bemessungsgrößen und einer linearen Grenzzustandsfunktion möglich (Spaethe, 1992, Schneider, 1995, Melcher, 1999). In allen anderen Fällen läßt sich das Integral nur näherungsweise auswerten (Spaethe, 1992, Sudret, Der Kiureghian, 2002, Melcher, 1999). Neben herkömmlichen Quadraturmethoden, die allerdings nur dann praktikabel sind, wenn die Zahl der Integrationsvariablen nicht größer als 5 oder 6 ist (Spaethe, 1992, Melcher, 1999), kommt die Monte-Carlo-Methode in Betracht. Bei einer weit verbreiteten Methode geht man jedoch im Integranden und in der Grenzzustandsfunktion zu geeignet gewählten normalverteilten Zufallsgrößen über. So wird  $\vec{B}$  im Zuge des RACKWITZ-FIESSLER-Algorithmus mit Hilfe einer eindeutigen Transformation  $\vec{y} = T(\vec{b})$  auf eine Menge standard-normalverteilter Zufallsgrößen  $\vec{Y}$  abgebildet. Ist diese Transformation gewählt, liefert ein iteratives Optimierungsverfahren den Bemessungspunkt über den kürzesten Abstand der Tangentialhyperebene an die Grenzzustandsfunktion vom Ursprung. Daraus ergibt sich der Sicherheitsindex  $\beta$ . Aus ihm folgt schließlich  $P_f$ . Die Transformation beeinflusst den Wert von  $P_f$  (Ditlevsen, Madsen, 1996).

Außerdem treten bei dieser Vorgehensweise solche Verfahren wie die Deformationsmethode, die beim Bemessen von Stabtragwerken zum Standard des Konstruktiven Ingenieurbaus zählen, vordergründig nicht in Erscheinung. Dies entspricht nicht den Denkgewohnheiten des Berufsstandes und dürfte die Akzeptanz der Methode mindern.

In neuerer Zeit sind daher andere Zugänge zum Sicherheitsproblem aufgezeigt worden. In Umrissen wird eine zweite Hauptrichtung der probabilistischen Sicherheitstheorie von Stabtragwerken sichtbar. Sie geht vom System der Elastizitätsgleichungen aus, das in der Entwurfspraxis eine zentrale Rolle spielt. Die im System enthaltenen unbestimmten Geometrie-, Material- und Belastungsparameter werden als Zufallsgrößen behandelt. So entsteht ein zufälliges Gleichungssystem, bei dem sowohl die Koeffizientenmatrix als auch der Vektor der rechten Seiten zufällig sind. Zur Behandlung dieser Aufgabe bevorzugen MAREK u.a. (Marek, Gustar, Anagnos, 1996, Marek, Gustar, Bathon, 1998) die Monte-Carlo-Simulation. Sie generieren Realisierungen der zufälligen Bemessungsgrößen und ermitteln daraus eine Lösung des Systems. Eine große Zahl von Versuchen liefert eine aussagekräftige Statistik der Versagensfälle. Daraus läßt sich  $P_f$  ableiten. KLEIBER und HIEN behandeln das Problem auf der Basis einer Störungsrechnung mit TAYLOR-Entwicklungen (Kleiber, Hien, 1992). Ihre Methode liefert als wichtige statistische Kenngrößen die Momente erster und zweiter Ordnung und ermöglicht Sensitivitätsuntersuchungen. Eine dritte Vorgehensweise wird in diesem Beitrag beschrieben. Sie geht von der Deformationsmethode aus. Indem auf die von N. WIENER eingeführte Chaos-Zerlegung zurückgegriffen wird, folgt sie dem Weg der von GHANEM und SPANOS auf dem Gebiet der FEM beschrritten worden ist (Ghanem, Spanos, 1991) Die Methode liefert die sicherheitsrelevante Ausgangsgröße (z.B. die Spannung im kritischen Querschnitt) als Polynom GAUSSscher Zufallsgrößen in analytischer Darstellung. Daraus lassen sich die statistischen Momente (z.B. Erwartungswert und Dispersion) und die Versagenswahrscheinlichkeit  $P_f$  ableiten.

Für die Ermittlung von  $P_f$  bietet sich die Monte-Carlo-Simulation an. Ferner ist es möglich, den Einfluss von Parameterunschärfen auf die Tragwerkssicherheit analytisch zu untersuchen. Bei diesem Vorgehen bleibt die dem konstruktiv tätigen Ingenieur vertraute Vorgehensweise in den Grundzügen erhalten. Dies erleichtert den Zugang zur qualitativ neuen probabilistischen Denkweise.

Die Vorstellungen werden nachfolgend näher ausgeführt. Im Abschnitt 2 werden die klassische Deformationsmethode und moderne Ergebnisse der Stochastik zu einem neuartigen probabilistischen Analyseverfahren verbunden. Die Deformationsmethode spielt bei der deterministischen Modellierung von Stabtragwerken eine zentrale Rolle. Sie ist numerisch leicht handhabbar und liefert genaue Ergebnisse. Viele Berechnungsprogramme für Stabwerke beruhen auf dieser Grundlage. Aufgrund der nachgewiesenen Leistungsfähigkeit wird die Methode auch künftig ihren Stellenwert behalten. Die Deformationsmethode sollte daher auch bei der stochastischen Modellierung von Stabtragwerken eine angemessene Berücksichtigung finden. Ihr Einsatz erweitert den theoretischen Apparat zur Behandlung des Sicherheitsproblems von Stabtragwerken um eine neue Richtung. Sie ist für den Praktiker bedeutsam, wurde aber bisher noch nicht ausreichend untersucht.

Nachdem im Abschnitt 3 mögliche Ansätze für die zufälligen Bemessungsgrößen (Basisgrößen) angesprochen worden sind, wird im Abschnitt 4 ein zufälliges Gleichungssystem behandelt, das aus dem System der Elastizitätsgleichungen der Deformationsmethode hervorgeht. Zur Lösung dieses Systems werden die Deformationsgrößen als Ansatz in HERMITESchen Polynomen GAUSSscher Zufallsgrößen modelliert (sh. Gl. (24) unten). Zur Bestimmung der (nicht zufälligen) Ansatz-Koeffizienten wird aus dem zufälligen System ein deterministisches lineares Gleichungssystem hergeleitet. Maßgebend ist die Forderung, dass die Differenz zwischen der exakten Lösung und der Näherung orthogonal zu den Ansatzfunktionen ist. Im Abschnitt 5 wird am Beispiel eines Stabtragwerks aus Stahl untersucht, wie sich Unschärfen der Bemessungsparameter (speziell von  $E$ -Moduln und Belastungen) und eine andere Lage der kritischen Schnittstelle auf  $P_f$  auswirken. Im Laufe des Entwurfsprozesses ist es oftmals erforderlich, zu Stäben mit anderen Geometrieparametern überzugehen. Weil dies den Wert von  $P_f$  beeinflusst, wird die Frage behandelt, welche Veränderungen nichtzufälliger Geometrieparameter zulässig sind, wenn das Sicherheitsniveau des Systems erhalten bleiben soll. Schließlich wird im Abschnitt 6 die Genauigkeit der probabilistischen Analyse untersucht. Sie hängt vom jeweils benutzten Lösungsansatz ab. Durch den Vergleich mit Resultaten kommerzieller Bemessungsprogramme wird diskutiert, inwiefern der Ansatz das mechanische Verhalten des Systems unter variierenden Bemessungsparametern zutreffend widerspiegelt. Der Grenzzustand wird als Erreichen eines Grenzwertes an einem vorgegebenen Tragwerkspunkt definiert.

## 2 Einige Grundlagen aus Mechanik und Stochastik

Die bei Stabtragwerken übliche Bemessungspraxis geht vom System der *Elastizitätsgleichungen*

$$\underline{K} \cdot \bar{x} = \bar{q} \quad (3)$$

der Deformationsmethode aus. Ist  $n$  die geometrische Unbestimmtheit des Problems, so verknüpft (3) die  $n$ -dimensionalen Vektoren  $\bar{x}$  (Deformationsgrößen) und  $\bar{q}$  (Belastungsgrößen) über die Gesamt-Steifigkeitsmatrix  $\underline{K}$ . Durch Zufallseinflüsse sind gewöhnlich sowohl  $\bar{q}$  als auch  $\underline{K}$  mit Unsicherheiten belastet. Diese können bei  $\underline{K}$  von den Elastizitätsmoduln der Stäbe herrühren. Soll das System (3) auch als Grundlage der probabilistischen Sicherheitsanalyse dienen, muss es mit Hilfsmitteln der Stochastik verbunden werden. Die Ansatzpunkte dafür sind in der mathematischen Struktur von  $\underline{K}$  und  $\bar{q}$  zu finden.

Die Elemente  $k^{(ij)}$  von  $\underline{K}$  ergeben sich aus den Schnittgrößen der Stäbe. Und zwar ist jedes  $k^{(ij)}$  eine Linearkombination einzelner Stab-Beiträge. Besteht das Tragwerk aus  $n_s$  Stäben, so lässt sich  $\underline{K}$  als Summe

$$\underline{K} = \sum_{l=1}^{n_s} \underline{K}_l \quad (4)$$

darstellen. Jede  $(n, n)$ -Matrix  $\underline{K}_l$  mit den Elementen  $k_l^{(ij)}$  entspricht einem bestimmten Stab. Die für den Tragwerkswiderstand  $R$  maßgebenden Systemgrößen sind in  $\underline{K}$  enthalten. Insbesondere gehen der  $E$ -Modul bzw. die Biegesteifigkeit in jedes Element von  $\underline{K}_l$  als Faktoren ein. Wird eine solche Größe beim  $l$ -ten Stab allgemein mit  $B_l$  bezeichnet, so folgt

$$\underline{K}_l = B_l \underline{W}_l, \quad l = 1, 2, \dots, n_s. \quad (5)$$

Dabei ist  $\underline{W}_l$  eine Matrix vom Typ  $(n, n)$ , die sich aus der Deformationsmethode in der üblichen Weise ergibt. Nach dieser Umformung besitzt die Gesamt-Steifigkeitsbeziehung (3) die Gestalt

$$\sum_l B_l \underline{W}_l \bar{x} = \bar{q}. \quad (6)$$

Auf der rechten Seite ist eine ähnliche Umformung möglich. Der Vektor  $\bar{q}$  hängt linear von den auf das Tragwerk wirkenden Belastungen ab. Daher kann  $\bar{q}$  in Summanden aufgespalten werden. Sind insgesamt  $n_b$  Lastgrößen vorhanden, so gilt

$$\bar{q} = \sum_{k=1}^{n_b} \underline{P}_k. \quad (7)$$

Die Summanden  $\underline{P}_k$  sind  $(n,1)$ -Matrizen mit den Elementen  $p_k^{(i)}$ . Deren Berechnung erfolgt durch Integration über Funktionen gewisser Schnittkräfte und der Lastgrößen  $Q_k$ ,  $k = 1, \dots, n_b$ . Weil  $Q_k$  nach der Logik der Deformationsmethode in jedem  $p_k^{(i)}$  als Faktor erscheint, lässt sich ein  $\underline{P}_k$  gemäß

$$\underline{P}_k = Q_k \underline{S}_k, \quad k = 1, \dots, n_b \quad (8)$$

als Produkt von  $Q_k$  mit der  $(n,1)$ -Matrix  $\underline{S}_k$  darstellen. Letztere wird wieder in der gewohnten Weise nach der Deformationsmethode ermittelt. Insgesamt erhält die Grundgleichung (3) die Form

$$\sum_{l=1}^{n_s} B_l \underline{W}_l \bar{x} = \sum_{k=1}^{n_b} Q_k \underline{S}_k \quad (9)$$

(Biehounek und Grolik, 2001; Biehounek u.a., 2003a). Sie gestattet die Einführung von Zufallsgrößen. In diesem Beitrag sollen die zufällige Einflüsse auf das Tragwerk von den  $E$ -Moduln und den Belastungen ausgehen. Während also die  $B_l$  und  $Q_k$  Zufallsgrößen sind, handelt es sich bei  $\underline{W}_l$  bzw.  $\underline{S}_k$  um nichtzufällige  $(n_d, n_d)$ - bzw.  $(n_d, 1)$ -Matrizen. Trotz weitgehender Übereinstimmung der äußeren Form unterscheidet sich das zufällige System (9) prinzipiell von der deterministischen Gesamt-Steifigkeitsbeziehung (3). Weil Zufallsgrößen kein bestimmter Wert fest zugewiesen werden kann, enthält die Koeffizientenmatrix von (9) allgemeine Zahlen. Auch die Koeffizientendeterminante  $\det(\underline{K})$  ist zufällig. Ihre Werte streuen nach Maßgabe eines Verteilungsgesetzes um den Mittelwert und  $\det(\underline{K}) = 0$  kann nicht mehr sicher ausgeschlossen werden. Mit dem Zufallscharakter von Bemessungsparametern sind Schwierigkeiten verbunden. Sie müssen auf dem Weg zur probabilistischen Deformationsmethode überwunden werden. Dies geschieht im wesentlichen dadurch, daß die Zufallsgrößen in (9) durch endlichdimensionale Chaos-Polynome approximiert werden.

Bekanntlich bildet die Menge der Zufallsgrößen

$$X : \Omega \rightarrow R \quad (10)$$

mit endlichem Moment zweiter Ordnung

$$E X^2 = \int_{\Omega} |X(\omega)|^2 P(d\omega) < \infty, \quad (11)$$

einen separablen HILBERTraum  $L^2(\Omega, A, P)$  mit der Norm

$$\|X\|^2 = E X^2 \quad (12)$$

(Bellach u.a., 1978; Sirjaew, 1988). Basiselemente im Raum  $L^2$  sind die generalisierten HERMITESchen Polynome  $\Phi_\lambda$ . Sie werden aus den HERMITESchen Polynomen

$$H_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!} e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} \left( e^{-\frac{x^2}{2}} \right), \quad n \geq 1 \quad (13)$$

in einer Weise aufgebaut, die z.B. von NUALART oder MALLIAVIN genauer beschrieben wird (Nualart, 1995; Malliavin, 1995). Jede Zufallsgröße  $X \in L^2$  lässt sich in eindeutiger Weise entsprechend

$$X = \sum_{\lambda \in \Lambda} \alpha_\lambda \Phi_\lambda, \quad \alpha_\lambda \in R \quad (14)$$

nach generalisierten HERMITESchen Polynomen in orthogonalen GAUSSschen Zufallsgrößen  $\xi_i$  entwickeln. Die  $\xi_i$  besitzen die Parameter 0 und 1 (symbolisch:  $\xi_i \in N(0;1)$ ). Eine solche Darstellung heißt Chaos-Zerlegung. Allerdings ist sie in dieser Allgemeinheit nicht praktikabel. Immerhin handelt es sich bei den  $\Phi_\lambda$  um Elemente eines unendlich-dimensionalen Raumes. Eine auf die Belange der Anwendung ausgerichtete Darstellung kann daher darauf verzichten, die Konstruktion der  $\Phi_\lambda$  genauer zu beschreiben. Stattdessen interessiert ein Weg, der aus der Dimensionsschwierigkeit herausführt. Er ist in einer Grundeigenschaft von HILBERTräumen  $H$  vorgezeichnet, nach der sich einem  $h \in H$  immer seine Projektion  $h_0$  auf den Teilraum  $H_0$  eindeutig zuordnen

lässt. Daher ist auch im  $L^2$  der Übergang zu endlich-dimensionalen Teilräumen möglich, deren Basis aus handhabbaren endlich-dimensionale Zufallspolynomen besteht. Dementsprechend werden bei der praktischen Umsetzung Zufallsgrößen nicht nach Gl. (14) exakt dargestellt, sondern durch Projektionen auf endlich-dimensionale Teilräume von  $H$  approximiert. Die Darstellung der Zufallsgrößen erfolgt durch HERMITESche Polynome mit jeweils nur endlich vielen Zufallsgrößen  $\xi_i$ . Die Zahl der Zufallsgrößen gibt die Dimension dieser Polynome an. Bei den Polynomen

$$H_0 = 1, \quad H_1 = \xi_1, \quad H_2 = \xi_2^2 - 1, \quad H_3 = \xi_3^3 - 3\xi_3, \quad \xi_1, \xi_2, \xi_3 \in N(0;1) \quad (15)$$

handelt es sich um eindimensionale Zufallspolynome der Ordnungen  $p = 0, 1, 2, 3$ . Für  $p \geq 1$  besitzen sie den Erwartungswert Null. Die von GHANEM und SPANOS vorgezeichnete Anwendung von Chaos-Polynomen bei der stochastischen Modellierung mechanischer Systeme hat inzwischen vielfältige Anwendungen gefunden. Eine breit angelegte Darstellung und Bewertung der einschlägigen numerischen Methoden mit dem Schwerpunkt Stochastische Finite Elemente findet sich bei MATTHIES et al. (Matthies u.a., 1997).

### 3 Ansätze für die Basisgrößen

Reale Tragwerke werden durch Lasten beansprucht, die mehrfach wirken und zeitlichen Veränderungen unterliegen. Um damit verbundene Komplikationen zu vermeiden, werden bei zeitabhängigen Lasten nur die Spitzenwerte betrachtet. So wird das Sicherheitsproblem auf eine zeitunabhängige Grundaufgabe zurückgeführt (Spaethe, 1992; Ditlevsen und Madsen, 1996). Daher interessieren Extremwertverteilungen für Maxima. Es handelt sich um asymmetrische Verteilungen mit positiver Schiefe. Ihre Dichte besitzt einen nach links beschränkten Definitionsbereich und läuft nach rechts flach in einen tail aus. Dementsprechend werden in den Beispielen des Abschnitts 5 die Belastungsgrößen durch eindimensionale Zufallspolynome

$$Q_k = q_{0k} + q_{1k} [a_{1k}\gamma_k + a_{2k}(\gamma_k^2 - 1) + a_{3k}(\gamma_k^3 - 3\gamma_k)], \quad \gamma_k \in N(0;1), \quad q_{1k} = v_q \cdot q_{0k} \quad (16)$$

dritter Ordnung approximiert (Biehounek u.a., 2003a, 2003b). Dabei bedeutet  $v_q$  den Variationskoeffizienten von  $Q_k$ . Die Zufallsgrößen  $Q_k$ ,  $k = 1, \dots, n_b$  werden als unabhängig vorausgesetzt. Dann sind sie gemäß  $\text{cov}(Q_k, Q_j) = \delta_{ki}$  unkorreliert. Die Belastungsgrößen nach (16) entsprechen bei geeigneter Wahl der Parameter dem geforderten Verteilungstyp. Allerdings ist die Beschränktheit nach unten nur näherungsweise verwirklicht. Weil die  $Q_k$  nur in den rechten Seiten des Systems (9) auftreten, kann dieser Mangel in Kauf genommen werden. Wegen  $E Q_k = q_{0k}$  stellt (16) eine Zerlegung der jeweiligen Belastungsgröße in den Erwartungswert  $q_{0k}$  und eine überlagerte Zufallsabweichung dar. Der Faktor  $q_{1k}$  quantifiziert ihren Einfluss. Die Koeffizienten  $a_{1k}$ ,  $a_{2k}$ ,  $a_{3k}$  werden so bestimmt, dass die Verteilung von  $Q_k$  einer vorgegebenen Verteilung nahe kommt. Die dafür maßgebenden statistischen Momente liefern ein nichtlineares Gleichungssystem zur Bestimmung der Koeffizienten. In diesem Beitrag wird die dreiparametrische Gamma-Verteilung (PEARSON-Verteilung) benutzt. Sie lässt sich leicht an empirische Daten anpassen. Es können aber auch andere Verteilungsfunktionen verwendet werden. Gegebenenfalls sind dann in (16) HERMITESche Polynome höherer Ordnung zu berücksichtigen. Nach den vorliegenden Erfahrungen, wirken sich allerdings Glieder höherer Ordnung kaum noch auf  $P_f$  aus.

Mit größerer Sorgfalt müssen die  $E$ -Module modelliert werden. Geht man von Vorstellungen über die Variabilität physikalischer Größen aus, die dem zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitstheorie zugrunde liegen, kommt der Ansatz

$$E_i = E_0(1 + v_e \varepsilon_i), \quad \varepsilon_i \in N(0;1) \quad (17)$$

infrage. Danach ist  $E_i$  eine GAUSSSche Zufallsgröße mit dem Erwartungswert  $E_0$  und dem Variationskoeffizienten  $v_e$ . Gegen diesen praktisch leicht handhabbaren Ansatz sprechen theoretische Gründe. Sie hängen damit zusammen, dass die  $E$ -Moduln in der Koeffizientenmatrix  $\underline{K}$  des Systems (9) auftreten und daher die Determinante  $\det(\underline{K})$  zur Zufallsgröße wird. Als GAUSSSche Zufallsgrößen nehmen die  $E$ -Moduln jeden Wert der reellen Achse als Realisation an. Unter diesen Umständen lässt sich die zentrale Forderung  $\det(\underline{K}) \neq 0$  nicht

mehr gewährleisten. Es ist streng genommen erforderlich, die Werte der  $E$ -Moduln auf ein abgeschlossenes Intervall zu beschränken. Dies gelingt mit dem Ansatz

$$E = E_0(1 + w_e Y), \quad Y = \arctan a\varepsilon, \quad \varepsilon \in N(0;1). \quad (18)$$

$E$  variiert dann im Intervall  $\left[E_0(1 - \frac{1}{2}\pi w_e), E_0(1 + \frac{1}{2}\pi w_e)\right]$ . Die Zufallsgröße  $Y$  besitzt die Dichtefunktion

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}a} (1 + \tan^2 y) \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\tan^2 y}{a^2}\right), \quad -\frac{\pi}{2} < y < +\frac{\pi}{2}. \quad (19)$$

Ihre Gestalt kann über den Parameter  $a > 0$  beeinflusst werden. Für große  $a$  ist  $f_Y(y)$  zweigipflig. Nimmt  $a$  ab, so ergibt sich etwa ab  $a = 0.7$  eine eingipflige Dichtefunktion. Ihr Verlauf erinnert für weiter fallendes  $a$  immer mehr an die Normalverteilung. Der Parameter  $a$  wird geeignet gewählt. Dagegen ergibt sich  $w_e$  aus dem vorgegebenen Variationskoeffizienten  $v_e$  des  $E$ -Modul. Bezeichnet  $\sigma_Y(a)$  die Standardabweichung der Zufallsgröße  $Y$ , so gilt

$$w_e \sigma_Y(a) = v_e. \quad (20)$$

Die Berechnung von  $\sigma_Y(a)$  erfordert die numerische Auswertung des entsprechenden Integrals. Zur ersten Orientierung dient die Näherungsformel

$$\sigma_Y(a) \approx a - 0.325 \cdot a^2. \quad (21)$$

#### 4 Das zufällige Gleichungssystem und seine Behandlung

Die Ansätze (16) bzw. (18) für die Belastungsgrößen bzw. die  $E$ -Moduln werden anstelle der Zufallsgrößen  $B_l$ ,  $Q_k$  in das zufällige System (9) eingetragen. Die ihm dadurch eingeprägte Unbestimmtheit überträgt sich auf den Vektor  $\vec{x}$  der Deformationsgrößen. Er wird zum Zufallsvektor. Weil dafür die Basisvariablen  $E_i$  und  $Q_k$  verantwortlich sind, liegt es nahe,  $\vec{x}$  durch ein endlichdimensionales Chaos-Polynom  $\vec{V}$  in den Zufallsgrößen  $\varepsilon_i \in N(0;1)$  (Unsicherheit der  $E$ -Module) bzw.  $\gamma_j \in N(0;1)$  (Unsicherheit der Belastungsgrößen) zu approximieren. Erfahrungsgemäß reicht es beim Lösungsvektor aus, bei den  $\varepsilon$ -Termen die Transformation nach Gl. (18) unberücksichtigt zu lassen und nur Glieder bis zur zweiten Ordnung in Rechnung zu setzen. Mit den Polynomen

$$H_{1,i}^{(\varepsilon)} = H_1(\varepsilon_i) = \varepsilon_i, \quad H_{2,i}^{(\varepsilon)} = H_2(\varepsilon_i) = \varepsilon_i^2 - 1, \quad i = 1, \dots, n_s \quad (22)$$

bzw.

$$H_{1,j}^{(\gamma)} = \gamma_j, \quad H_{2,j}^{(\gamma)} = \gamma_j^2 - 1, \quad H_{3,j}^{(\gamma)} = \gamma_j^3 - 3\gamma_j, \quad j = 1, \dots, n_b, \quad (23)$$

entsteht der Ansatz

$$\vec{x} \approx \vec{V} = \vec{V}^{(0)} + \sum_{i=1}^{n_s} \vec{V}_i^{(1)} H_{1,i}^{(\varepsilon)} + \sum_{i=1}^{n_s} \vec{V}_i^{(2)} H_{2,i}^{(\varepsilon)} + \sum_{j=1}^{n_b} V_{q,j}^{(1)} H_{1,j}^{(\gamma)} + \sum_{j=1}^{n_b} V_{q,j}^{(2)} H_{2,j}^{(\gamma)} + \sum_{j=1}^{n_b} V_{q,j}^{(3)} H_{3,j}^{(\gamma)} \quad (24)$$

(Biehounek u.a., 2003a,b). Hier bedeuten  $n_s$  die Zahl der Stäbe des Tragwerks und  $n_b$  die Zahl der Belastungsgrößen. Wegen  $E V = V^{(0)}$  stellt  $\vec{V}^{(0)}$  den Vektor der Deformationsgrößen für ein Tragwerk ohne Zufallseinflüsse dar. Die Darstellung kann bei Bedarf durch Glieder höherer Ordnung oder durch gemischte Glieder erweitert werden.

Wird schließlich noch (24) in (9) eingesetzt, entsteht eine neue Darstellung des zufälligen Systems. Weil die in ihm enthaltenen Zufallsgrößen durch GAUSSsche Zufallsgrößen ausgedrückt werden, sind sie für die analytische Behandlung faßbar. Die Gleichung, die wegen ihres Umfangs hier nicht angegeben werden soll, enthält in Gestalt der nicht zufälligen Koeffizienten  $\vec{V}^{(0)}$ ,  $\vec{V}_i^{(1)}$ ,  $\vec{V}_i^{(2)}$  usw.

$$n_M = 1 + 2n_s + 3n_b \quad (25)$$

unbekannte  $n_d$ -dimensionale Vektoren. Insgesamt sind in der Rechnung

$$n_S = n_d \cdot n_M \quad (26)$$

skalare Unbekannte enthalten. Um sie zu bestimmen wird der Defekt

$$R = \underline{K} \cdot \vec{V} - \vec{Q} \quad (27)$$

betrachtet. Er entsteht beim Einsetzen der Näherung  $\vec{V}$  in (9). Gemäß  $R(\vec{V}^{(0)}, \vec{V}_i^{(1)}, \vec{V}_i^{(2)}, \vec{V}_{q,j}^{(1)}, \vec{V}_{q,j}^{(2)}, \vec{V}_{q,j}^{(3)})$  hängt  $R$  von den Parametern des Ansatzes (24) ab. Diese sind so zu wählen, daß  $R$  möglichst klein wird. Wie üblich wird dazu entsprechend

$$\int_{\Omega} R \cdot H_k P(d\omega) = E(R \cdot H_k) = 0 \quad (28)$$

die Orthogonalität von  $R$  zu den Polynomen  $H_k$  in (24) gefordert. Der mittlere quadratische Fehler der Approximation ist dann minimal. Dieses Vorgehen macht das Aufstellen der Bestimmungsgleichungen besonders einfach. Für die Erwartungswerte der Potenzen GAUSSScher Zufallsgrößen steht eine Rekursionsgleichung zur Verfügung (Ghanem und Spanos, 1991). So entsteht das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \underline{W}^{(0)} \vec{V}^{(0)} + w_e k_1 \sum_{k=1}^{n_s} \underline{W}_k \vec{V}_k^{(1)} &= \sum_{l=1}^{n_b} \underline{S}_l q_{0l} \\ w_e k_1 \underline{W}_l \vec{V}^{(0)} + \underline{W}^{(0)} \vec{V}_l^{(1)} + w_e k_2 \underline{W}_l \vec{V}_l^{(2)} &= 0 \\ w_e k_2 \underline{W}_l \vec{V}_l^{(1)} + 2\underline{W}^{(0)} \vec{V}_l^{(2)} &= 0, \quad (29) \\ \underline{W}^{(0)} \vec{V}_{qm}^{(1)} &= q_{1m} a_{1m} \underline{S}_m \\ \underline{W}^{(0)} \vec{V}_{qm}^{(2)} &= q_{1m} a_{2m} \underline{S}_m \\ \underline{W}^{(0)} \vec{V}_{qm}^{(3)} &= q_{1m} a_{3m} \underline{S}_m \end{aligned}$$

$l = 1, \dots, n_s, \quad m = 1, \dots, n_b.$

(Biehounek und Grolik, 2001, Biehounek u.a., 2003a,b,c). Es ist nicht zufällig und heißt deterministisches Ersatzsystem. Die Bedeutung der Matrizen  $\underline{W}_k$  und  $\underline{S}_m$  geht aus den Gleichungen (5), (8) hervor. Ferner ist

$$\underline{W}^{(0)} = \sum_{i=1}^{n_s} \underline{W}_i, \quad k_1 = E(Y_i \cdot \varepsilon_i), \quad k_2 = E[Y_i \cdot \varepsilon_i \cdot (\varepsilon_i^2 - 1)]. \quad (30)$$

Die Erwartungswerte  $k_1$ ,  $k_2$  müssen numerisch berechnet werden. Die Lösung des Systems (29) liefert die Koeffizienten der Entwicklung (24). Daraus folgt eine Näherung für  $\vec{x}$ , aus der sich schließlich die sicherheitsrelevante Ausgangsgröße  $y$  ergibt. Deren technische Bedeutung hängt vom Versagenskriterium ab. Es wird durch Grenzen für Dehnungen, Spannungen, Verschiebungen usw. definiert und trennt akzeptierte Zustände von denen, die als Versagen eingestuft werden. In diesem Beitrag stellt  $y$  die Spannung  $\sigma_e$  im höchstbelasteten Querschnitt des statischen Systems dar. Die Grenzzustandsgleichung ist durch Gl. (31) gegeben (s. unten). Das deterministische Ersatzsystem (29) ist ein zentraler Bestandteil des vorgestellten Verfahrens. Seine Koeffizientenmatrix  $\underline{K}_{de}$  ist schwach besetzt und symmetrisch. Die Struktur von  $\underline{K}_{de}$  als Hypermatrix wird vor allem vom jeweils benutzten Ansatz  $\vec{V}$  (z.B. (24)) geprägt. Von ihrem Typ abgesehen, der auch von  $n_d$  abhängt, spiegelt  $\underline{K}_{de}$  die statische Struktur des Tragwerks nicht wider. Beispiele zur analytischen Darstellung der Spannung folgen im Abschnitt 6.

## 5 Einflüsse auf die Versagenswahrscheinlichkeit

Die Methode wird im folgenden am stählernen Stockwerksrahmen nach Bild 1 erläutert. Dabei interessiert, wie Veränderungen geometrischer Bemessungsparameter, unsichere  $E$ -Moduln und die Lage des kritischen Querschnitts auf die Sicherheit des Tragwerks wirken. Als Grenzzustandsfunktion wird

$$g = \sigma_s - \sigma_e, \quad (31)$$

benutzt. Hier bedeutet  $y \equiv \sigma_e$  die Spannung im kritischen Querschnitt und  $\sigma_s$  die Streckgrenze. Auch  $\sigma_s$  wird als Zufallsgröße behandelt.

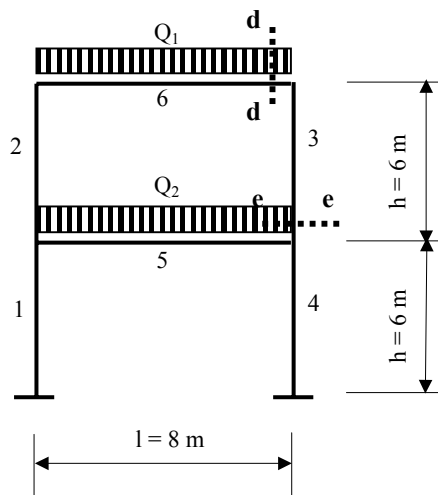


Bild 1. Rahmen – Grundvariante  
alle Stäbe: IPE-Profile

Die Spannung  $\sigma_e$  wird unter Nutzung plastischer Querschnittsreserven ermittelt. Eine Monte-Carlo-Simulation liefert die Versagenswahrscheinlichkeit  $P_f$ . Zur Varianzreduktion dient die importance-sampling-Technik in Verbindung mit einem KALMAN-Filter (Biehounek u.a., 2003). Darüber hinaus wird diskutiert, inwiefern die  $E$ -Moduln in der Koeffizientenmatrix statt nach Gl. (18) durch die leichter handhabbare Gl. (17) dargestellt werden können. Die übliche Behandlung zeitabhängiger zufälliger Lasten ist selbstverständlich nur bei einer Lastgröße sinnvoll. Bei zwei oder mehr Lasten tritt das Problem der Lastkombination auf. Es wird in der Entwurfspraxis mit Kombinationsregeln erfasst, bei denen die einzelnen Lastanteile durch Lastkombinationsfaktoren abgemindert werden können. Diese ins Detail gehenden Rechenvorschriften sollen nachfolgend ausgeklammert werden.

Beim Entwurf eines Tragwerks streben Ingenieure nach bestmöglicher Anpassung an den vorgesehenen Verwendungszweck. Sie vergleichen dazu Varianten. Als Kriterien dienen Sicherheit und Wirtschaftlichkeit. Weil  $P_f$  sehr empfindlich auf Veränderungen der Bemessungsparameter reagiert (Spaethe, 1992; Biehounek u.a., 2003; Rackwitz, 2002), ermöglicht sie eine tiefer gehende Analyse. Selbst geringfügige Abwandlungen, die nicht das statische System selbst, sondern nur gewisse geometrische Kennwerte betreffen, lassen sich quantitativ beurteilen. Werden Tragwerksvarianten also vom Standpunkt der probabilistischen Zuverlässigkeitstheorie beurteilt, so handelt es sich praktisch um neue Tragwerke. Sie sind äußerlich ähnlich, unterscheiden sich aber in ihrer Sicherheit. In dieser Situation interessieren Aussagen darüber, welche Änderungen der Bemessungsgrößen zulässig sind, wenn ein vorgegebenes Sicherheitsniveau eingehalten werden soll. Auch Einflüsse, die von unsicheren  $E$ -Moduln sowie von der Lage des kritischen Querschnitts ausgehen, sind von Interesse. Sie können unter bestimmten Umständen erheblich sein.

Bei der Untersuchung werden je nach Lage des kritischen Schnitts und der variierenden Bemessungsgröße mehrere Fälle unterschieden. In den Fällen 1 und 2 wird die *Stiellänge* abgeändert. Der kritische Querschnitt befindet sich im Fall 1 im oberen Rahmenstiel (Schnittstelle  $e-e$ ) und im Fall 2 im oberen Riegel (Schnittstelle  $d-d$ ). In den Fällen 3 und 4 dient der gleiche Rahmen wie in den Fällen 1 bzw. 2 als Grundvariante. Untersucht wird jedoch, wie sich die Veränderung der *Riegellänge* auswirkt. Dabei bezieht sich der Fall 3 auf die Schnittstelle  $e-e$  und der Fall 4 auf die Schnittstelle  $d-d$ .



Für die Belastung wird jeweils ein Polynom nach Gl. (16) benutzt. Dabei werden die Koeffizienten  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  und der Erwartungswert  $q_0$  so festgelegt, daß die Verteilung einer PEARSON-Verteilung mit dem Variationskoeffizienten  $v_q = 0.23$  genügt und das 98-Prozent-Quantil  $q_{0,98}$  der Belastung mit dem charakteristischen Wert  $q_k = q_d / \gamma$  übereinstimmt. Nach DIN 18800 wird  $\gamma = 1.5$  gesetzt. Der Variationskoeffizient  $v_e$  der  $E$ -Moduln liegt im Intervall  $[0;0.05]$ . Sämtliche Zufallsgrößen werden als unabhängig angenommen.

Im *Fall 1* ergibt sich für die Grundvariante des Rahmens unter diesen Voraussetzungen  $P_f = 0.97 \cdot 10^{-7}$ , wenn die  $E$ -Moduln als deterministische Größen aufgefaßt werden (Variationskoeffizient  $v_e = 0.0$ ). Für  $v_e = 0.05$  folgt dagegen  $P_f = 1.37 \cdot 10^{-7}$ . Werden nun die Abmessungen und Querschnittswerte der Stäbe willkürlich verändert, resultiert faktisch ein neuer Rahmen. Soll jedoch der Wert von  $P_f$  erhalten bleiben, müssen bei der Veränderung der Stiellängen gleichzeitig die Querschnittswerte in einer ganz bestimmten Weise angepaßt werden. Wie das zu geschehen hat, kann aus der mathematischen Struktur der Elastizitätsgleichung abgelesen werden. Demnach sind zwei Rahmen der betrachteten Art bezüglich ihrer Steifigkeitsverhältnisse ähnlich, wenn die entsprechenden Stiele im Verhältnis von Länge und Trägheitsmoment übereinstimmen. Diese Kennzahlen sind auch für  $P_f$  maßgebend. Zwei Tragwerksvarianten, die in dieser Hinsicht ähnlich sind, besitzen praktisch gleiche  $P_f$ -Werte (Tabelle 1).

	$h = 6.0 \text{ m}$	$h = 6.25 \text{ m}$	$h = 6.5 \text{ m}$
	$P_f \cdot 10^6$		
$v_e = 0.00$	<b>0.062</b>	<b>0.057</b>	<b>0.076</b>
$v_e = 0.01$	<b>0.069</b>	<b>0.065</b>	<b>0.083</b>
$v_e = 0.03$	<b>0.080</b>	<b>0.074</b>	<b>0.104</b>
$v_e = 0.05$	<b>0.101</b>	<b>0.094</b>	<b>0.125</b>

Tabelle 1. Versagenswahrscheinlichkeit  $P_f$  in Abhängigkeit von der Stiellänge  $h$  (Riege­länge  $b = 8.0 \text{ m}$ , kritischer Querschnitt  $e-e$ )

Es versteht sich von selbst, dass auch die Streckenlasten einen erheblichen Einfluss auf  $P_f$  besitzen. Ist Ähnlichkeit im beschriebenen Sinne hergestellt, müssen auch sie so lange verändert werden, bis sich am kritischen Schnitt  $e-e$  die Bemessungsspannung für Baustahl St 37 von  $\sigma_{Rd} = 218,2 \text{ N/mm}^2$  einstellt.

Beim Vergleich der Versagenswahrscheinlichkeiten für  $v_e = 0$  und  $v_e = 0.05$  zeigt sich ein großer Einfluss von Unschärfen der  $E$ -Moduln. Dieser Effekt lässt sich aus dem mechanischen Sachverhalt erklären. Das im Versagensquerschnitt  $e-e$  für die Spannung maßgebende Bemessungsmoment  $M$  wird stark von den Steifigkeitsgrößen in den Stielen (Stäbe 3-4, Bild 1) beeinflusst. Die Momente in den Riegeln wirken dagegen weniger direkt. Hierdurch ist der von den  $E$ -Moduln unmittelbar beeinflusste relative Spannungsanteil recht hoch, so dass sich die Gesamtspannung merklich verändert. Dies wird ebenfalls sichtbar an den Koeffizienten, mit denen die Terme in den Zufallsgrößen  $\varepsilon_i$  in der Gesamtspannung  $\sigma_e$  auftreten. Sie besitzt beim Grundrahmen für  $v_e = 0.05$ ,  $v_q = 0.23$  die Gestalt

$$\begin{aligned}
 \sigma_e = & 91.84 - 0.2005 \cdot H_1(\varepsilon_1) + 0.9964 \cdot H_1(\varepsilon_2) - 0.2180 \cdot H_1(\varepsilon_3) + 1.057 \cdot H_1(\varepsilon_4) - 1.1600 \cdot H_1(\varepsilon_5) + \\
 & + 6.9459 \cdot H_1(\gamma_1) + 1.1651 \cdot H_2(\gamma_1) + 0.0471 \cdot H_3(\gamma_1) + 13.6065 \cdot H_1(\gamma_2) + 2.2824 \cdot H_2(\gamma_2) + \\
 & + 0.0923 \cdot H_3(\gamma_2) + H_1(\varepsilon_4) \cdot (0.6714 \cdot H_1(\gamma_2) + 0.1126 \cdot H_2(\gamma_2) + 0.0046 \cdot H_3(\gamma_2)) + \\
 & + H_1(\varepsilon_4) \cdot (0.1963 \cdot H_1(\gamma_1) + 0.0336 \cdot H_2(\gamma_1)) + 0.0087 \cdot H_1(\varepsilon_2) \cdot H_1(\gamma_2) .
 \end{aligned} \tag{32}$$

Der Einfachheit halber bleiben Terme unberücksichtigt, die weniger als ein Promille zum Resultat beitragen. In (32) wird  $\sigma_e$  in  $\text{N/mm}^2$  gemessen. Es gilt  $E \sigma_e = 91.84 \text{ N/mm}^2$ ,  $D^2 \sigma_e = E (\sigma_e - E \sigma_e)^2 = 251.65 \text{ N}^2 / \text{mm}^4$ . Im *Fall 2* wird wiederum ein Rahmen mit veränderten Stiellängen untersucht. Allerdings liegt die kritische Schnittstelle nicht mehr im Stiel, sondern im oberen Riegel des Rahmens. Hierfür muss sein Querschnitt verringert werden. Mit dieser willkürlichen Änderungen entsteht ein neuer Rahmen, der mit dem *Fall 1* nicht mehr direkt vergleichbar ist. In der Grundvariante zu *Fall 2* resultiert deshalb eine völlig andere Versagens-

wahrscheinlichkeit von  $P_f \approx 0.30 \cdot 10^{-5}$  für  $v_e = 0$ . Wird die Stiellänge bei gleichzeitiger Anpassung der Querschnittswerte so geändert, daß die auseinander hervorgehenden Rahmenvarianten im oben erklärten Sinn ähnlich sind, ergeben sich analog zum Fall 1 für alle 5 Varianten wieder praktisch gleiche  $P_f$ -Werte (Tabelle 2).

	$h = 5.0$ m	$h = 5.5$ m	$h = 6.0$ m	$h = 6.5$ m	$h = 7.0$ m
	$P_f \cdot 10^6$				
$v_e = 0$	<b>2.74</b>	<b>2.67</b>	<b>2.76</b>	<b>2.76</b>	<b>2.86</b>
$v_e = 0.01$	<b>2.74</b>	<b>2.67</b>	<b>2.76</b>	<b>2.76</b>	<b>2.86</b>
$v_e = 0.03$	<b>2.79</b>	<b>2.70</b>	<b>2.79</b>	<b>2.79</b>	<b>2.89</b>
$v_e = 0.05$	<b>2.82</b>	<b>2.75</b>	<b>2.84</b>	<b>2.84</b>	<b>2.95</b>

Tabelle 2. Versagenswahrscheinlichkeit  $P_f$  in Abhängigkeit von der Stiellänge  $h$  (Riege­länge  $b = 8.0$  m, kritischer Querschnitt  $d-d$ )

Im Unterschied zu Fall 1 haben jedoch zufällige Unsicherheiten des  $E$ -Moduls nahezu keinen Einfluss. Verantwortlich dafür ist die veränderte Lage der kritischen Schnittstelle. Im Riegel wirkt die unsichere Streckenlast  $Q_1$  direkt auf das Bemessungsmoment im Schnitt  $d-d$ . Die Längskraft  $N$  ist vernachlässigbar klein. Deswegen haben an dieser Schnittstelle die relativen Spannungsanteile infolge der  $E$ -Modul-­Unsicherheiten einen sehr geringen Wert. Das erklärt ihren geringen Einfluss auf die Gesamtspannung  $\sigma_d$ . Auch hier ist dieser Effekt an den Koeffizienten der Zufallsgrößen  $\varepsilon_i$  in der Gleichung

$$\begin{aligned} \sigma_d = & 91.82 + 0.3288 \cdot H_1(\varepsilon_2) + 0.4519 \cdot H_1(\varepsilon_4) - 0.6777 \cdot H_1(\varepsilon_6) + \\ & + 18.3056 \cdot H_1(\gamma_1) + 3.0707 \cdot H_2(\gamma_1) + 0.1241 \cdot H_3(\gamma_1) + 2.1953 \cdot H_1(\gamma_2) + 0.3759 \cdot H_2(\gamma_2) + \\ & - H_1(\varepsilon_6) \cdot (0.2909 \cdot H_1(\gamma_1) + 0.0488 \cdot H_2(\gamma_1) + 0.00197 \cdot H_3(\gamma_1)) \end{aligned} \quad (33)$$

der Gesamtspannung ablesbar. Sie bezieht sich auf den Grundrahmen, ist wieder etwas vereinfacht und gilt für  $v_e = 0.05$ ,  $v_q = 0.23$ .

Im *Fall 3* wird der Einfluss der Riege­längen untersucht. Als Grundvariante dient der gleiche Rahmen wie im Fall 1. Die kritische Schnittstelle  $e-e$  liegt im oberen Stiel. Insgesamt werden 5 Rahmenvarianten verglichen (Tabelle 3). Sie sind zur Grundvariante hinsichtlich Geometrie- und Steifigkeitsverhältnissen ähnlich. Die Rahmen sind also nicht willkürlich aus dem Grundrahmen heraus verändert und deshalb vergleichbar.

	$b = 7.0$ m	$b = 7.5$ m	$b = 8.0$ m	$b = 8.5$ m	$b = 9.0$ m
	$P_f \cdot 10^6$				
$v_e = 0.00$	<b>0.048</b>	<b>0.056</b>	<b>0.062</b>	<b>0.065</b>	<b>0.079</b>
$v_e = 0.01$	<b>0.053</b>	<b>0.067</b>	<b>0.069</b>	<b>0.073</b>	<b>0.087</b>
$v_e = 0.03$	<b>0.061</b>	<b>0.076</b>	<b>0.080</b>	<b>0.088</b>	<b>0.098</b>
$v_e = 0.05$	<b>0.080</b>	<b>0.092</b>	<b>0.101</b>	<b>0.116</b>	<b>0.132</b>

Tabelle 3. Versagenswahrscheinlichkeit  $P_f$  in Abhängigkeit von der Riege­länge  $b$  (Stiellänge  $h = 6.0$  m, kritischer Querschnitt  $e-e$ )

Allerdings wachsen die  $P_f$ -Werte mit der Riege­länge leicht an. Dies kann damit erklärt werden, dass die Riegel­momente bei Veränderung der Riege­länge nicht linear, sondern nach einer quadratischen Abhängigkeit variieren. Weil das Biegemoment im kritischen Schnitt  $e-e$  aber nur indirekt vom Riegel­moment beeinflusst

wird, wirkt sich dieser Umstand nur geringfügig aus. Ihm wurde beim Auslegen der Rahmenvarianten noch nicht Rechnung getragen. Die Trägheitsmomente wurden nur linear mit der Riegel­länge verändert. Um vollständig ähnliche Rahmenvarianten zu erhalten, müsste ein quadratischer Ansatz benutzt werden. Die Einflüsse unsicherer  $E$ -Moduln sind bei allen Rahmenvarianten praktisch gleich groß. Da die kritische Schnittstelle  $e-e$  im wieder im oberen Rahmenstiel liegt, sind diese Ergebnisse mit den Resultaten im Fall 1 direkt vergleichbar. Auch im Fall 4 wird untersucht, wie sich eine Riegelverlängerung auf  $P_f$  auswirkt. Allerdings liegt jetzt die kritische Schnittstelle  $d-d$  wieder im oberen Riegel. Die Grundvariante des Tragwerks entspricht dem Fall 2. Aus

	$b = 7.0 \text{ m}$	$b = 7.5 \text{ m}$	$b = 8.0 \text{ m}$	$b = 8.5 \text{ m}$	$b = 9.0 \text{ m}$
	$P_f \cdot 10^6$				
$v_e = 0.00$	<b>2.86</b>	<b>3.09</b>	<b>2.76</b>	<b>2.95</b>	<b>3.00</b>
$v_e = 0.01$	<b>2.87</b>	<b>3.10</b>	<b>2.76</b>	<b>2.95</b>	<b>3.00</b>
$v_e = 0.03$	<b>2.89</b>	<b>3.12</b>	<b>2.79</b>	<b>2.98</b>	<b>3.03</b>
$v_e = 0.05$	<b>2.95</b>	<b>3.18</b>	<b>2.84</b>	<b>3.04</b>	<b>3.09</b>

Tabelle 4. Versagenswahrscheinlichkeit  $P_f$  in Abhängigkeit von der Riegel­länge  $b$  (Stiellänge  $h = 6.0 \text{ m}$ , kritischer Querschnitt  $d-d$ )

ihr gehen die Varianten durch Veränderung der Riegel­längen bei linearer Anpassung der Trägheitsmomente hervor. Die in Tabelle 4 niedergelegten Ergebnisse zeigen eine leichte Zunahme der  $P_f$ -Werte mit wachsender Riegel­länge. Die Ursache dieser Tendenz ist die gleiche wie im Fall 3. Zu beachten ist, dass die Varianten zu Fall 4 willkürlich geänderte Rahmen, also andere Rahmen sind. Der Einfluss von  $E$ -Modul-­Unsicherheiten ist unbedeutend. Hier treffen die Erläuterungen zu, die beim Fall 2 gegeben wurden.

In allen untersuchten Fällen ist es zulässig, die  $E$ -Moduln als GAUSSsche Zufallsgrößen nach Gl. (17) zu modellieren. Bei den hier betrachteten Variationskoeffizienten  $v_e \leq 0.05$  hat die Verwendung von Gl. (18) keinen Einfluss auf die Versagenswahrscheinlichkeit.

## 6 Zur Plausibilität des Lösungsansatzes

Die entwickelte Methode liefert die sicherheitsrelevanten Normalspannungen an einem bestimmten Punkt des Tragwerks. Dabei wird der Ansatz (24) für die Lösung des zufälligen Systems (9) der Elastizitätsgleichungen benutzt. Folglich hängt die Normalspannung von diesem Ansatz ab. Nun wird die Versagenswahrscheinlichkeit aus der Spannung bestimmt. Ihr Wert wird daher mittelbar von (24) beeinflusst. Zu fragen ist, inwiefern ein in gewissen Grenzen willkürlich wählbarer Lösungsansatz geeignet ist, die Tragwerkssicherheit zu kennzeichnen. Dazu wurden Untersuchungen in drei Richtungen angestellt.

Zum ersten wurde die Versagenswahrscheinlichkeit aus den Elastizitätsgleichungen (3) der klassischen Deformationsmethode durch Monte-Carlo-Simulation direkt bestimmt. Es wurden Realisationen der zufälligen Bemessungsgrößen erzeugt und in das Gleichungssystem eingesetzt. Jeder Monte-Carlo-Zyklus lieferte eine Realisation der Spannung. An Hand der Grenzzustandsfunktion (31) wurde entschieden, ob ein Versagensfall vorliegt. Die so entstehende Statistik liefert einen Schätzwert von  $P_f$ . Zum zweiten wurde das System (3) allgemein behandelt. D.h. es wurde eine Lösung ermittelt, ohne feste Zahlenwerte für die Basisgrößen einzusetzen. Das lieferte die Lösung als analytische Darstellung in den relevanten Parametern ( $E$ -Moduln und Belastungsgrößen). Diese Funktionen wurden in TAYLORreihen entwickelt. Beim Vergleich mit der auf dem Ansatz (24) basierenden Lösungs-Darstellung wurde geprüft, inwieweit die führenden Terme der beiden Entwicklungen übereinstimmen. Ebenso wie im ersten Test ergaben sich auch dabei keine Hinweise, die gegen die Verwendung von Gl. (24) sprechen. Die Entwicklungskoeffizienten stimmten gut überein. Dies gilt besonders für die Koeffizienten der Belastungsunscharfen. Da diese einen dominierenden Einfluss auf die Versagenswahrscheinlichkeit besitzen, fällt dieser Befund besonders ins Gewicht.

Schließlich wurde drittens geprüft, ob die auf dem Ansatz (24) beruhende Spannungsgleichung zu mechanisch plausiblen Schlussfolgerungen führt. Dazu wurde mit Hilfe dieser Gleichung ermittelt, wie sich veränderte Werte der Basisgrößen auswirken. Diese tendenziellen Aussagen wurden mit denen verglichen, die sich aus einem

kommerziellen Stabwerksprogramm ergeben. Von besonderem Interesse war dabei der Einfluss der  $E$ -Moduln. Die Spannungsgleichung kann entweder so aufgestellt werden, dass die zufälligen Einflüsse durch dimensionslose standard-normalverteilte Zufallsgrößen  $\gamma_1, \gamma_2, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_6$  oder durch absolute Zufallsgrößen  $Q_1, Q_2, E_1, \dots, E_6$  erfasst werden. Für die beabsichtigte Untersuchung ist es vorteilhaft, die Spannungsgleichung mit technisch interpretierbaren absoluten Zufallsgrößen darzustellen.

Der Bauteilquerschnitt für die Testrechnungen ist der Schnitt  $e-e$  im Stockwerkrahmen nach Bild 1. Die Rahmengeometrie entspricht dem Grundrahmen, die Spannungsermittlung erfolgte unter Nutzung plastischer Querschnittsreserven. Die nach Gl. (24) ermittelte Spannungsgleichung lautet etwas vereinfacht für  $\nu_e = 0.05$  und  $\nu_q = 0.23$ :

$$\begin{aligned} \sigma_e = & 1.023 \cdot Q_1 + 0.8017 \cdot 10^{-8} \cdot E_2 + 0.6029 \cdot 10^{-6} \cdot E_4 + 0.3015 \cdot 10^{-9} \cdot E_2 + \\ & + 0.3015 \cdot 10^{-9} E_2 Q_2 + E_4(0.6768 \cdot 10^{-8} Q_1 + 0.2268 \cdot 10^{-7} Q_2) - 0.4251 \cdot 10^{-16} E_2^2 + \\ & + E_4(-0.1756 \cdot 10^{-15} E_1 + 0.1122 \cdot 10^{-14} E_2 - 0.1852 \cdot 10^{-15} E_3 - 0.3198 \cdot 10^{-14} E_4 - 0.1 \cdot 10^{-14} E_5 + \\ & - 0.5152 \cdot 10^{-15} E_6) + E_4(0.2081 \cdot 10^{-24} E_3^2 + 0.4529 \cdot 10^{-23} E_4^2 + 0.1144 \cdot 10^{-23} E_5^2) \end{aligned} \quad (34)$$

Unter den zahlreichen Termen erkennt man unschwer solche, die einen stärkeren Einfluss auf die Gesamtspannung besitzen als die übrigen. Zur zahlenmäßigen Auswertung wurden die Zufallsgrößen mit ihren Werten am Bemessungspunkt eingesetzt. Das liefert die in angegebenen relativen Beiträge einzelner Terme zur Gesamtspannung.

	1	2	3	4	5
Term in	$E_4 E_5$	$E_4 E_5^2$	$E_4 E_6$	$E_4 E_6^2$	$E_4 E_3$
Relativer Anteil	-0.205	+0.049	-0.105	+0.03	-0.04

Tabelle 5. Größenordnung einzelner Terme der Spannungsgleichung

Da der betrachtete Querschnitt im Stab 4 des Rahmens liegt, besitzt der  $E$ -Modul dieses Stabes eine dominante Wirkung auf die Normalspannung in diesem Querschnitt. Alle wesentlichen Spannungsanteile sind mit  $E_4$  verknüpft, so dass der Einzeleinfluss von  $E_4$  nicht diskutiert werden soll. Beispielhaft sollen vielmehr die Terme Nr. 1, 2 ( $E_5$ ), 3, 4 ( $E_6$ ) und 5 ( $E_3$ ) betrachtet werden, deren Wirksamkeit aus ihrem Anteil an der Gesamtspannung hervorgeht. Die Realisierungen der hier interessierenden absoluten Zufallsgrößen sind positiv. Ein Term mit negativem Vorzeichen muss zu einer verringerten Gesamtspannung führen, wenn die  $E$ -Moduln vergrößert werden. Diese Aussage wurde durch eine unabhängige Vergleichsrechnung mit dem Stabwerksprogramm überprüft. Die Ergebnisse sind in Tabelle 6 zusammengestellt.

Bei der Rechnung Nr.1 besitzen alle 6 Stäbe den gleichen  $E$ -Modul ( $E = 2.1 \cdot 10^8$  kN/m<sup>2</sup>, in der Tabelle 6 wird dieser Wert durch die Ziffer 1 symbolisiert). Rechnung Nr. 1 bildet die Basis für den Vergleich mit den anderen Varianten. Bei ihnen wurde jeweils nur ein  $E$ -Modul (und zwar der Stäbe 3, 5 und 6) um 10% auf  $2.31 \cdot 10^8$  kN/m<sup>2</sup> erhöht (in der jeweils mit 2 bezeichnet). Für die Interpretation der Tabellenwerte wurden für die jeweilige Rechnungen die Darstellungen der Verformungen und die Momentenschaubilder benutzt. Für die Rechnung 2 wurde nur der  $E$ -Modul des Stabes 5 (unterer Riegel) um 10% vergrößert. Deswegen wächst die Steifigkeit von Stab 5. Seine Durchbiegung und der Knotendrehwinkel am Knoten 5 verringern sich. Damit verbunden ist die Abnahme des Biegemoments im Schnitt  $e-e$ , was letztlich zur Verringerung der Normalspannung führt, da die Längskraft für alle 4 Rechnungen konstant bleibt.

Bei der Rechnung 3 wurde nur der  $E$ -Modul des Stabes 6 (oberer Riegel) vergrößert. Wächst  $E_6$ , wird die Durchbiegung des Stabes 6 und der Knotendrehwinkel im Knoten 6 geringer. Daraus folgt ein geringeres Biegemoment im Stab 4, welcher am Knoten 6 anschließt und eine verringerte Normalspannung.

Schließlich wurde nur für den Stab 3 (Stiel in der Verlängerung von Stab 4) der  $E$ -Modul auf  $2.31 \cdot 10^8$  kN/m<sup>2</sup> erhöht. Auch hier gilt: wird  $E_3$  größer, wächst die Biegesteifigkeit, der Stab zieht mehr Biegemoment auf sich, so dass der Knotendrehwinkel vom Knoten 5 kleiner wird. Da Stab 3 und Stab 4 am Knoten 5 anschließen, werden für Stab 4 die Momente und auch die Spannungen etwas geringer.

Ifd. Nr.	Belastung / kN/m /		Identif.-Nr. für den $E$ -Modul für die Stäbe mit Stab-Nr.						Anteil in Spannungsformel	erwartete Tendenz für Normalspannung	Verschiebung für Stab 5 / mm /	Knotendrehwinkel für Knoten 5 / mrad /	Biegemoment im Schnitt $e-e$ / kNm /	Normalspannung $\sigma$ / kN/cm <sup>2</sup> /
	Q1	Q2	1	2	3	4	5	6						
1	25	25	1	1	1	1	1	1	all	Referenzwert	29.66	8.218	-64.21	-22.37
2	25	25	1	1	1	1	2	1	$E_4E_5$ $E_4E_5^2$	kleiner	27.95	7.855	-62.41	-21.82
3	25	25	1	1	1	1	1	2	$E_4E_6$ $E_4E_6^2$	kleiner	29.84	8.306	-63.46	-22.13
4	25	25	1	1	2	1	1	1	$E_4E_3$	kleiner	29.44	8.168	-63.87	-22.26

Tabelle 6. Aussagen zum tendenziellen Einfluss einzelner Terme der Spannungsgleichung (34) im Vergleich mit den Resultaten eines kommerziellen Programms

Diese und weitere gerechnete Testbeispiele zeigen, dass die Terme der Spannungsgleichung das statische Verhalten der Zufallsgrößen im Tragwerksmodell sehr genau nachbilden. Man kann deshalb davon ausgehen, dass der Ansatz (24), der zur oben angegebenen der Spannungsgleichungen führt, für weitere Untersuchungen geeignet ist. Dieser Befund wird auch durch die Ergebnisse der anderen Prüfungen gestützt.

## 7 Abschließende Bemerkungen

In diesem Beitrag wird ein neuartiges Verfahren zur probabilistischen Sicherheitsanalyse von Stabtragwerken vorgeschlagen. Im Mittelpunkt steht ein lineares Gleichungssystem, das aus der Elastizitätsgleichung der klassischen Deformationsmethode hervorgeht. Für das Verfahren ist kennzeichnend: a) Die Matrix des deterministischen Ersatzsystems wird aus Untermatrizen zusammengesetzt, welche die Deformationsmethode in der üblichen Weise liefert. b) Die Struktur der Koeffizientenmatrix des Ersatzsystems wird vom Ansatz (24) bestimmt. Daher kann es auch formal angegeben werden. Für den Praktiker sind die Hilfsmittel der Stochastik entbehrlich, wenn bei *allen* Tragwerken an *einem* erprobten Ansatz festgehalten wird. Führende Terme des benutzten Ansatzes sind mechanisch interpretierbar und daher plausibel. Dies begünstigt die praktische Anwendung. c) Das Ersatzsystem enthält keine allgemeinen Zahlen und wird in der üblichen Weise gelöst. d) Die Methode liefert die analytische Darstellung der sicherheitsrelevanten Ausgangsgröße in Abhängigkeit von zufälligen Bemessungsgrößen. Sie gestattet Sensitivitätsuntersuchungen und die Berechnung von statistischen Momenten. e) Die Versagenswahrscheinlichkeit kann mit der leicht handhabbaren Monte-Carlo-Methode ermittelt werden.

Insgesamt schließt das Verfahren unmittelbar an den Grundalgorithmus der Deformationsmethode an und kann als deren probabilistische Erweiterung angesprochen werden. Da zur Bestimmung der Versagenswahrscheinlichkeit die Auswertung des Wahrscheinlichkeitsintegrals (2) des klassischen Zugangs zur probabilistischen Zuverlässigkeitstheorie nicht erforderlich ist, treten die damit verbundenen Schwierigkeiten nicht auf. Allerdings werden in Gestalt der Chaos-Entwicklungen Hilfsmittel aus der Stochastik eingesetzt, die in der Zuverlässigkeitstheorie von Baukonstruktionen bisher noch nicht allgemein üblich sind.

## Literatur

- Bellach, J.; Franken, P.; Warmuth, E.; Warmuth, W.: *Maß, Integral und bedingter Erwartungswert*. Akademie-Verlag Berlin, (1978).
- Biehounek, J.; Grolik, H.: Zur Anwendung des Kraftgrößenverfahrens in der probabilistischen Sicherheitstheorie statischer Systeme. *Technische Mechanik*, Vol. 21, 3, 179-190, (2001).
- Biehounek, J.; Grolik, H.; Herz, S.: Zur voll-probabilistischen Verallgemeinerung der Deformationsmethode. *Stahlbau*, Vol. 72 (7), p. 527 – 534, (2003a).
- Biehounek, J.; Grolik, H.; Herz, S.: *Zur Anwendung von Chaos-Entwicklungen in der Tragwerksstatik*. IKM03, Weimar, (2003b).
- Biehounek, J.; Grolik, H.; Herz, S.: *Stochastische Tragwerksmodellierung mit Chaos-Entwicklungen*. Beiträge zur Wissenschaft, Technologie und Gestaltung, 69; Hochschule Anhalt, Köthen, (2003c).
- Ditlevsen, O.; Madsen, H.O.: *Structural Reliability Methods*. John Wiley & Sons, Chichester, (1996).
- Fießler, B.; Hawranek, R.; Rackwitz, R.: *Numerische Methoden für probabilistische Bemessungsverfahren und Sicherheitsnachweise*. Berichte zur Sicherheitstheorie von Bauwerken, Laboratorium für den konstruktiven Ingenieurbau, TU München, (1976).
- Freudenthal, A.M.: The Safety of Structures. *Transactions of the ASCE*; Vol. 112, (1947).
- Ghanem R.G.; Spanos, P.D.: *Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach*. Springer-Verlag, (1991).
- Kleiber, M.; Hien, T.D.: *The Stochastic Finite Element Method*. Wiley, (1992).
- Malliavin, P.: *Integration and Probability*. Springer-Verlag, (1995).
- Marek, P.; Gustar, M.; Anagnos, Th.: *Simulation-Based Reliability Assessment*. CRC Press, Boca Raton, (1996).
- Marek, P.; Gustar, M.; Bathon, L.: *Tragwerksbemessung – von deterministischen zu probabilistischen Verfahren*. ACADEMIA, Praha, (1998).
- Matthies, H.G.; Brenner, Chr. E.; Bucher, Chr.G.; Soares, C.G.: Uncertainties in probabilistic numerical Analysis of structures and solids – Stochastic finite elements. *Structural Safety*, Vol 19, (1997), 283-336.
- Mayer, M.: *Die Sicherheit von Bauwerken und ihre Berechnung nach Grenzkraften anstatt nach zulässigen Spannungen*. Springer Verlag, Berlin, (1926).
- Melcher, R.E.: *Structural Reliability Analysis and Prediction*. John Wiley & Sons, (1999).
- Nualart, D.: *The Malliavin Calculus and Related Topics*. Springer-Verlag, (1995).
- Rackwitz, R.: *First Order Reliability Theories and Stochastic Models*. Proceedings ICOSSAR 77; TU München, (1977).
- Rackwitz, R.: Optimization and risk acceptability based on the Life Quality Index. *Structural Safety*, Vol. 24, 297 – 331, (2002).
- Schneider J.: *Sicherheit und Zuverlässigkeit im Bauwesen*. Teubner, Stuttgart, (1995).

Sirjaew, A.N.: *Wahrscheinlichkeit*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, (1988).

Spaethe, G.: *Die Sicherheit tragender Baukonstruktionen*. Springer-Verlag Wien New York, (1992).

Sudret, B.; Der Kiureghian, A.: Comparison of finite element reliability methods. *Probabilistic Engineering Mechanics* 17, 4, 10, 337-348, (2002).

Wiener, N.: The homogeneous chaos. *Amer. J. Math.*, Vol. 60, (1938), p. 897 –936.

---

*Anschrift:* Prof. Dr. J. Biehounek, Dr. H. Grolík, Dipl.-Ing. S. Herz, Hochschule Anhalt (FH), Abteilung Dessau, PF 2215, 06818 Dessau.