

Durchbiegung einer elastisch eingespannten Kragplatte unter normaler Belastung

H.G. Sabiniak, W. Franke

In der Arbeit wird eine theoretische Analyse der Durchbiegungen einer Kragplatte mit elastisch eingespanntem Rand durchgeführt. Dazu wurde das Differenzenverfahren angewendet. Im Vergleich mit den aus der Literatur bekannten Bedingungen wurden in den Plattenecken neue Bedingungen eingeführt, die eine bessere Übereinstimmung der theoretischen Ergebnisse mit den in der Literatur angegebenen experimentellen Ergebnissen gewährleisten.

Formelzeichen

A...O	-	einzelne Lagen der Punkte auf der Plattenoberfläche, Funktionssymbole, Untermatrizen
D	-	Plattensteifigkeit
E	-	Elastizitätsmodul
F_i	-	Einzelkraft
M_x, M_y	-	Biegemomente
Q_x, Q_y	-	Querkräfte parallel zur Achse z
a...m	-	einzelne Netzpunkte in der Umgebung des betrachteten Plattenpunktes, Funktionssymbole
a	-	Plattenbreite
h	-	Plattendicke
l	-	Länge der Berührungslinie, Plattenlänge
m, n	-	Zahlen, die die Abmessungen der Matrizen darstellen
q	-	Oberflächen- oder Linienbelastung
x, y, z	-	kartesische Koordinaten
α, β	-	Hilfskonstante
ψ, Φ	-	Koordinatenpaar in numerischen Berechnungen
ν	-	Poisson-Zahl
ω	-	Durchbiegung
∇	-	Nabla-Operator
Δ	-	Funktionssymbol
$\Delta x, \Delta y$	-	Gitterabstände, Schrittweite beim Differenzenverfahren

1 Einführung

Die folgenden Ausführungen beziehen sich auf eine eingespannte dicke Platte. Mit dieser Bezeichnung wird die Terminologie von Umezawa u.a. (1969) übernommen. Das erscheint sinnvoll, zumal im weiteren Text mehrfach auf diese Autoren verwiesen wird.

In Hinsicht auf die elastische Einspannung eines Plattenrandes enthalten die Durchbiegungsformeln die Plattendicke nicht nur in ihrem Steifheitsausdruck D.

Die Bestimmung der Durchbiegung einer dicken Platte wird (so wie auch für dünne Platten von Großman (1981) realisiert) auf die Lösung der Gleichung (1) bei entsprechenden Randbedingungen zurückgeführt, s.a. Timoshenko (1959).

$$\frac{\delta^4 \omega}{\delta x^4} + 2 \frac{\delta^4 \omega}{\delta x^2 \delta y^2} + \frac{\delta^4 \omega}{\delta y^4} = \frac{q}{D} \quad (1)$$

Die längs einer beliebigen Berührungslinie oder auf einem beliebigen Teil der Plattenoberfläche verteilte Belastung kann man durch eine Reihe von Einzelkräften ersetzen. Für Linienbelastung gilt

$$F_i = \int_{l_{i-1}}^{l_i} q(l) dl \quad (2)$$

und für Flächenbelastung ist

$$F_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{i-1}}^{y_i} q(x, y) dx dy \quad (3)$$

zu setzen (s. Bild 1).

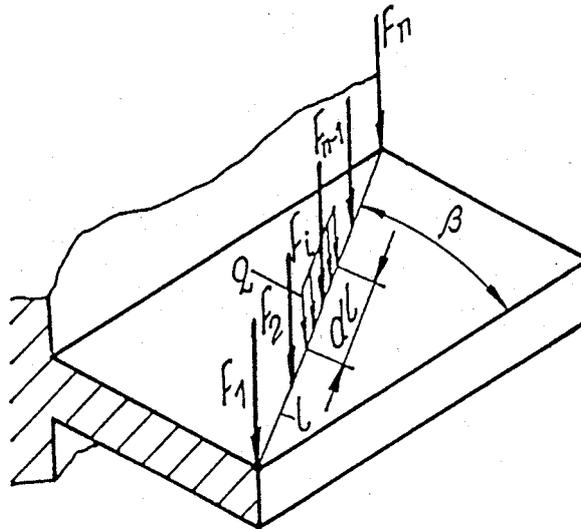


Bild 1. Einzelkraft als Ersatz der Linienlast längs der Berührungslinie.

2 Randbedingungen

Für eine zum eingespannten Rand parallele freie Kante wird angenommen, dass das Biegemoment und die verallgemeinerte Schnittkraft gleich Null sind:

$$\frac{\delta^2 \omega(a, y)}{\delta x^2} + \nu \frac{\delta^2 \omega(a, y)}{\delta y^2} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\delta^3 \omega(a, y)}{\delta x^3} + (2 - \nu) \frac{\delta^3 \omega(a, y)}{\delta x \delta y^2} = 0 \quad (5)$$

Die zwei verbleibenden freien Kanten (senkrecht zur eben beschriebenen) müssen die gleichen Randbedingungen erfüllen:

$$\frac{\delta^2 \omega(x, \pm 1/2)}{\delta y^2} + \nu \frac{\delta^2 \omega(x, \pm 1/2)}{\delta x^2} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\delta^3 \omega(x, \pm 1/2)}{\delta y^3} + (2 - \nu) \frac{\delta^3 \omega(x, \pm 1/2)}{\delta y \delta x^2} = 0 \quad (7)$$

Der eingespannte Rand wird als elastisch gelagert betrachtet. Das erlaubt die Annahme, dass längs eines eingespannten Randes der Tangens des Winkels zwischen der Tangente an die verformte Schnittfläche senkrecht zu diesem Rand und ihrer Lage im unverformten Zustand proportional zum Biegemoment ist. Die Durchbiegung des eingespannten Randes wird dagegen als proportional zur Querkraft angenommen:

$$\frac{\delta\omega(0, y)}{\delta x} = k_1 M_x \quad (8)$$

$$\omega(0, y) = k_2 Q_x \quad (9)$$

Die Faktoren k_1 und k_2 sind Konstanten für den elastisch gelagerten Rand bezüglich Einspannmoment und Querkraft. Der Wert dieser Konstanten wurde aus Weber (1955) entnommen. Für den Fall linearer, stetiger und gleichmäßiger Belastung parallel zum eingespannten Rand einer unendlich langen Kragplatte erhält man unter Anwendung der Energiemethode die Gleichungen

$$k_1 = \frac{18(1-\nu^2)}{\pi E h^2} \quad (10)$$

$$k_2 = \frac{4,8(1-\nu^2)}{\pi E} \quad (11)$$

Die Differentialgleichung (1) wurde mit dem Differenzenverfahren analog Umezawa (1969) gelöst. Die Platte wird dabei in ein Gitter mit den Feldabmessungen Δx und Δy (Bild 2) geteilt.

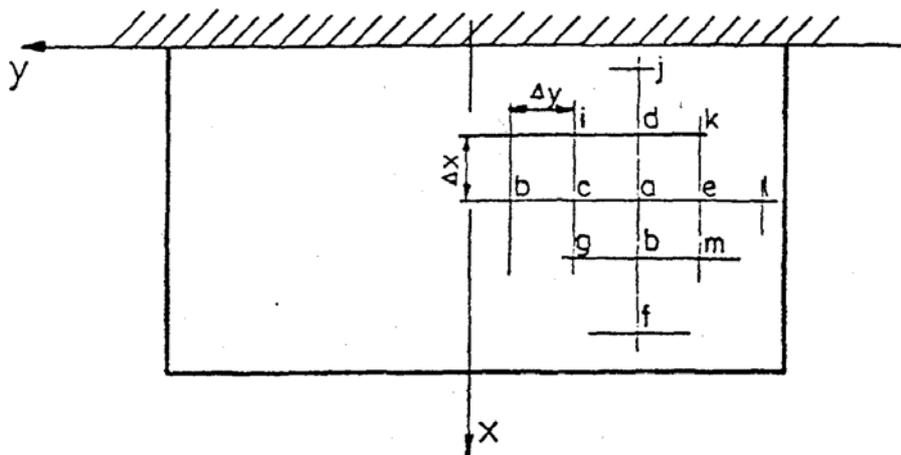


Bild 2. Punktverteilung beim Ersatz der biharmonischen Gleichung durch Formeln des Differenzenverfahrens

In Abhängigkeit davon, wo sich der Mittelpunkt "a" des Gitters auf der Plattenoberfläche befindet, wird die Gleichung (1) durch die entsprechende Differenzgleichung ersetzt. Mögliche Fälle der Lage des Punktes "a" sind im Bild 3 dargestellt, gekennzeichnet durch die Buchstaben A bis O.

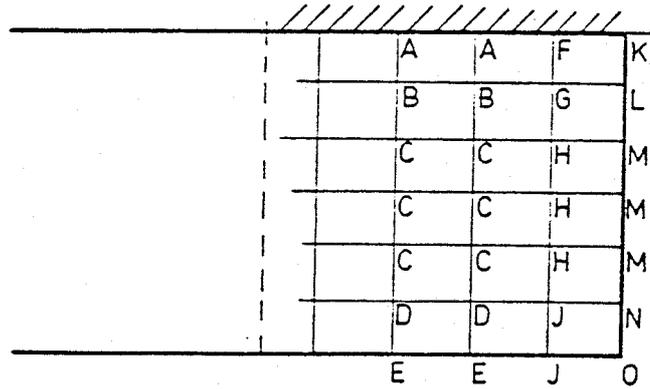


Bild 3. Schema der möglichen Fälle der Lage des Gittermittelpunktes "a"

In allen Lagen mit Ausnahme der Fälle C befinden sich einige Punkte b bis m des Gitters außerhalb des Gitters. Um die Durchbiegung dieser Punkte auf Punkte der Platte zu reduzieren, werden Randbedingungen eingeführt. Die auf diese Weise erhaltenen 15 Differenzgleichungen ersetzen vollkommen die Differentialgleichung (1). In der vorliegenden Arbeit wurden einige Modifikationen gegenüber der oben zitierten Literaturstelle vorgenommen:

1. Alle Mittelwerte für einen Punkt werden von 4 statt von 2 benachbarten Punkten berechnet.
2. Es wurden neue, andere Bedingungen für die Plattenecken eingeführt.
- a) In der Ecke O (Bild 3) wird die Durchbiegung ω im Punkt „m“ in Abhängigkeit von der Durchbiegung in den benachbarten Punkten gebracht

$$\omega_m = \omega_k + \omega_g - \omega_i \quad (12)$$

anstelle der Randbedingung $M_x = 0$ und $M_y = 0$.

- b) In der Ecke "K" mit dem Punkt "k" wird anstelle $M_y = 0$ die Randbedingung nach Gleichung (8) eingeführt.
3. Alle Formeln wurden für eine beliebige Dichte der Plattenaufteilung, die in jeder Achsrichtung unterschiedlich sein kann, aufgestellt.
4. Anschließende Berechnungen wurden computergestützt unter Verwendung der Matrizenrechnung durchgeführt.

Die Einführung dieser Veränderungen ergab eine größere Genauigkeit der Berechnungen, was im Folgenden dargestellt wird.

3 Biegung einer dicken Kragplatte endlicher Länge unter Punktlast

$$\begin{aligned} (\nabla^4 \omega)^A = & [6\alpha^2 + 8\alpha + 6 - 2(1 + \alpha)BMB + 2\alpha BMC + \Delta x^2 QA] \omega_a + \\ & + [-6(1 + \alpha) - 2(1 + \alpha)BMA] \omega_b + [-4\alpha(1 + \alpha) - 2(1 + \alpha)BMC + BMB] \omega_c + \\ & + [-4\alpha(1 + \alpha) - 2(1 + \alpha)BMC + \alpha BMB] \omega_e + 2\omega_f + (3\alpha + \alpha BMA)(\omega_g + \omega_m) + \\ & + (\alpha^2 + \alpha BMC)(\omega_h + \omega_l) = \frac{\Delta x^4 p(x, y)}{D}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
(\nabla^4 \omega)^B &= (6\alpha^2 + 8\alpha + 6 + \text{BMA})\omega_a - 4(1 + \alpha)\omega_b - 4\alpha(1 + \alpha)(\omega_c + \omega_e) + \\
&+ [\text{BMB} - 4(1 + \alpha)]\omega_d + 2\alpha(\omega_g + \omega_m) + (2\alpha + \text{BMC})(\omega_k + \omega_i) + \alpha^2(\omega_h + \omega_l) + \\
&+ \omega_f = \frac{\Delta x^4 p(x, y)}{D},
\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla^4 \omega)^C &= (6\alpha^2 + 8\alpha + 6)\omega_a - 4(1 + \alpha)[(\omega_b + \omega_d) + 2(\omega_c + \omega_e)] + \\
&+ 2\alpha(\omega_g + \omega_i + \omega_j + \omega_m) + \alpha^2(\omega_h + \omega_l) + \omega_f + \omega_j = \frac{\Delta x^4 p(x, y)}{D},
\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla^4 \omega)^D &= (6\alpha^2 + 8\alpha + 5)\omega_a - 4(1 + \alpha)[\omega_d + \alpha(\omega_e + \omega_c)] - \\
&- 2(\beta + \alpha + 1)\omega_b + 2\alpha(\omega_i + \omega_k) + (\alpha + \beta)(\omega_g + \omega_m) + \alpha^2(\omega_h + \omega_l) + \omega_j = \\
&= \frac{\Delta x^4 p(x, y)}{D},
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla^4 \omega)^E &= (-6\beta^2 + 12\alpha\beta + 8\beta + 2)\omega_a + 4\beta(\beta - 2\alpha - 1)(\omega_c + \omega_e) - \\
&- 4(\beta + \alpha + 1)\omega_d + \beta(2\alpha - \beta)(\omega_h + \omega_l) + 2(\alpha + \beta)(\omega_i + \omega_k) + 2\omega_j = \\
&= \frac{\Delta x^4 p(x, y)}{D},
\end{aligned} \tag{17}$$

$$\left. \begin{aligned}
\alpha &= \left(\frac{\Delta x}{\Delta y} \right)^2 \\
\beta &= \alpha(1 - \nu),
\end{aligned} \right\} \tag{18}$$

$$\left. \begin{aligned}
\text{BMA} &= \frac{-2\text{BM} + \Delta x}{2\text{BM} + \Delta x}, \\
\text{BMB} &= \frac{4\text{BM}(1 + \alpha\nu)}{2\text{BM} + \Delta x}, \\
\text{BMC} &= \frac{-2\text{BM}\alpha\nu}{2\text{BM} + \Delta x}, \\
\text{BM} &= 1,5 \frac{h}{\pi},
\end{aligned} \right\} \tag{19}$$

Bei Verwendung der im Abschnitt 2 besprochenen Randbedingungen und unter Beachtung der Veränderungen gegenüber der o.g. Arbeit erhält man 15 Differenzgleichungen, welche die Differentialgleichung (1) ersetzen.

In den weiteren Rechnungen wird der Bieungskoeffizient für jeden Punkt des Gitters zwecks Vereinfachung der Schreibweise mit Großbuchstaben gekennzeichnet, der der jeweiligen Differenzgleichung zugeordnet ist und gleichzeitig die Lage des Mittelpunktes des Gitters bestimmt.

Der Index (kleiner Buchstabe) bestimmt den Punkt des Gitters, z. B. wird der Koeffizient des Mittelpunktes „a“ der Formel C mit $c_a = 6\alpha^2 + 8\alpha + 6$ bezeichnet. Die Belastung $p(x, y)$ in den Gleichungen (13)...(17) stellt die Summe der Flächenlast $q(x, y)$ und der Einzellast $F_i(x, y)$ dar, gleichmäßig verteilt auf das Element des Gitters. In Abhängigkeit davon, in welchem Punkt der Platte sie angelegt wird, kann sie durch folgende Gleichungen dargestellt werden:

$$\begin{aligned}
p(x, y) &= q(x, y) + \frac{F_i(x, y)}{\Delta x \Delta y} \quad \text{für jeden inneren Plattenpunkt,} \\
p(x, y) &= q(x, y) + \frac{2F_i(x, y)}{\Delta x \Delta y} \quad \text{für jeden Randpunkt,} \\
p(x, y) &= q(x, y) + \frac{4F_i(x, y)}{\Delta x \Delta y} \quad \text{für jeden Eckpunkt.}
\end{aligned} \tag{20}$$

Für den in dieser Arbeit untersuchten Fall ist die Flächenlast $q(x, y) = 0$, weil diese Belastung nicht angelegt wird und das Eigengewicht der Platte vernachlässigbar ist.

Die Durchbiegung in allen Punkten der ganzen Platte lässt sich aus folgender Matrixgleichung berechnen:

$$\begin{array}{cccccccc}
A & D & G & & & & & & W_0 \\
B & E & F & C & & & & & W_1 \\
C & F & H & F & \cdot & & & & W_2 \\
& C & F & H & \cdot & C & & & \cdot \\
& & C & F & \cdot & F & \cdot & & \cdot \\
& & & C & \cdot & H & \cdot & C & \cdot \\
& & & & \cdot & F & \cdot & F & C & \cdot \\
& & & & & C & \cdot & H & F & C & \cdot \\
& & & & & & \cdot & F & H & F & C & W_{\phi-2} \\
& & & & & & & C & F & E & B & W_{\phi-1} \\
& & & & & & & & G & D & A & W_{\phi}
\end{array} = \frac{\Delta^4 x p(x, y)}{D} \tag{21}$$

Die mit den Symbolen A...H bezeichneten Untermatrizen n werden mit folgenden Gleichungen bestimmt:

$$A = \begin{array}{cccccc}
K_a & K_b & K_f & & & \\
L_d & L_a & L_b & L_f & & \\
M_j & M_d & M_a & M_b & M_f & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
& & M_j & M_d & M_a & M_b & M_f \\
& & & N_j & N_d & N_a & N_b \\
& & & & O_j & O_d & O_a
\end{array} \tag{22}$$

und so weiter, zum Beispiel

$$D = \begin{array}{cccccc}
K_c & K_g & & & & \\
L_i & L_c & L_g & & & \\
& M_i & M_c & M_g & & \\
& & \cdot & \cdot & \cdot & \\
& & & M_i & M_c & M_g \\
& & & & N_i & N_c & N_g \\
& & & & & O_i & O_c
\end{array} \tag{23}$$

$$G = \begin{pmatrix} K_h \\ L_h \\ M_h \\ \cdot \\ M_h \\ N_h \\ O_h \end{pmatrix} \quad (24)$$

jedoch

$$W_\Phi = \begin{pmatrix} W_{\Phi,0} \\ W_{\Phi,1} \\ \cdot \\ W_{\Phi,\psi-1} \\ W_{\Phi,\psi} \end{pmatrix} \quad (25)$$

Die Matrix (25) repräsentiert Belastungen der Platte in dementsprechenden Punkten; $W_{\Phi\psi}$ ist eine im Punkt mit den Koordinaten $(\Phi\psi)$ angelegte Kraft.

4 Verformung einer rechteckigen Kragplatte unter beliebiger Normalbelastung

Wie schon im Abschnitt 3 erwähnt, ist das Berechnungsverfahren für die Durchbiegung einer dicken Kragplatte ähnlich der von Umezawa u. a. (1969) angewandten Methode. Die Berechnung wurde folglich zwecks Vergleichbarkeit der Ergebnisse mit denselben Werten wie dort durchgeführt, zumal diese Autoren ihre theoretischen Betrachtungen zusätzlich mit experimentellen Untersuchungen unterstützen. Die theoretischen und experimentellen Ergebnisse für eine symmetrisch eingebrachte Kraft sind in den Bildern 4 und 5 dargestellt.

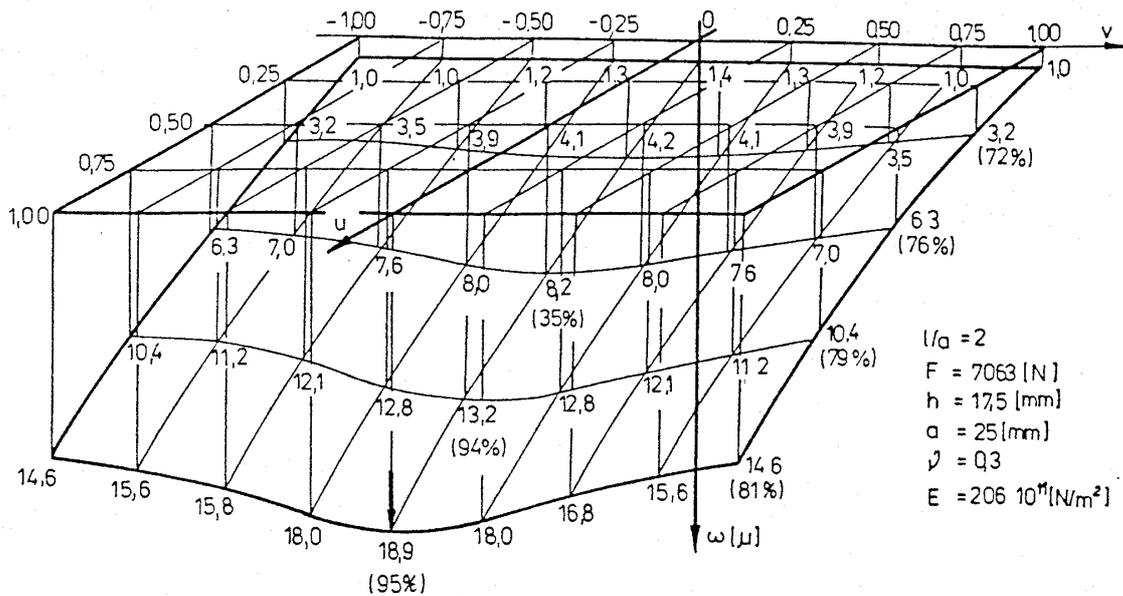


Bild 4. Numerische Lösung der Plattenbiegung

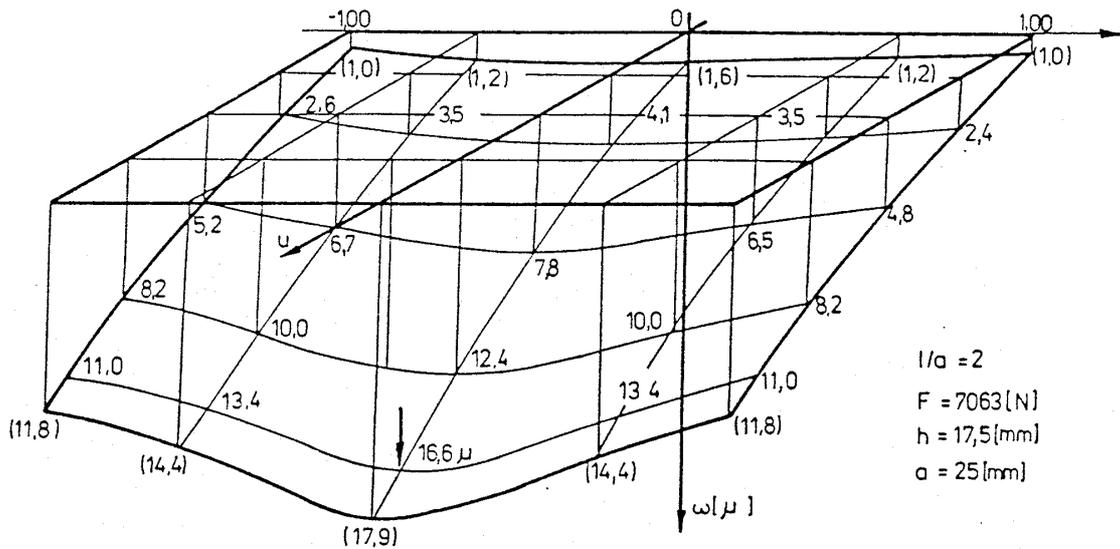


Bild 5. Experimentelle Ergebnisse der Plattenbiegung

Bild 6 zeigt die Ergebnisse, die mit den in vorliegender Arbeit abgeleiteten Formeln berechnet wurden.

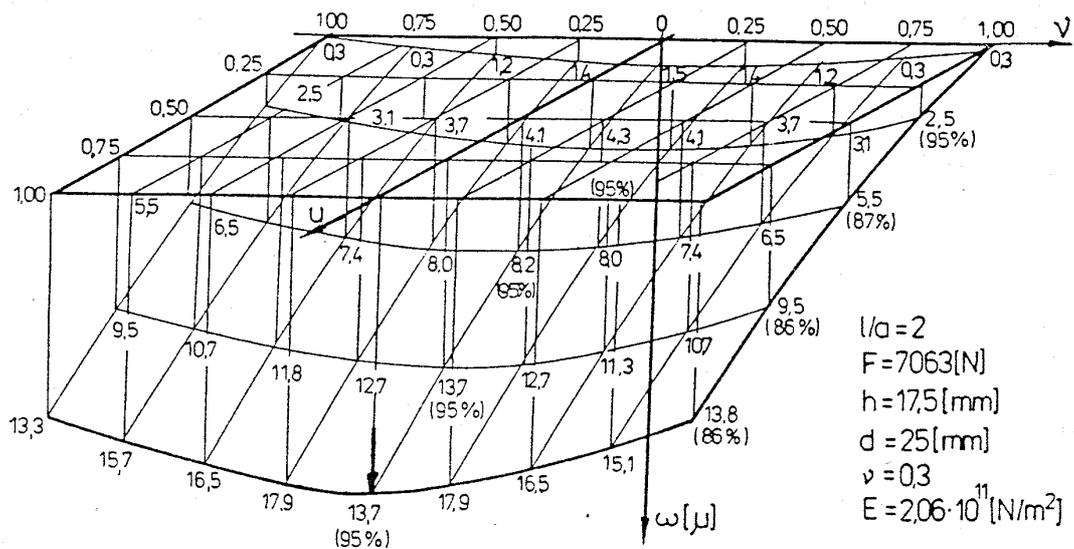


Bild 6. Theoretische Ergebnisse der Plattenbiegung

Im Bild 5 sind in Klammern die Werte dargestellt, die am Plattenrand wahrscheinlich durch Extrapolation erhalten wurden, weil aus technischen Gründen das Messen der Durchbiegung an diesen Stellen nicht möglich war. In den experimentellen Untersuchungen wurde die Belastung 2 mm vom freien Plattenrand entfernt eingeleitet. In den Bildern 4 und 6 ist in Klammern das Verhältnis zwischen den in Bild 5 dargestellten experimentell ermittelten Werten und den Berechnungsergebnissen in Prozent angegeben.

Die Abweichungen zwischen den in der zitierten Literaturstelle enthaltenen theoretischen und experimentellen Werten schwanken zwischen 2...25 %, die in vorliegender Arbeit ermittelten und in Bild 6 dargestellten Fehler liegen dagegen nur zwischen 4...14 %. Die größte Übereinstimmung ist an den Ecken vorhanden, d. h. dort, wo präzisere Randbedingungen eingeführt wurden.

Ein ähnlicher Vergleich der erhaltenen Ergebnisse wurde für die asymmetrische Belastung der Platte durchgeführt. Die entsprechenden Resultate sind in den Bildern 7, 8 und 9 gezeigt. In diesem Fall wird ebenfalls eine bessere Übereinstimmung mit den experimentellen Werten nachgewiesen. Die verbliebenen Fehler können durch Verwendung eines engmaschigeren Gitters über der Platte verkleinert werden.

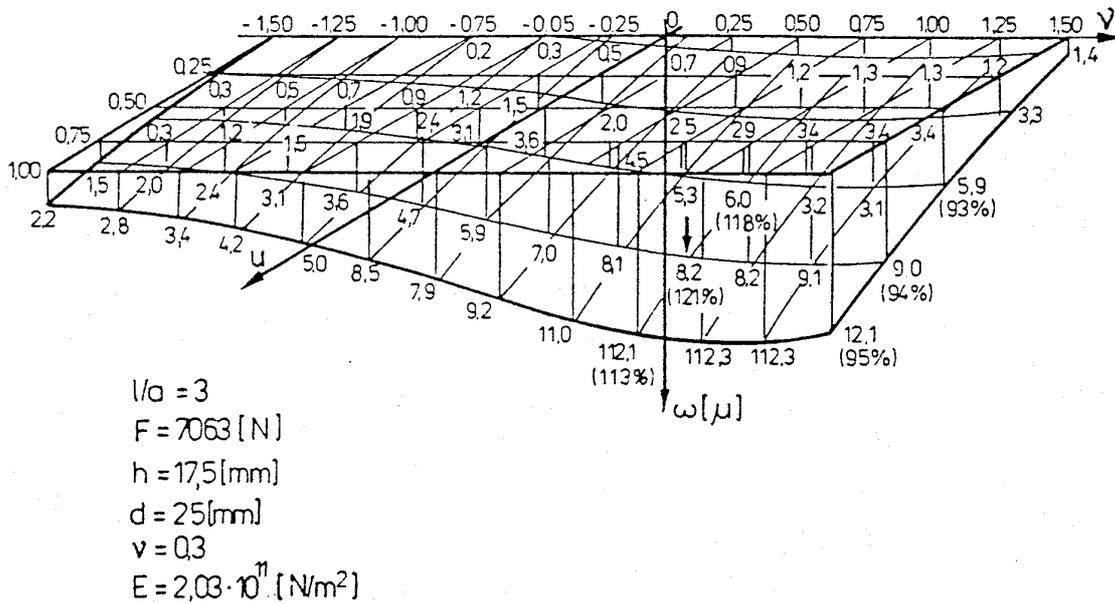


Bild 7. Numerische Lösung der Plattenbiegung

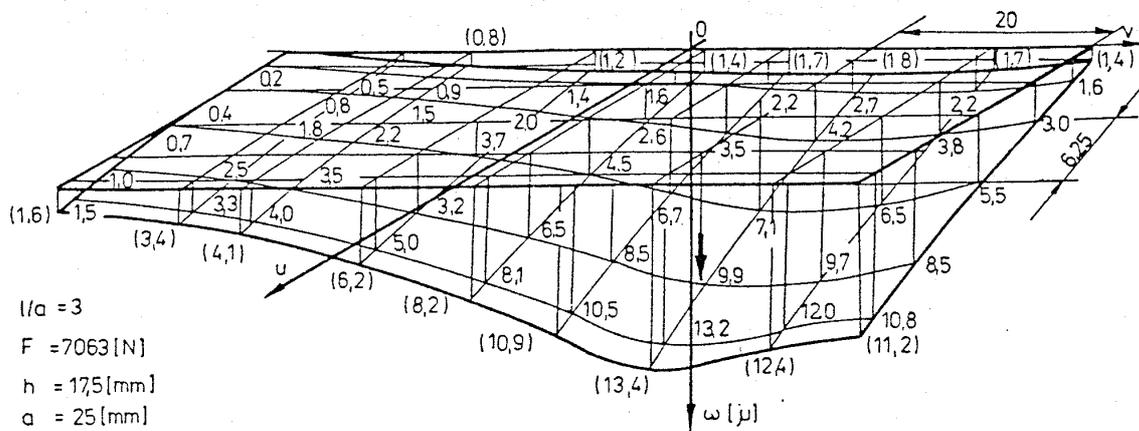


Bild 8. Experimentelle Ergebnisse der Plattenbiegung

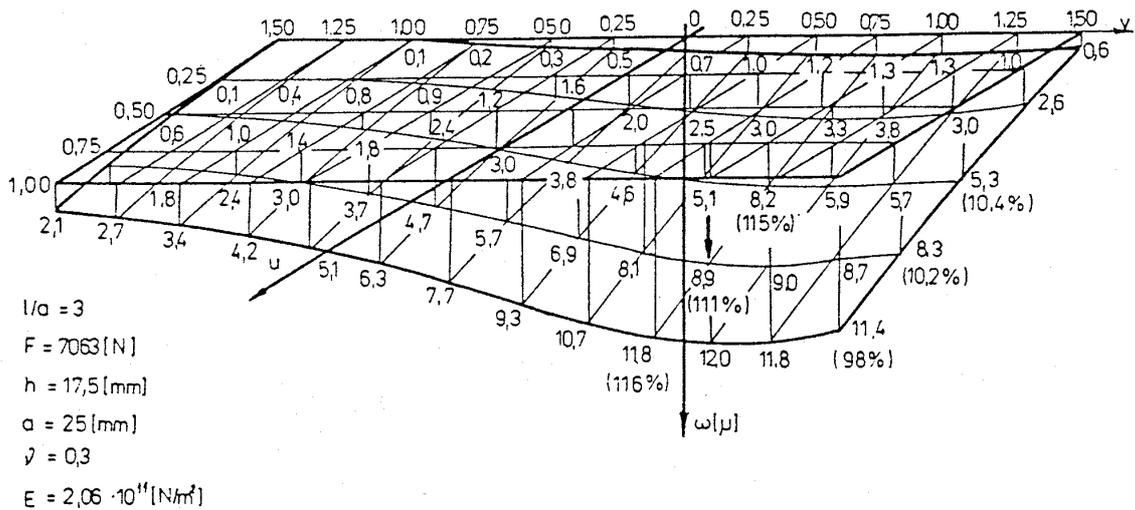


Bild 9. Theoretische Ergebnisse der Plattenbiegung

Den Einfluss der Gitterdichte auf die erhaltenen Ergebnisse zeigt Bild 10. Es ist eine charakteristische Veränderung der Durchbiegung des freien Randes ($u = 1$) parallel zum elastisch eingespannten Rand sichtbar. Der elastisch eingespannte Rand ($u = 0$) behält seinen Charakter, aber an den Ecken unterscheiden sich die erhaltenen Ergebnisse um nahezu 100 %. Allerdings bewirkt eine übermäßige Verdichtung des Berechnungsgitters ein schnelles Anwachsen der Rechenzeit bei gleichzeitig höherem Speicherplatzbedarf des Computers.

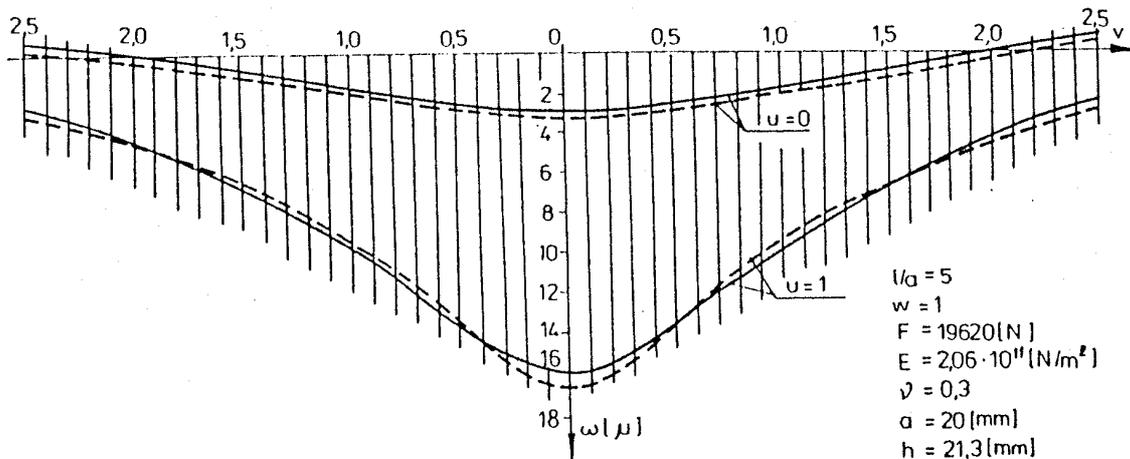


Bild 10. Vergleich der erhaltenen Ergebnisse in Abhängigkeit von der Gitterdichte der Platte

In den Bildern 11 und 12 sind die Durchbiegungen des freien Plattenrandes parallel zum eingespannten Rand in Abhängigkeit von der Stelle des Lastangriffs, die mit Vektoren gekennzeichnet ist, dargestellt. Bild 11 zeigt die Verschiebung der Kraft längs des freien Plattenrandes parallel zum eingespannten Rand. In Bild 12 ist die Durchbiegung desselben Randes zu sehen bei Einleitung von Kräften am freien aber rechtwinklig zum eingespannten Rand. Man kann sehen, dass für diese Fälle der freie Plattenrand nach der Biegung fast eine gerade Linie bildet. Wenn die Belastung an einer Ecke des eingespannten Randes oder in seiner Nähe eingeleitet wird, so kann die gegenüberliegende Ecke einen negativen Durchbiegungswert annehmen. Der Einfluss des E-Moduls ist nicht groß. Für Werte von E im Bereich von $2,0 \cdot 10^{11} \dots 2,2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$, also für Stahl, Stahlguss u. ä., betragen die maximalen Abweichungen für die Durchbiegungen 4,6 % bezogen auf $E = 2,06 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$.

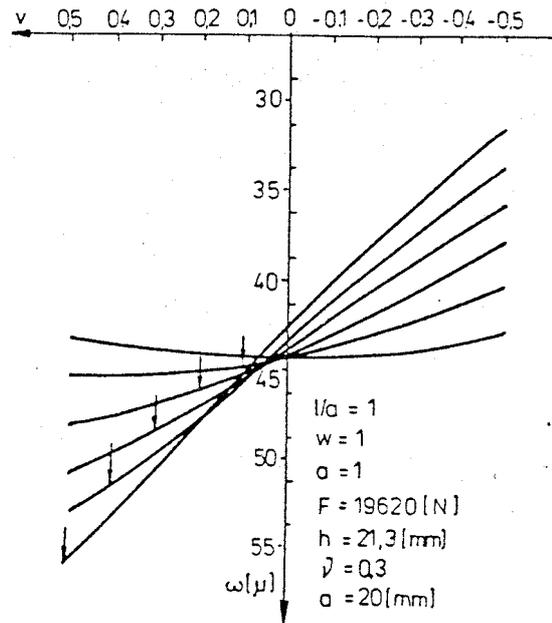


Bild 11. Biegung des freien Plattenrandes in Abhängigkeit von der Verschiebung der Kraft entlang des freien Randes parallel zum eingespannten Rand

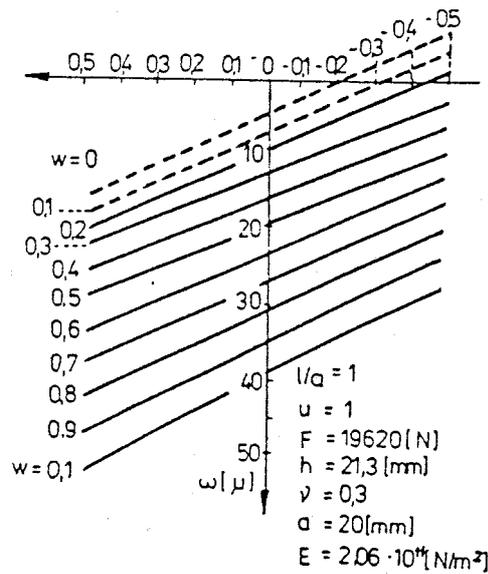


Bild 12. Biegung des freien Plattenrandes in Abhängigkeit von der Verschiebung der Kraft entlang des freien Randes rechtwinklig zum eingespannten Rand

In den Bildern 13 und 14 ist die Plattenbiegung im Querschnitt und an ihrem freien Rand, parallel zum elastisch eingespannten Rand, dargestellt. Die Durchbiegungswerte sind in dimensionsloser Form als Verhältnis $\omega / \frac{Fa^2}{\pi D}$ angegeben, um einen Vergleich mit den Werten nach Großman (1981) zu ermöglichen.

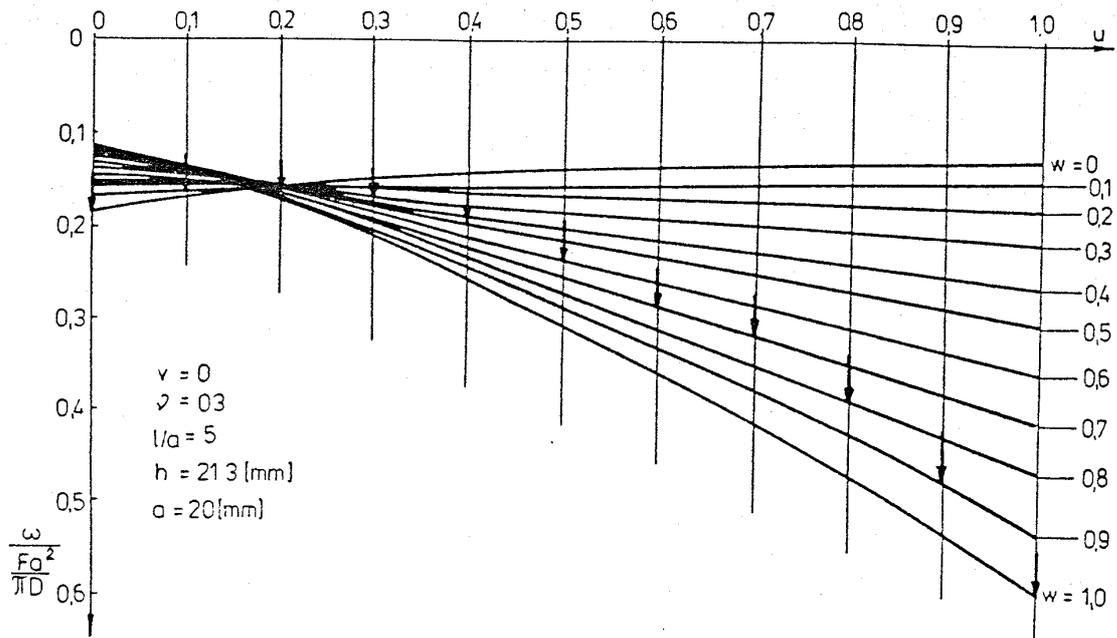


Bild 13. Plattenbiegung für die Koordinate $v = 0$ in Abhängigkeit von der Lage der Kräfteinleitungsstelle

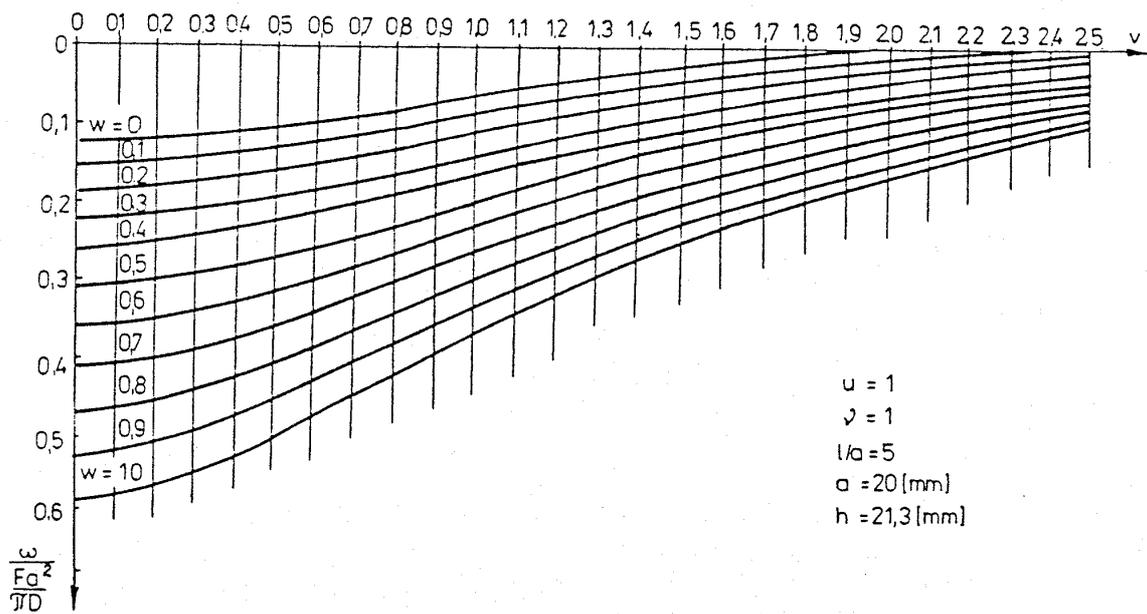


Bild 14. Biegung des freien Plattenrandes in Abhängigkeit von der Verschiebung der Kraft in der Symmetrieebene der Plattenbreite

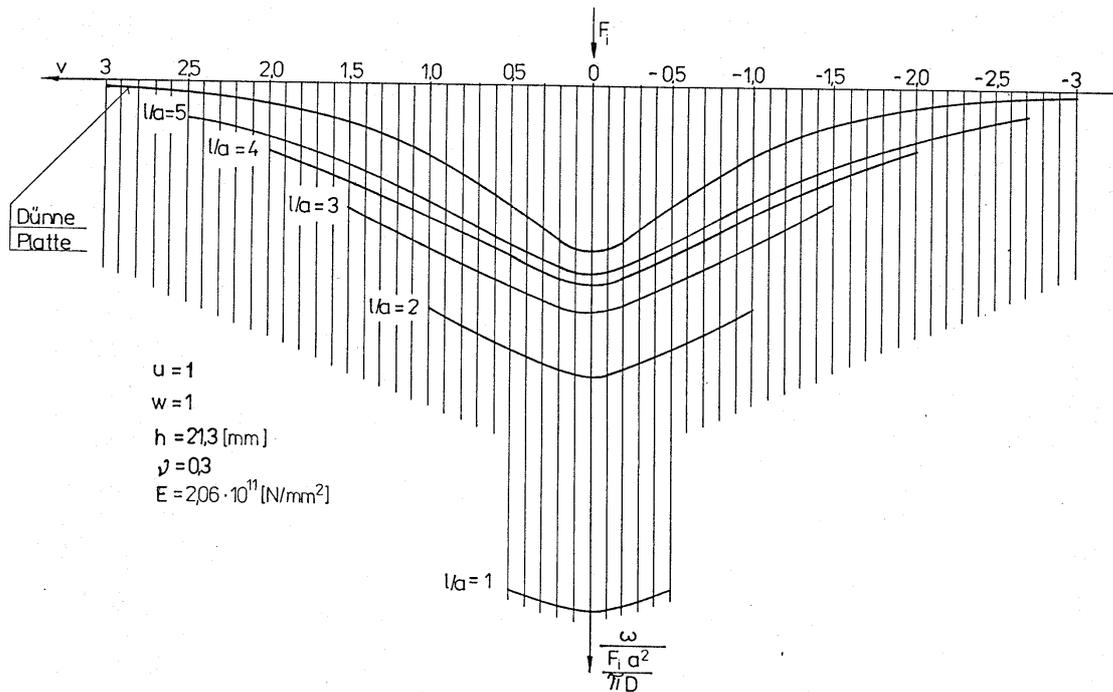


Bild 15. Biegung des freien Randes bei dünnen und dicken Platten in Abhängigkeit vom Verhältnis l/a für den Fall symmetrisch am Plattenrand angelegter Belastung

Bild 15 zeigt die Durchbiegung des freien Plattenrandes infolge symmetrischer Belastung durch eine Einzelkraft am freien Rand für verschiedene Werte l/a und für dicke als auch dünne Platten. Aus o. g. Betrachtungen aber auch aus früher erwähnten Berechnungen lässt sich schlussfolgern: je kleiner die Plattendicke und der Wert l/a sind, desto besser stimmen die erhaltenen Werte für die dicke und die dünne Platte überein.

Der Vollständigkeit halber sei noch vermerkt, dass das betrachtete Problem auch in einem anderen Zusammenhang behandelt wurde. Zu verweisen ist hier auf Arbeiten von Vlasov (1966), Selvaduari (1979) und Kolar (1990).

Literatur

Grossman K., Sabiniak H.G.: *Ugięcia cienkiej nieskończenie długiej płyty wspornikowej pod działaniem dowolnego obciążenia normalnego*. Zeszyty Naukowe Politechniki Łódzkiej, Mechanika, Łódź, (1981), z. 62.

Kolar, V.; Nemeč, I.: *Modelling of Soil-Structure Interaction*. Elsevier, Amsterdam, (1990).

Selvaduari, A.P.S.: *Elastic Analysis of Soil-Foundation Interaction*. Elsevier, Amsterdam, (1979).

Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S.: *Theory of plates and shells*. McGraw-Hill Book Company, Inc. New York, Toronto, London, (1959).

Umezawa K., Ishikawa J., Hagashi K.: Deflections due to a concentrated load on a cantilever thick plate of finite length for gears. *Bull. of JSME*, vol 12, No. 53, (1969).

Vlasov, V.Z.; Leontiev, U.N.: *Beams, Plates and Shells on Elastic Foundations*. Israel Program for Scientific Translation, Jerusalem, (1966).

Weber C., Banaschek K.: *Formänderung und Profilrücknahme bei gerade- und schrägverzahnten Rädern*. Friedrich, Vieweg & Sohn, Braunschweig, (1955).

Adressen: Prof. Dr.-Ing. habil. Henryk Gregor Sabiniak, TU Lodz, 90-924 Lodz; Prof. Dr.-Ing. Wilfried Franke, 06217 Merseburg, Horststr. 1.
e-mail: sabiniak@ktoiw.p.lodz.pl