TECHNISCHE MECHANIK, Band 25, Heft 2, (2005), 115-119
Manuskripteingang: 29. Dezember 2004

Das Präzisieren der Formel für die Zugkraft bei Rollreibung

V. Volov

Es wird das Rollen eines Rads mit einem Gleitlager auf einer ebenen Fläche betrachtet und für dieses Rollsystem die Formel für die Zugkraft präzisiert.

1 Einleitung

Für den Fall, dass ein Rad auf horizontaler Fläche mit konstanter Geschwindigkeit fortbewegt wird und dass außer dem Rollwiderstand noch der durch Lagerreibung entstehende Widerstand zu überwinden ist, werden in der Technischen Mechanik zwei Varianten der Zugkraftberechnung des Rollrads ausgewiesen.
Die erste Variante: Man fasst den Rollwiderstand und die Lagerreibung zusammen zum Fahrwiderstand, wie das zum Beispiel im Techniker Handbuch von Böge (1999) oder in der Technischen Mechanik von Mayer u.a. (2003) angegeben wird. Die entsprechende Formel für die Zugkraft sieht folgendermaßen aus:

$$P = N \cdot \mu_f \quad , \tag{1}$$

wobei P die Zugkraft, N die vertikale Radlast, μ_f die Fahrwiderstandszahl ist.

Diese Methode hat den Nachteil, dass man die Fahrwiderstandszahl für das gesamte System (das Rad mit dem Lager) experimentell durch Messung der erforderlichen Zugkraft feststellen muss.
Die zweite Variante: Die Rollreibung und die Lagerreibung erfasst man getrennt, zum Beispiel gemäß dem Handbuch für Techniker und Ingenieure von Krist (1983). In diesem Fall schreibt man gewöhnlich die Formel für die Zugkraft folgenderweise.

$$P = \frac{N}{R}(f + r\mu) , \tag{2}$$

wobei P die Zugkraft, N die vertikale Radlast, R der Radradius, r der Lagerradius, μ die Gleitreibzahl, f Hebelarm der Rollreibung ist.

Die zweite Variante gibt mehr Freiheit für Berechnungen Räderkonstruktionen im Vergleich mit der ersten Variante ohne die speziellen experimentellen Ermittlungen von Reibungs- und Rollreibungskoeffizienten durchzuführen, weil große Datenbanken mit Werten beider Reibungsarten in Nachschlagewerken vorhanden sind. Aber, wie eine Analyse weiter zeigt, ist die Formel (2) physikalisch nicht ganz korrekt, denn bei der Herleitung dieser Formel wird angenommen, dass die Reibungskraft im Lager proportional der vertikalen Radlast ist und zu ihr orthogonal gerichtet ist. In Wirklichkeit gibt es keinen orthogonalen Zusammenhang zwischen den Richtungen der Reibungskraft und Radlast. Aus diesem Grunde kann die Formel (2) nicht für alle Fälle angewendet werden. Zum Beispiel führt diese Formel bei großen Werten μ zu beachtlichen Berechnungsfehlern. Deshalb besteht das Ziel dieser Arbeit darin, die Formel für die Zugkraft des Rollrads zu präzisieren um ihren Anwendungsbereich zu erweitern und die entstehenden Berechnungsfehler auszuschließen.

2 Berechnungssystem

Betrachtet wird ein System, das aus einem Rad mit Gleitlager besteht. Dieses System wird im Bild 1 dargestellt. Das Rad rollt man auf einer horizontalen Fläche mit konstanter Geschwindigkeit nach rechts. Die horizontale Zugkraft P greift an der Achse an. Die Belastung N wirkt vertikal auf die Achse. An der Achse muss ebenfalls das Reaktionsmoment M angesetzt werden, um ein Moment der Reibungskraft zwischen der Achse und der Radbuchse zu kompensieren. Außerdem wirkt auf das Rad die Normalkraft N_1 und die Rollwiderstandskraft F_1 vom Boden. Die Normalkraft N_1 und die Rollwiderstandskraft F_1 wirken im Punkt K, der von der

Koordinatenachse y um den Wert f (sog. Hebelarm der Rollreibung) abgesetzt ist. Den Punkt K bezeichnet man als „Kipppunkt“. Wegen der geringen Eindrücktiefe kann man bei der weiteren Lösung dieses Systems den Kippabstand a gleich dem Rollradius R setzen, d.h. $a \approx R$.

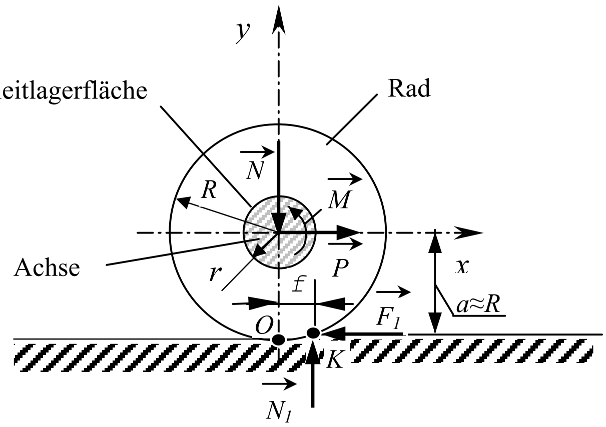

Bild 1. Kräfte beim Abrollen des Rollsystems

P Zugkraft, M Reaktionsmoment, N Belastung, N_1 Normalkraft, F_1 Rollwiderstandskraft, f Hebelarm der Rollreibung, R Radradius, r Lagerradius, a Kippabstand.

Bei gleichförmiger Rollbewegung herrscht Gleichgewicht, deshalb kann man dieses System als absolut starre Körper betrachten.
Das System enthält fünf Reaktionen, aus denen vier unbekannt sind. Deshalb benötigt man noch eine Ausschnittsbetrachtung – die Achse, deren Berechnungsmodell im Bild 2 gezeigt wird.

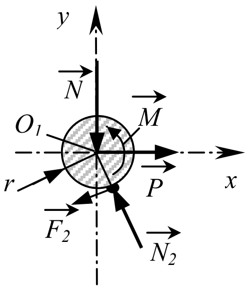

Bild 2. Die Kräfte bei ausgeschnittener Achse

F_2 Lagerreibungskraft, M Reaktionsmoment, P Zugkraft, N Belastung,
N_2 Reaktionskraft, die auf die Achse von der Radbuchse wirkt, r Lagerradius

3 Ermittlung der Zugkraft

Aus den Bildern 1 und 2 lassen sich die Gleichgewichtsbedingungen ablesen.
Aufgrund des Bildes 1:

$$\sum M_{(K)} = 0 ; \qquad P \cdot R - M - N \cdot f = 0 \tag{3}$$

Aufgrund des Bildes 2:

$$\sum M_{(O_1)} = 0 ; \qquad M - F_2 \cdot r = 0 \tag{4}$$

Außerdem kann die Lagerreibungskraft F_2 aufgrund des Coulombschen Reibungsgesetzes durch folgenden Ausdruck definiert werden:

$$F_2 = N_2 \cdot \mu \ , \tag{5}$$

wobei μ die Gleitreibzahl, N_2 die Reaktionskraft ist.

Um die vierte Gleichung aufzustellen, betrachtet man den Zusammenhang der Kräfte, die im Bild 2 dargestellt sind. Das entsprechende grafische Kräftepolygon wird im Bild 3 dargestellt.

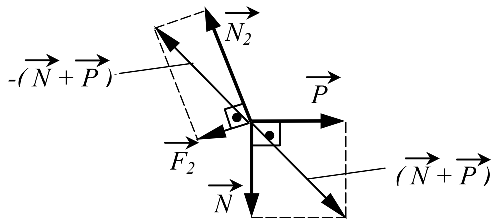

Bild 3. Kräftepolygon

Aufgrund des Bildes 3 ergibt sich die Vektorgleichung:

$$\vec{P}+\vec{N}+\vec{F_2}+\vec{N_2} = 0 \ . \tag{6}$$

Daraus wird $\vec{F}_2+\vec{N}_2 = -(\vec{P}+\vec{N})$. Da $\vec{F}_2 \perp \vec{N}_2$ und $\vec{P} \perp \vec{N}$ sind, gilt die Gleichung $F_2{}^2 + N_2{}^2 = N^2 + P^2$. Damit wird:

$$N_2 = \sqrt{N^2 + P^2 - F_2{}^2} \ . \tag{7}$$

Gleichung (5) in (7) eingesetzt ergibt $F_2 = \mu\sqrt{N^2 + P^2 - F_2{}^2}$. Damit gilt $F_2{}^2 = \mu^2 N^2 + \mu^2 P^2 - \mu^2 F_2{}^2$ und dann ergibt sich:

$$F_2 = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} \sqrt{N^2 + P^2} \ . \tag{8}$$

Aus (3) folgt:

$$M = P \cdot R - N \cdot f \ . \tag{9}$$

Gleichung (8) in (4) und dann (4) in (9) eingesetzt ergibt:

$$P \cdot R - N \cdot f = \frac{\mu \ r}{\sqrt{1+\mu^2}} \sqrt{N^2 + P^2} \ , \tag{10}$$

oder

$$(P \cdot R - N \cdot f)^2 = \frac{\mu^2 r^2}{1+\mu^2} (N^2 + P^2) \ . \tag{11}$$

Daraus kann man den Ausdruck für P ermitteln. Aus der Umformung des Ausdrucks (11) ergibt sich:

$$P^2R^2 - 2P\cdot R\cdot N\cdot f + N^2 f^2 - \frac{\mu^2 r^2}{1+\mu^2}N^2 - \frac{\mu^2 r^2}{1+\mu^2}P^2 = 0 \quad , \tag{12}$$

oder

$$P^2(R^2 - \frac{\mu^2 r^2}{1+\mu^2}) - 2P\cdot R\cdot N\cdot f + N^2(f^2 - \frac{\mu^2 r^2}{1+\mu^2}) = 0 \quad . \tag{13}$$

Aus dieser quadratischen Gleichung folgt die sinnvolle Lösung:

$$P = \frac{2R\cdot N\cdot f + \sqrt{4R^2N^2f^2 - 4N^2(R^2 - \frac{\mu^2 r^2}{1+\mu^2})\cdot(f^2 - \frac{\mu^2 r^2}{1+\mu^2})}}{2(R^2 - \frac{\mu^2 r^2}{1+\mu^2})} \quad . \tag{14}$$

Nach Vereinfachung ergibt sich:

$$P = N\cdot\frac{R\cdot f + r\mu\sqrt{\frac{R^2+f^2}{1+\mu^2} - \frac{\mu^2 r^2}{(1+\mu^2)^2}}}{R^2 - \frac{\mu^2 r^2}{1+\mu^2}} \quad , \tag{15}$$

oder

$$P = \frac{N}{R}\cdot\frac{f(1+\mu^2) + r\mu\sqrt{(1+\frac{f^2}{R^2})\cdot(1+\mu^2) - \frac{\mu^2 r^2}{R^2}}}{1+\mu^2(1-\frac{r^2}{R^2})} \quad . \tag{16}$$

Also stellt der Ausdruck (16) die Zugkraft des Rollrads auf einer horizontalen ebenen Fläche bei Lagerreibung dar.

4 Analyse der Formeln für die Zugkraft

Der Ausdruck (16) sieht auf den ersten Blick kompliziert aus. Aber wenn man in dieser Formel $\mu = 0$ annimmt, d.h. die Lagerreibungskraft ist gleich null, dann ergibt sich der Ausdruck:

$$P = N\cdot\frac{f}{R} \quad . \tag{17}$$

Dieses Ergebnis wird oft in der Praxis für das rollende Rad angenommen, wenn die Lagerreibung vernachlässigt werden kann. Dies ergibt sich ebenfalls, wenn in (16) $r = 0$ angenommen wird.
Wenn man in (16) $f = 0$ annimmt, d.h. der Radrollwiderstand ist gleich null, dann ergibt sich der Ausdruck:

$$P = N\cdot\frac{r\mu}{\sqrt{R^2 + \mu^2(R^2 - r^2)}} \quad . \tag{18}$$

Man kann also feststellen, dass die Formeln (2) und (16) vollständig nur bei $\mu = 0$ übereinstimmen.
Um zu bewerten, wie groß der Unterschied zwischen der Formel (2) und Formel (16) bei der Zugkraftberechnung ist, wurden Berechnungen und graphische Auswertung des folgenden Ausdruckes durchgeführt:

$$\delta = \left| \frac{P - \tilde{P}}{P} \right| \cdot 100\% \quad , \tag{19}$$

wobei δ der Wert des Fehlers, der bei Berechnungen nach Formel (2) entstehen kann, $\tilde{P}$ der Wert der Zugkraft, der nach der Formel (2) bestimmt wird, P der Wert der Zugkraft, der nach der Formel (16) bestimmt wird, ist.

Mit Hilfe des Ausdrucks (19) wurde die Auswertung durchgeführt, die eine Vorstellung gibt, wie stark die Reibzahl μ und der relative Radius $\rho = \frac{r}{R}$ den Fehler δ beeinflussen können. Die Ergebnisse werden im Bild 4 veranschaulicht.

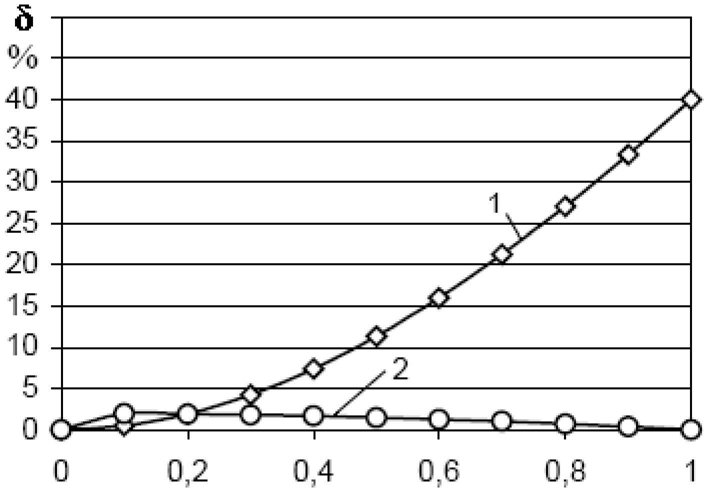

Bild 4. Abhängigkeit des Fehlers δ von μ - und ρ -Änderungen

Im Bild 4 zeigt Kurve 1 die Abhängigkeit des Fehlers δ von den μ -Änderungen von 0 bis 1, bei $f = 0$ und $\rho = 0{,}2$. Kurve 2 zeigt die Abhängigkeit des Fehlers δ von den ρ -Änderungen von 0 bis 1, bei $f = 0$ und $\mu = 0{,}2$.
In diesem Beispiel beeinflussen die ρ-Änderungen die Fehler nicht mehr als 2 %. Die μ -Änderung beeinflusst die Fehler wesentlich mehr. Bei μ =1 erreicht der Fehler einen Wert von 40%.

5 Zusammenfassung

Es wurde festgestellt, dass die in der technischen Literatur vorhandene Formel (2) für die Ermittlung der Zugkraft bei der Roll- und Lagerreibung nicht korrekt ist und zu beachtlichen Fehlern führen kann. Es wurde gezeigt, dass die Lagerreibung wesentlichen Einfluss auf die Größe der Berechnungsfehler hat.
Um diese Fehler auszuschließen wurde der Ausdruck (16) ermittelt, der die Präzision der Berechnungen der Zugkraft bei Rollreibung erhöht.
Die Analyse des Ausdruckes (16) zeigt, dass in der Praxis der Ausdruck (16) vereinfacht werden kann; zum Beispiel auf die einfachen Formeln (17) und (18) gebracht wird. Die Formel (17) zeigt, wenn die Lagerreibung vernachlässigt wird, die vollständige Übereinstimmung der Formeln (2) und (16).

Literatur

Böge, A.: *Das Techniker-Handbuch: Grundlagen und Anwendungen der Maschinenbau-Technik*, Vieweg&Sohn Verlag GmbH, Braunschweig; Wiesbaden, (1999), 262-263.

Mayer. H.G.; Schwarz. W.; Stanger. W.: *Technische Mechanik und Festigkeitslehre*, Verlag Handwerk und Technik GmbH, Hamburg, (2003), 112-113.

Krist. T.: *Handbuch für Techniker und Ingenieure: Formeln, Daten, Begriffe,* Technik Tab. Verlag, Darmstadt: Hoppenstedt, (1988), 12-12.

Adresse: Dr.-Ing. Valerij Volov, Im Holder 5, D-69231 Rauenberg.
E-Mail: v_volov@t-online.de