

Parameteridentifikation und Virtuelles Prototyping von Nanopositionier- und Nanomessmaschinen basierend auf Methoden der Mehrkörperdynamik

K. Zimmermann, I. Zeidis, J. Grabow, E. Gerlach, A. Tröbs

In Nanopositionier- und Nanomessmaschinen sollen hochdynamische Präzisionspositionierungen durch Kombination von Positioniersystemen mit großen und kleinen Bewegungsbereichen erreicht werden. Mit einer modellgestützten Simulation des dynamischen Verhaltens in frühen Phasen des konstruktiven Entwicklungsprozesses können Positionierbereiche von 450 mm x 450 mm mit Nanometerreproduzierbarkeit bei Bahngeschwindigkeiten bis 0,5 m/s erreicht werden. Asymptotische Methoden werden auf Minimalmodelle der NPM-Maschine angewendet, um analytische Lösungen für Schwingungsprobleme zu entwickeln. Dabei wird der Fokus nicht vorrangig auf die Lösung der Direkten Aufgabe der Dynamik gelegt. Vielmehr wird durch den Vergleich der analytischen Ausdrücke für die stationären Amplituden mit experimentell ermittelten Werten die Bestimmung von Parametern, die der unmittelbaren messtechnischen Erfassung nicht zugänglich sind, möglich. Zur Ermittlung dynamischer Steifigkeiten und Dämpfungen wird die Methode der Inertialkraftherregung entwickelt.

1 Einleitung

Nanopositionier- und Nanomessmaschinen (NPM-Maschinen) sind technologische Ausrüstungen, welche die Positionierung, Messung, Antastung, Manipulation und Bearbeitung von Objekten durch das abgestimmte Zusammenwirken von Positionier-, Mess- sowie Bearbeitungssystemen mit Nanometerpräzision ermöglichen. Die wissenschaftlichen Herausforderungen bestehen darin, dass derartige Maschinen Forderungen nach immer größeren Bewegungsbereichen mit extremen Genauigkeiten und hohen Positioniergeschwindigkeiten genügen müssen. In den Jahren 2010 – 2014 sollen Positionierbereiche von 450 mm x 450 mm mit Nanometerreproduzierbarkeit bei Bahngeschwindigkeiten bis 0,5 m/s erreicht werden (Jäger, 2004).

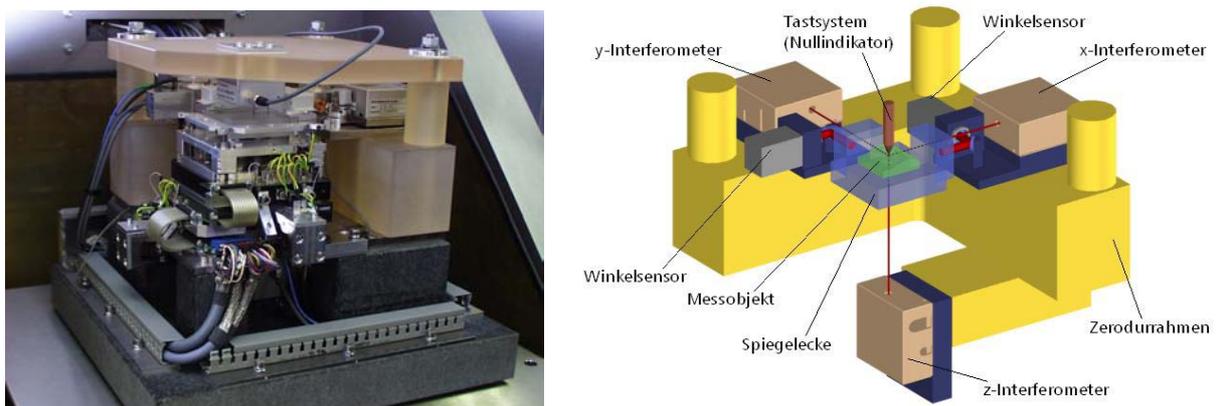


Bild 1. Nanopositionier- und Nanomessmaschine (li.) mit den wesentlichen Baugruppen zur abbefehlerfreien Messung (re.)

Solche hochdynamischen Positionierungen sollen durch Kombination von Positioniersystemen mit großen und kleinen Bewegungsbereichen erreicht werden. Mit einer modellgestützten Simulation des dynamischen Verhaltens in frühen Phasen des konstruktiven Entwicklungsprozesses können die genannten Parameter erreicht wer-

den. Eine ausschließlich experimentell gestützte Produktentwicklung ist nicht möglich. Der Abstraktionsprozess der Maschine und ihrer Teilsysteme führt zum Mehrkörpersystem als geeignetem Modell im Virtuellen Prototyping. Neben der computergestützten Simulation des dynamischen Verhaltens des mechatronischen Gesamtsystems werden analytische Methoden, basierend auf Minimalmodellen effizient eingesetzt.

In der vorliegenden Arbeit werden Modelle, Methoden und Ergebnisse zur

- Parameteridentifikation von dynamischen Steifigkeiten und Dämpfungen
- Untersuchung des stationären Zustandes bei direkter und indirekter Erregung und zur
- Bewertung von Reibungseinflüssen

vorgestellt.

Die weitgehend analytisch untersuchten Minimalmodelle haben zunächst einen niedrigen Freiheitsgrad und berücksichtigen nichtlineare Strukturabhängigkeiten im System. Die Systemparameter auf dieser Ebene der Modellbildung sind weitgehend bekannt. Gleichzeitig ermöglichen diese Modelle auf der Basis Asymptotischer Methoden qualitative und quantitative Aussagen zum Systemverhalten bzw. in der inversen Problemstellung zu Systemparametern.

2 Mathematisches Modell

Für die Erfüllung der Messaufgabe der NPM-Maschine ist die Kenntnis des stationären Zustandes der Messaufnahme 1 bei direkter Erregung über äußere Kräfte und nach indirekter Erregung am Fundament 2 von großer Bedeutung. Zur Untersuchung des stationären Zustandes wurde das in Bild 2 gezeigte mechanische Modell mit dem Freiheitsgrad eins verwendet. Im Modell werden neben der Wegerregung $x_2(t)$ und der periodischen äußeren Erregung $G(t)$ viskose und trockene Reibung berücksichtigt, aber als klein gegenüber den elastischen Kräften und Trägheitskräften angesehen.

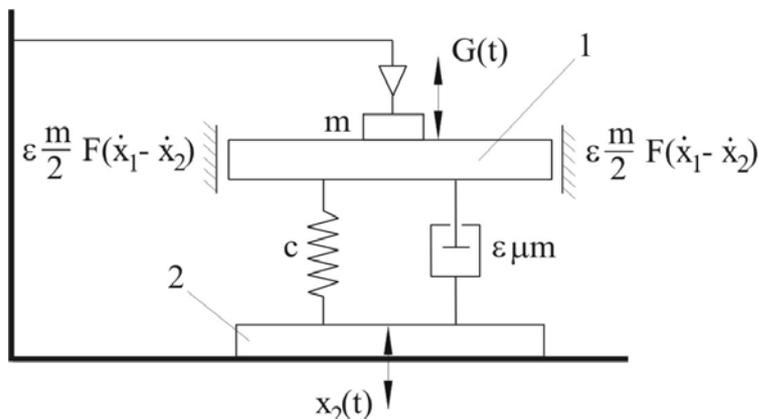


Bild 2. Mechanisches Modell zur Schwingungsuntersuchung

Asymptotische Methoden zur Behandlung nichtlinearer Schwingungsdifferentialgleichungen mit kleinen Parametern sind bekannt. Ihre ausführliche Darstellung findet man u.a. in Kauderer (1958), Hayashi (1964), Andronov (1965), Bogoljubow und Mitropolski (1965), Baquière (1966), Hagedorn (1978), Arnold (1997), Guckenheimer und Holmes (1997), Magnus und Popp (1997), Blekhnman (2000). Nichtlineare Systeme mit unstetigen Funktionen, wie man sie zum Beispiel bei Betrachtung trockener Reibung erhält, sind speziell in den Arbeiten von Den Hartog (1930), Reissig (1954), Glocker und Pfeifer (1993), Deimling und Szilagy (1994) enthalten. In der vorliegenden Arbeit werden die asymptotische Methoden in Verbindung mit messtechnischen Verfahren zur Bestimmung der Systemparameter genutzt. Die Anwendung der Mittelungsmethode in der Umgebung der Hauptresonanz führt zu einer Gleichung für die stationäre Amplitude in Abhängigkeit von der Erregung und zunächst angenommenen, aber prinzipiell unbekanntem Parametern wie der Reibkraft. Durch den Vergleich der analytischen Ausdrücke für die stationären Amplituden mit experimentell ermittelten Werten gelingt die Bestimmung von Parameter, die der unmittelbaren messtechnischen Erfassung nicht oder nur mit hohem Aufwand zugänglich sind.

2.1 Indirekte Erregung $x_2(t)$ über das Fundament

Zunächst wird der Fall einer ausschließlich kinematischen Erregung $x_2(t)$ des Fundamentes 2 angenommen. Die Bewegungsgleichung mit dem Impulssatz lautet:

$$m \ddot{x}_1 + c(x_1 - x_2) + 2\varepsilon \frac{m}{2} F(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \varepsilon \mu m(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = 0. \quad (1)$$

Dabei ist c die Steifigkeit und $\varepsilon \mu$ der Dämpfungskoeffizient. Mit $\varepsilon m F(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$ wird die trockene Reibung in Form einer Coulombschen Reibkraft

$$F(\dot{z}) = \begin{cases} -F, & \dot{z} < 0, \\ F_0, & \dot{z} = 0, \\ +F, & \dot{z} > 0 \end{cases} \quad -F \leq F_0 \leq +F. \quad (2)$$

bezeichnet.

Die indirekte Erregung über das Fundament, mit einer als klein angenommenen Amplitude εb , wird mit der mit der harmonischen Funktion

$$x_2 = \varepsilon b \sin \nu t = \varepsilon b \sin \psi \quad (3)$$

beschrieben.

Nach dem Einsetzen von (3) in (1) erhält man die Bewegungsdifferentialgleichung in der Form

$$\ddot{x} + \omega^2 x + \varepsilon \left[F(\dot{x} - \varepsilon b \nu \cos \psi) + \mu \dot{x} - \omega^2 b \sin \psi - \varepsilon \mu b \nu \cos \psi \right] = 0 \quad (4)$$

mit $x_1 = x$ und $\omega^2 = \frac{c}{m}$.

Für die Entwicklung einer analytischen Lösung von (4) verwenden wir eine Mittelungsmethode (Bogoljubow und Mitropolski, 1965). Dazu werden neue Variablen a, φ bzw. θ gemäß

$$x = a \cos \varphi = a \cos(\omega t + \theta), \quad \dot{x} = -a \omega \sin \varphi \quad (5)$$

eingeführt. Man erhält das Differentialgleichungssystem für die langsame Bewegung:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\varepsilon \frac{\sin \varphi}{\omega} \left[-F(-a \omega \sin \varphi - \varepsilon b \nu \cos \psi) + \mu a \omega \sin \varphi + \omega^2 b \sin \psi + \varepsilon \mu b \nu \cos \psi \right], \\ \dot{\theta} &= -\varepsilon \frac{\cos \varphi}{a \omega} \left[-F(-a \omega \sin \varphi - \varepsilon b \nu \cos \psi) + \mu a \omega \sin \varphi + \omega^2 b \sin \psi + \varepsilon \mu b \nu \cos \psi \right], \\ \dot{\psi} &= \nu. \end{aligned} \quad (6)$$

Das Verhalten des Systems wird in der Umgebung der Hauptresonanz

$$\nu = \omega + \varepsilon \Delta$$

untersucht. Dafür wird eine neue langsame Variable $\xi = \psi - \varphi = \nu t - (\omega t + \theta)$ eingeführt, womit das System (6) die endgültige Form

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\varepsilon \frac{\sin \varphi}{\omega} \left[-F(-a \omega \sin \varphi - \varepsilon b \nu \cos(\xi + \varphi)) + \mu a \omega \sin \varphi + \omega^2 b \sin(\xi + \varphi) + \varepsilon \mu b \nu \cos(\xi + \varphi) \right], \\ \dot{\xi} &= \varepsilon \frac{\cos \varphi}{a \omega} \left[-F(-a \omega \sin \varphi - \varepsilon b \nu \cos(\xi + \varphi)) + \mu a \omega \sin \varphi + \omega^2 b \sin(\xi + \varphi) + \varepsilon \mu b \nu \cos(\xi + \varphi) \right] + \varepsilon \Delta \end{aligned} \quad (7)$$

annimmt.

In Anwendung der Mittelungsmethode wird eine Mittelung der rechten Seiten von (7) über die schnelle Variable φ durchgeführt, d.h. die rechten Seiten werden der Operation $\langle \dots \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\dots) d\varphi$ unterzogen.

Wegen

$$\begin{aligned} \langle \sin^2 \varphi \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{2}, & \langle \sin \psi \cdot \sin \varphi \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(\xi + \varphi) \cdot \sin \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \cos \xi, \\ \langle \sin \psi \cdot \cos \varphi \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(\xi + \varphi) \cdot \cos \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \sin \xi, & \langle \sin \varphi \cdot \cos \varphi \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin \varphi \cdot \cos \varphi d\varphi = 0, \\ \langle F(-a\omega \sin \varphi - \varepsilon b \nu \cos \psi) \cdot \sin \varphi \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(-a\omega \sin \varphi - \varepsilon b \nu \cos \psi) \cdot \sin \varphi d\varphi = -\frac{2F}{\pi} + O(\varepsilon), \\ \langle F(-a\omega \sin \varphi - \varepsilon b \nu \cos \psi) \cdot \cos \varphi \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(-a\omega \sin \varphi - \varepsilon b \nu \cos \psi) \cdot \cos \varphi d\varphi = 0 + O(\varepsilon) \end{aligned}$$

und bei Berücksichtigung von ausschließlich Termen der Ordnung ε erhält man:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\varepsilon \left(\frac{2F}{\pi\omega} + \frac{\mu}{2} a + \frac{\omega b}{2} \cos \xi \right), \\ \dot{\xi} &= \varepsilon \left(\frac{\omega b}{2} \cdot \frac{\sin \xi}{a} + \Delta \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Da gemäß Aufgabenstellung nur stationäre Amplituden der Form $a = \text{const.}$ bzw. $\dot{a} = 0$ interessieren folgt aus (8) auch $\xi = \text{const.}$ bzw. $\dot{\xi} = 0$. Nach dem Ausschließen von ξ durch Gleichsetzen der rechten Seiten von (8) folgt die Gleichung für die Amplitude a

$$\left(\mu^2 + 4\Delta^2 \right) \cdot a^2 + \frac{8F\mu}{\pi\omega} \cdot a + \frac{16F^2}{\pi^2\omega^2} - \omega^2 b^2 = 0. \quad (9)$$

Wenn $b > \frac{4F}{\pi\omega^2}$ gilt, hat die Gleichung (9) eine reelle positive Lösung für die Amplitude a

$$a = \frac{-4F\mu + \sqrt{\pi^2\omega^4 b^2 (\mu^2 + 4\Delta^2) - 64F^2\Delta^2}}{\pi\omega(\mu^2 + 4\Delta^2)}. \quad (10)$$

Wenn andererseits die Amplitude a bekannt ist und es ist die unbekannte Reibkraft F , welche nicht einer unmittelbaren Messung zugänglich ist, zu bestimmen, dann folgt aus (10) der Ausdruck für F

$$F = \frac{\pi\omega}{4} \left(-\mu a + \sqrt{\omega^2 b^2 - 4\Delta^2 a^2} \right), \quad b > a \frac{\sqrt{\mu^2 + 4\Delta^2}}{\omega}. \quad (11)$$

Diese Problematik der Parameteridentifikation wird im Abschnitt 3 ausführlich betrachtet. Zunächst soll aber die Frage nach der Stabilität der gefundenen Lösung (Bewegung mit konstanter Amplitude und Phase) diskutiert werden.

2.2 Stabilität der Bewegung

Für den Beweis der Stabilität der Bewegung wird das zu (8) variierte System

$$\begin{aligned}\delta \dot{a} &= -\varepsilon \left(\frac{\mu}{2} \delta a - \frac{\omega b}{2} \sin \xi \cdot \delta \xi \right), \\ \delta \dot{\xi} &= -\varepsilon \left(\frac{\omega b}{2} \cdot \frac{\sin \xi}{a^2} \delta a - \frac{\omega b}{2} \cdot \frac{\cos \xi}{a} \delta \xi \right)\end{aligned}\quad (12)$$

betrachtet. Das charakteristische Polynom für das System (12) lautet:

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda \cdot \varepsilon \left(\mu + \frac{2F}{a\pi\omega} \right) + \varepsilon^2 \left(\frac{\mu F}{a\pi\omega} + \frac{\mu^2}{4} + \Delta^2 \right). \quad (13)$$

Alle Koeffizienten des Polynoms zweiter Ordnung sind stets positiv, womit die Realteile seiner Wurzeln stets negativ bei beliebigen Parameterwerten sind. Damit ist die stationäre Lösung (10) des Systems (8) stabil.

2.3 Direkte Erregung $G(t)$ an der Messaufnahme

Es sei im Folgenden $x_2 \equiv 0$ und auf die Messaufnahme wirke eine kleine äußere Kraft $G(t)$. Die Bewegungsdifferentialgleichung lautet:

$$m \ddot{x} + c x + \varepsilon m F(\dot{x}) + \varepsilon m \mu \dot{x} - G(t) = 0, \quad (14)$$

wobei die Erregung $G(t)$ als harmonische Funktion in der Form

$$G(t) = \varepsilon m G_0 \sin \nu t = \varepsilon m G_0 \sin \psi. \quad (15)$$

angenommen wird. Damit erhält die Differentialgleichung (14) die Form

$$\ddot{x} + \omega^2 x + \varepsilon [F(\dot{x}) + \mu \dot{x} - G_0 \sin \psi] = 0. \quad (16)$$

Auf diese Gleichung wird erneut die im Abschnitt 2.1. beschriebene Prozedur angewendet. Das heißt

- es werden neue Variable gemäß $x = a \cos \varphi = a \cos(\omega t + \theta)$, $\dot{x} = -a \omega \sin \varphi$ und
- das System wird in der Umgebung der Hauptresonanz $\nu = \omega + \varepsilon \Delta$ untersucht (neue langsame Variable $\xi = \psi - \varphi = \nu t - (\omega t + \theta)$).

Nach der Mittelungsprozedur erhält man das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}\dot{a} &= -\varepsilon \left(\frac{2F}{\pi\omega} + \frac{\mu}{2} a + \frac{G_0}{2\omega} \cos \xi \right), \\ \dot{\xi} &= \varepsilon \left(\frac{G_0}{2\omega} \cdot \frac{\sin \xi}{a} + \Delta \right).\end{aligned}\quad (17)$$

Wie zu erkennen, haben die Systeme (8) und (17) die gleiche Form, wenn man $b = \frac{G_0}{\omega^2}$ setzt. Die mathematischen Modelle für die Schwingungen der NPM-Maschine bei kinematischer Erregung am Fundament und direkter Erregung am Messtisch sind identisch, mit einer Genauigkeit bis zu Gliedern der Ordnung ε^2 .

3 Identifikation von Systemparametern

Für ein Virtuelles Prototyping von Präzisionsmaschinen auf der Basis einer modellgestützten Simulation ist die Qualität der Modellparameter von entscheidender Bedeutung. Je besser die realen Parameter erfasst werden um so genauer ist die Vorhersage des zu erwartenden dynamischen Verhaltens (z.B. der Positioniergenauigkeit). Für die Identifikation müssen prinzipiell zwei Fälle unterschieden werden. Für das vorgestellte Modell der indirekten Erregung über Fundamentalschwingungen liegt der Schwerpunkt bei der Dimensionierung einer optimalen Isolation zwischen Fundament und Maschine.

Zum einen sollen dabei äußere Erregungen weitgehend abgeschirmt werden, zum anderen müssen innere Antriebskräfte der NPM möglichst schnell dissipiert werden. Dazu sind frequenzabhängige Steifigkeits- und Dämpfungsuntersuchungen notwendig.

Im zweiten Fall, der Erregung durch innere Antriebskräfte, ist die Kenntnis der dynamischen Koppelpstellenparameter der eingesetzten Baugruppen und ihrer Führungen entscheidend. Auch hier sind wiederum frequenzabhängige Steifigkeits- und Dämpfungsuntersuchungen notwendig.

Bei der NPM-Maschine treten für die dynamischen Untersuchungen konstruktionsbedingt folgende Anforderungen auf:

- Bestimmung sehr steif ausgelegter Baugruppen und Koppelstellen.
- zusätzlich auftretende trockene Reibung.
- Begrenzung der harmonische Erregerkräfte auf kleine Amplituden.

3.1 Methode der Inertialkrafterregung

Klassische Methoden und Untersuchungsansätze wie die Modalanalyse mittels Impulshammer oder Shaker erfüllen diese Anforderungen nur unzureichend. Der zur Identifikation notwendige Energieeintrag würde bei der Impulshammermethode zu nichtlinearen bzw. plastischen Deformationen der zu untersuchenden Baugruppen führen. Der Einsatz modaler Shaker birgt die Gefahr unerwünschter Steifigkeiten und Dämpfungen durch Gestellrückkopplungen. Um diese Problemstellungen zu umgehen wurde die Methode der Inertialkrafterregung zur Parameteridentifikation der NPM-Maschine favorisiert (Bild 3, re.).

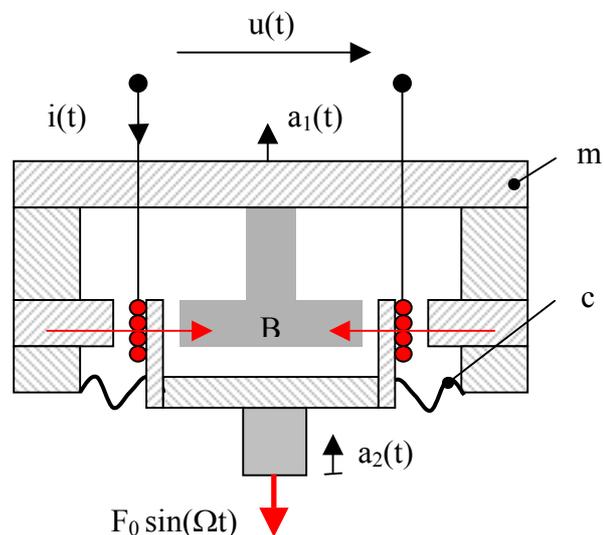


Bild 3. Versuchsaufbau zur Bestimmung der dynamischen Parameter der Schwingungsisolationsschicht (li.) und Inertialkrafterreger zur Erzeugung harmonischer Testsignale (re.)

Dazu wird ein elektrodynamisches Erregersystem direkt auf der zu untersuchenden Baugruppe der NPM-Maschine befestigt. Ein integriertes Regelsystem gewährleistet dabei eine konstante Erregerkraftamplitude F_0 über den zu untersuchenden Frequenzbereich. Gleichzeitig kann über einen integrierten Beschleunigungssensor a_2 die Strukturantwort gemessen werden. Ist das zu erwartende Systemverhalten linear lassen sich die

Strukturparameter z.B. aus der zugehörigen Ortskurve ermitteln. Bei nichtlinearem Systemverhalten besteht über die Wahl der Erregerkraftamplitude F_0 die Möglichkeit einfache Systemmodelle zu identifizieren.

Die schon unter 2. formulierte Bedingung an kleine Erregerkräfte stellt zusätzliche Forderungen an das Regelsystem. Eine sinnvolle Strukturantwort der NPM-Maschine ist erst im stationären Zustand zu erwarten. Das bedingt seitens des Regelsystems einen gewissen Energieeintrag in die zu untersuchende Koppelstelle. Hier kann wiederum die eingeführte Mittelungsmethode erfolgreich eingesetzt werden.

3.2 Theoretische und experimentelle Methoden zur Parameteridentifikation

Nachfolgend seien für ein Schwingungsmodell (z. B. Minimalmodell der NPM-Maschine mit Freiheitsgrad 1) die Parameter m (Messtischmasse), ω (Eigenkreisfrequenz) und μ (Dämpfungskonstante) als gegeben angenommen.

Außerdem sind mit F_0 und Ω die Amplitude bzw. Frequenz der resultierenden harmonischen Kraft $F(t)$ auf den Tisch 1 nach Erreichen des stationären Zustandes bekannt:

$$F(t) = F_0 \sin(\Omega t). \quad (18)$$

Diese Kraft kann im Ergebnis sowohl indirekter Erregung am Fundament (siehe $x_2(t)$) als auch direkter Erregung (siehe $G(t)$) entstehen.

In der weiteren Betrachtung wird der Zusammenhang der Parameter des mathematischen Modells mit der Amplitude und der Frequenz der gemessenen Kraft aufgezeigt.

Wie bekannt, wird die Lösung von (19) bzw. (14) in der Form

$$x = a \cos \varphi = a \cos(\omega t + \theta)$$

gesucht.

Nach einem Einschwingprozess stellt sich ein stationäres Regime, gekennzeichnet durch $a = \text{const}$ und $\xi = \varepsilon \Delta t - \theta = \text{const}$ (bzw. $\theta = \varepsilon \Delta t + \theta_0$), ein.

Dann ist mit

$$x = a \cos((\omega + \varepsilon \Delta)t + \theta_0), \quad (19)$$

die Kraft gleich

$$m \ddot{x} = -m a (\omega + \varepsilon \Delta)^2 \cos((\omega + \varepsilon \Delta)t + \theta_0). \quad (20)$$

Aus dem Vergleich der Beziehungen für die gemessene Kraft (18) und dem aus dem mathematischen Modell folgenden Ausdruck (20) erhält man

$$\Omega = \omega + \varepsilon \Delta, \quad \Phi_0 = m a \Omega^2$$

(hier θ_0 ist zum Beispiel $\frac{\pi}{2}$) und folglich gilt

$$a = \frac{\Phi_0}{m \Omega^2}, \quad \varepsilon \Delta = \Omega - \omega. \quad (21)$$

Damit sind die Werte für die Parameter a , ω , $\varepsilon \Delta$ in der Gleichung (9) ermittelt und diese Beziehung stellt den gesuchten Zusammenhang zwischen den unbekanntem Parametern b (oder G_0) und der trockenen Reibung F her, wenn außerdem die Zeit T_{exp} bis zum Erreichen des stationären Zustandes bekannt (Bild 4) ist. Über zunächst angenommene Parameter b (oder G_0) folgen aus (9) entsprechende Werte für F , womit anschließend das System (8) numerisch integriert wird. Es wird abschließend der Wert für die trockene Reibung F ausgewählt, bei der die ermittelte Zeit bis zum Eintreten des stationären Zustandes T_{num} der bekannten Zeit T_{exp} entspricht.

3.3 Experimentelle Ergebnisse und Vergleich der Methoden

Die NPM-Maschine wird zur Abschirmung der Bodenerregung auf ein elastisches Dämmmaterial aufgestellt.

Die dabei auftretende Flächenlast ist $200 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$. Zur Validierung der Ergebnisse der Mittelungsmethode (Abschn.

3.2) mit den Ergebnissen der experimentellen Parameteridentifikation (Abschn.3.1) soll die Messung der dynamischen Steifigkeit und Dämpfung des elastischen Dämmmaterials bei einer maximalen Erregerkraftamplitude von $F_0 = 0,5 \text{ N}$ mit dem Versuchsaufbau (Grabow, 2003) nach Bild 3 dienen.

Die ermittelte Einschwingzeit T_{exp} beträgt etwa 1,5 s (Bild 4).

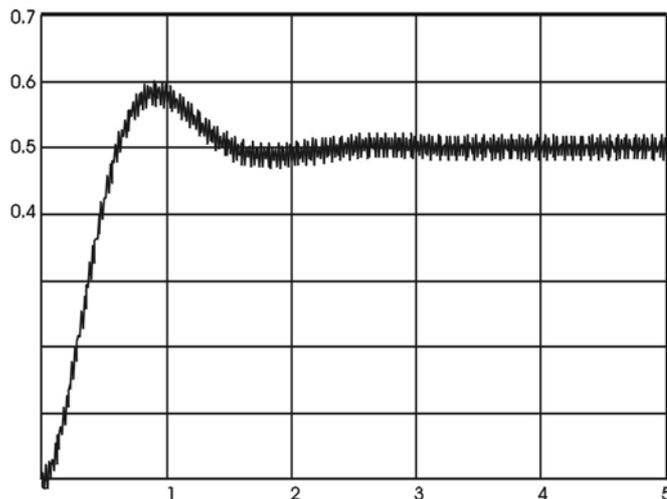


Bild 4. Experimentell ermittelter Zusammenhang Kraft $F(t)$ vs. Zeit t - Einschwingzeit $T_{\text{exp}} \approx 1,5 \text{ s}$

Neben der Amplitude der Kraft $F_0 = 0,5 \text{ N}$ und der Masse $m = 8,5 \text{ kg}$ ist die Frequenz $\varphi_0 = \frac{\Omega}{2\pi} = 42 \text{ Hz}$

($\Omega = 264 \text{ s}^{-1}$) gemessen worden, woraus $a = \frac{F_0}{m\Omega^2} = 0,8 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ folgt. Die Eigenfrequenz ist

$f_0 = \frac{\omega}{2\pi} = 40 \text{ Hz}$, woraus sich $\omega = 251 \text{ s}^{-1}$ und $\varepsilon\Delta = \Omega - \omega = 2\pi(\varphi_0 - f_0) = 12,6 \text{ s}^{-1}$ ergeben. Aus dem Lehr-

chen Dämpfungsmaß $D = \frac{\varepsilon\mu}{2\omega} = 0,001$ wurde für $\varepsilon\mu = 2D\omega = 0,5 \text{ s}^{-1}$ ermittelt.

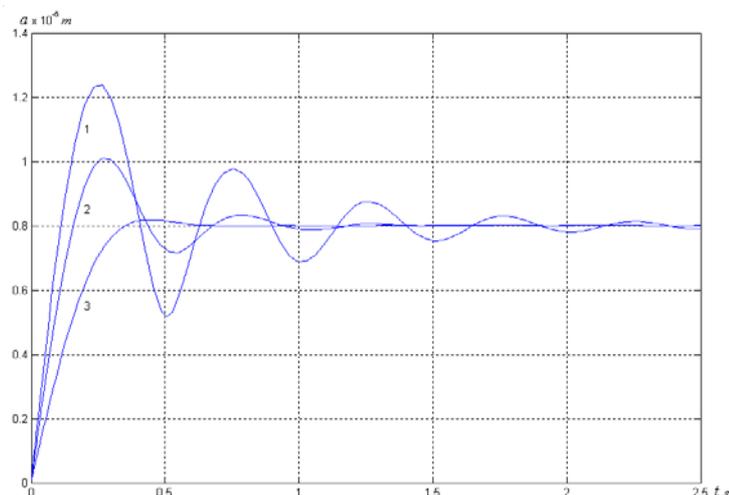


Bild 5. Amplitude a vs. Zeit t für verschiedene Werte F_p : 1 - 0,0085 N, 2 - 0,017 N, 3 - 0,043 N.

Im Bild 5 wird die numerisch ermittelte Abhängigkeit $a(t)$ der Amplitude der stationären Schwingung von der Zeit für 3 verschiedene Werte der trockenen Reibung $F_r = \varepsilon m F$ dargestellt. Der Einschwingzeit von $T_{\text{exp}} \approx 1,5$ s entspricht der Wert $F_r = 0,017$ N (Kurve 2 im Bild 5). Zur Abschätzung und Bewertung dieses Ergebnisses wird dieser Wert mit der Amplitude der viskosen Reibung (Dämpfung) $F_v = m a \Omega \varepsilon \mu = 0,009$ N verglichen. Es zeigt sich, dass die viskose Reibungskraft etwa zweimal kleiner als die trockene Reibung ist.

4 Zusammenfassung

Asymptotische Methoden werden auf mathematisch-mechanische Minimalmodelle der NPM-Maschine angewendet, um analytische Lösungen für Schwingungsprobleme unter Berücksichtigung von trockener Reibung und kleiner Störungen zu entwickeln. Dabei wurden Beziehungen für die stationäre Amplitude gefunden und die Stabilität der Bewegung gezeigt. Der Vergleich der gefundenen analytischen Ausdrücke für die Amplituden mit experimentell ermittelten Werten erlaubt die Bestimmung von Parameter, die der unmittelbaren messtechnischen Erfassung (z.B. trockene Reibung) nicht zugänglich sind. Zur Ermittlung dynamischer Steifigkeiten und Dämpfungen wird die Methode der Inertialkrafteerregung entwickelt, ein Versuchsaufbau vorgestellt und an einem Beispiel in der Anwendung demonstriert.

Literatur

- Andronov, A.A.; Witt A.A.; Chaikin S.E.: *Theorie der Schwingungen*. Akademie-Verlag, Berlin, (1965).
- Arnold, V.I.; Kozlov, V.V.; Neishtadt, A.I.: *Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics*. Springer Verlag (1997).
- Baquièrè, A.: *Nonlinear System Analysis*. Academic Press, New York and London, (1966).
- Blekhman I.I.: *Vibrational Mechanics: Nonlinear Dynamics. Effects, General Approach, Applications*. World Scientific, (2000).
- Bogoljubow, N.N.; Mitropolski, Yu.A.: *Asymptotische Methoden in der Theorie der nichtlinearen Schwingungen*. Akademie-Verlag, Berlin, (1965).
- Deimling, K.; Szilagyi, P.: Periodic solutions of dry friction problems. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, 45, (1994), 53 – 60.
- Den Hartog, J.P.: Forced vibrations with Coulomb and viscous friction. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, 53, (1930), 107 – 115.
- Glocker, Ch.; Pfeiffer, F.: Complementary problems in multibody systems with planar friction. *Archive of Applied Mechanics*. 63, (1993), p. 452 – 463.
- Guckenheimer, J.; Holmes, Ph.: *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer-Verlag, New York, (1997)
- Hagedorn, P.: *Nichtlineare Schwingungen*. Wiesbaden, (1978).
- Hayashi, C.: *Nonlinear Oscillations in Physical Systems*. McGraw-Hill, New York, (1964).
- Grabow, J.: Vorrichtung zur Bestimmung der dynamischen Steifigkeit, Deutsches Patentamt, Nr. 103 16865.6, (2003).
- Jäger, G.: Applications of miniature interferometers to nanomeasuring and nanopositioning devices. *Proceedings TEDA-Conference "Scanning Probe Microscopy, Sensors and Nanostructures"*, 24. - 27.05.2004, Peking, China, (2004), p. 23 – 24.
- Jean, M.; Pratt E.: A system of rigid bodies with dry friction. *International Journal of Engineering Science*, 23, (1985).

Kauderer, H.: *Nichtlineare Mechanik*. Springer – Verlag, Berlin – New York, (1958).

Magnus, K.; Popp, K.: *Schwingungen*. Teubner – Verlag, Stuttgart, (1997).

Reissig, R.: Erzwungene Schwingungen mit zäher und trockner Reibung. *Mathematische Nachrichten*, 11, (1954), p. 345 – 384.

Reissig, R.: Erzwungene Schwingungen mit zäher und trockner Reibung: Ergänzung. *Mathematische Nachrichten*, 12, (1954), p. 249 – 252.

Reissig, R.: Erzwungene Schwingungen mit zäher und trockner Reibung: Abschätzung der Amplituden. *Mathematische Nachrichten*, 12, (1954), p. 249 – 252.

Zimmermann, K.; Grabow, J.; Gerlach, E.; Tröbs, A.; Zeidis, I.; Behn, C.: Virtual Prototyping of Nanopositioning- and Nanomeasuring Machines using Methods of Multi-body System Dynamics. *Proc. of the 8th Intern. Conference on Mechatronics Technology*, Hanoi, Vietnam, (2004), p. 405 – 409.

Adresse: Prof. Dr. Klaus Zimmermann, Dr. Igor Zeidis, Dr. E. Gerlach, Dipl.-Ing. A. Tröbs, TU Ilmenau, Fakultät für Maschinenbau, PF 100565, D-98684 Ilmenau; Prof. Dr. Jörg Grabow, FH Jena, Fachbereich Maschinenbau, PF 10 03 14, D-07703 Jena.
E-mail: klaus.zimmermann@tu-ilmenau.de