

Bestimmung der Steifigkeitsparameter von zweilagigen Litzen

G. Fritzsche, K.-H. Gröbel, L. Sárközi

In der vorliegenden Arbeit werden Ergebnisse zu analytischen, numerischen und experimentellen Steifigkeitsuntersuchungen an zweilagigen Litzen vorgestellt. Berücksichtigt werden dabei die Grundbeanspruchungsarten Zug, Torsion und Biegung. Bei den analytischen und numerischen Verfahren wird linearelastisches Materialverhalten vorausgesetzt. Die analytische Bestimmung des Litzenverhaltens erfolgte auf der Grundlage zweier aus der Literatur bekannter Methoden. Bei der numerischen Berechnung der Steifigkeitsparameter wurde auf der Basis der Methode der Finiten Elemente für die Litzen ein einfaches Stab-Modell entwickelt. Für die Berechnung wurde das Finite-Element-Programm COSAR verwendet. Die experimentellen Untersuchungen erfolgten auf einer Hydropulsanlage. Da für die experimentellen Untersuchungen zweilagige Litzen mit speziellen Querschnittsabmessungen vorlagen, beschränken sich auch die numerischen Modelle auf diese Querschnitte. Eine Anwendung der Berechnungsmethoden und eine Entwicklung von Modellen auf deren Grundlage für ein- und mehrlagige Litzen mit anderen Querschnitten ist möglich.

1 Einleitung

Litzen sind Strukturen, die sich gegenüber Stäben mit gleichem Durchmesser, bei vergleichbarer Zugfestigkeit, durch eine wesentlich höhere Flexibilität auszeichnen. Daraus ergeben sich vielfältige Anwendungsmöglichkeiten. Hervorgehoben sei hier der Einsatz von Litzen als ein Hauptbestandteil in Kompositen. Kombinationen aus Drahtlitzen und Gummi findet man z.B. in Fahrzeugreifen (hier als Kombination von Stahlkorden und Gummi) (Feng, 1995; Kocak und Pidaparti, 2000), in Fördergurten (von der Wroge, 1991; Tonn, 1993), in Hochdruckschläuchen (Hufenbach u.a., 1994; Antal u.a., 1998) und in Riemen für Zahnriemenantriebe (Vanderbeken, 2001). Auch Einsatzmöglichkeiten als Bewehrungselemente in Beton sind bekannt (Avak und Wille, 2003; Wille, 2004).

Der sichere Einsatz von Litzen in diesen Anwendungsgebieten setzt eine gute Kenntnis ihres Verhaltens gegenüber den unterschiedlichen Belastungen voraus. Ein Einblick in grundlegende Aspekte des Seilverhaltens und in die Berechnungsmöglichkeiten charakteristischer Parameter wird in den Büchern von Costello (1997) und Feyrer (2000) gegeben.

Gegenwärtig sind eine Reihe von unterschiedlichen analytischen Modellen zur Bestimmung der mechanischen Eigenschaften von Litzen verfügbar. Diese Modelle bestehen in vielen Fällen aus einem geraden Kerndraht, um den eine oder mehrere Schichten helixförmig gewundener Drähte angeordnet sind. Ein Überblick über bekannte analytische Modelle und ihre Besonderheiten wird in Cardou und Jolicoeur (1997) gegeben. In der vorliegenden Arbeit werden das FasermodeLL von Lanteigne (1985) und das auf der Theorie der gekrümmten Stäbe von Love (1944) beruhende Modell von Costello (1997) zu Vergleichszwecken herangezogen.

Die für die numerische Analyse von Litzen entwickelten Finite-Element-Modelle (FE-Modelle) basieren auf finiten Balkenelementen, die in der kommerziell verfügbaren Finite-Element-Software COSAR implementiert sind (COSAR).

Die experimentellen Versuche erfolgten auf einer Hydropulsanlage vom Typ MTS 810. Die Versuchsproben wurden den ein- und zweilagigen Litzen, welche der ungarische Litzen- und Seilhersteller FUX-Werke (Miskolc, Ungarn) zur Verfügung stellte, entnommen.

2 Analytische Modelle zur Berechnung der Litzensteifigkeiten

Allgemein kann man für die rotationssymmetrische Litze als Randwertproblem den Zusammenhang zwischen den am freien Litzenende eingeleiteten Belastungen und den sich dort einstellenden Verformungen über die Litzensteifigkeiten in der Form

$$\begin{Bmatrix} F \\ M_t \\ M_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (EA)_L & k_{FM_t} & k_{FM_b} \\ k_{M_t F} & (GJ)_L & k_{M_t M_b} \\ k_{M_b F} & k_{M_b M_t} & (EI)_L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_L \\ \gamma_L \\ \kappa_L \end{Bmatrix} \quad (1)$$

herstellen. Hierin sind

F – die Längskraft (Zugkraft), M_t – das Torsionsmoment, M_b – das Biegemoment,

ε_L – die Längsdehnung, γ_L – die Drillung, κ_L – die Biegekrümmung,

$(EA)_L$, $(GJ)_L$ und $(EI)_L$ – die Dehn-, Verdreh- und Biegesteifigkeit der Litze,

k_{FM_t} , $k_{M_t F}$, k_{FM_b} , $k_{M_b F}$, $k_{M_b M_t}$ und $k_{M_t M_b}$ – die Koppelsteifigkeiten für die Kopplung von Längsbeanspruchung/Torsion, Längsbeanspruchung/Biegung und Torsion/Biegung

Unter der Voraussetzung einer konstanten Dehnung, Drillung und Biegekrümmung gilt

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_L \\ \gamma_L \\ \kappa_L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{u}{l} \\ \frac{\phi}{l} \\ \frac{\psi}{l} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

mit u als Verschiebung in Längsrichtung der Litze, ϕ als Torsionsverdrehwinkel und ψ als Biegewinkel des Endquerschnittes der Litze mit der Länge l .

2.1 Das Fasermmodell von Lanteigne

Nach Lanteigne (1985) können die Steifigkeiten für die mehrlagige Litze mit den folgenden Ausdrücken bestimmt werden:

$$(EA)_L = \sum_{n=1}^N K_n E_n A_n \cos^3 \alpha_n + E_M A_M \quad (3)$$

$$(GJ)_L = \sum_{n=1}^N K_n E_n A_n R_n^2 \sin^2 \alpha_n \cos \alpha_n + G_M J_M \quad (4)$$

$$(EI)_L = \sum_{n=1}^N K_n E_n A_n \left(\frac{r_n^2 / 2 + R_n^2}{2} \right) \cos^3 \alpha_n + E_M I_M + \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^{K_n} E_n A_n B_{in} \quad (5)$$

$$k_{FM_t} = k_{M_t F} = \sum_{n=1}^N K_n E_n A_n R_n \sin \alpha_n \cos^2 \alpha_n \quad (6)$$

$$k_{FM_b} = k_{M_b F} = \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^{K_n} E_n A_n A_{in} \quad (7)$$

$$k_{M_t M_b} = k_{M_b M_t} = \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^{K_n} E_n A_n A_{in} R_n \tan \alpha_n \quad (8)$$

mit

$$A_{in} = \frac{R_n^2 \cos^3 \alpha_n}{l \tan \alpha_n} \left[\cos\left(\frac{2\pi i}{K_n}\right) - \cos\left(\frac{2\pi i}{K_n} + \frac{l \tan \alpha_n}{R_n}\right) \right] \quad (9)$$

$$B_{in} = \frac{R_n^3 \cos^3 \alpha_n}{4l \tan \alpha_n} \left[\sin\left(\frac{4\pi i}{K_n}\right) - \sin\left(\frac{4\pi i}{K_n} + \frac{2l \tan \alpha_n}{R_n}\right) \right] \quad (10)$$

Darin sind

N	-	Anzahl der Drahtlagen
n	-	Nummer der aktuellen Drahtlage
K_n	-	Anzahl der Drähte in der n -ten Drahtlage
α_n	-	Helixwinkel der n -ten Drahtlage
E_M, A_M	-	Elastizitätsmodul und Querschnittsfläche des Kerndrahtes
E_n, A_n	-	Elastizitätsmodul und Querschnittsfläche der Drähte der n -ten Drahtlage
G_M, J_M	-	Schubmodul und polares Flächenträgheitsmoment des Kerndrahtes
I_M	-	axiales Flächenträgheitsmoment des Kerndrahtes
r_n	-	Drahtradius der n -ten Drahtlage
R_n	-	Helixradius der n -ten Drahtlage
l	-	Litzenlänge

Die Gleichungen (3) – (10) entstanden unter folgenden grundlegenden Voraussetzungen:

- Vernachlässigung der Drahtbiegung und Drahttorsion
- Linearisierung der Drahtdehnung
- Vernachlässigung der Querkontraktion (bei Belastung keine Änderung der Helixradien).
- Reibung zwischen den Drähten wird nicht berücksichtigt

Die Symmetrie der Steifigkeitsmatrix in Gleichung (1) ist durch die Linearisierung der Drahtdehnung und durch die Vernachlässigung der Querkontraktion gegeben. Die Gleichungen (3) – (10) gelten auch bei Nichteinhaltung der strukturellen Integrität, d.h. sie sind auch auf Litzen mit einem oder mehreren fehlerhaften Drähten anwendbar.

Für symmetrische Kordquerschnitte gilt

$$\sum_{i=1}^{K_n} B_{in} = 0 \quad \sum_{i=1}^{K_n} A_{in} = 0$$

und damit

$$k_{FM_b} = k_{M_b F} = 0 \quad k_{M_t M_b} = k_{M_b M_t} = 0$$

Gleichung (5) vereinfacht sich dann zu

$$(EI)_L = \sum_{n=1}^N K_n E_n A_n \frac{(r_n^2 / 2 + R_n^2)}{2} \cos^3 \alpha_n + E_M I_M \quad (11)$$

Einen minimalen Wert für die Biegesteifigkeit erhält man nach Lanteigne (1985) mit der Gleichung

$$(EI)_L^{\min} = \sum_{n=1}^N K_n E_n I_n + E_M I_M \quad (12)$$

2.2 Das Modell nach Costello

In Costello (1997) werden die helixförmig gewundenen Drähte der Litze als gekrümmte Stäbe behandelt. Die grundlegenden Gleichungen basieren auf den Gleichgewichtsbeziehungen am gekrümmten Stab nach Love (1944). Gegenüber dem Fasernmodell nach Lanteigne (1985) werden die Drahttorsion und -biegung in das analytische Modell einbezogen. Auch hier wird die Drahtdehnung linearisiert; die Querkontraktion wird jedoch berücksichtigt. Dadurch geht die Symmetrie der Steifigkeitsmatrix in Gleichung (1) verloren.

Zwischen den Litzenbelastungen und den Litzenverformungen ergeben sich die folgenden Zusammenhänge:

$$\frac{F}{E_D A_L} = C_1 \varepsilon_L + C_2 R_L \gamma_L \quad (13)$$

$$\frac{M_t}{E_D R_L^3} = C_3 \varepsilon_L + C_4 R_L \gamma_L \quad (14)$$

$$\frac{M_b}{E_D R_L^3} = C_5 R_L \kappa_b \quad (15)$$

Hierin sind neben den bereits definierten Größen

- E_D - Elastizitätsmodul der Drähte (hier als gleich für alle Lagen angenommen)
- A_L - metallische Querschnittsfläche der Litze
- R_L - Litzenradius
- $C_1 \dots C_4$ - Konstanten, die nach Costello (1997) bestimmt werden können (keine geschlossene Lösung)

Die Konstante C_5 kann mittels

$$C_5 = \frac{\pi}{4} \left[\sum_{n=1}^N \frac{2K_n \cos \alpha_n}{2 + \nu_n \sin^2 \alpha_n} \left(\frac{r_n}{R_L} \right)^4 + \left(\frac{r_M}{R_L} \right)^4 \right] \quad (16)$$

berechnet werden. ν_n ist die Querkontraktionszahl für die n -te Drahtlage.

Aus den Gleichungen (13) bis (16) können die Steifigkeiten der Litze zu

$$(EA)_L = C_1 E_D A_L \quad (17)$$

$$(GJ)_L = C_4 E_D R_L^4 \quad (18)$$

$$(EI)_L = C_5 E_D R_L^4 \quad (19)$$

$$k_{FM_t} = C_2 R_L E_D A_L \quad (20)$$

$$k_{M_t F} = C_3 E_D R_L^3 \quad (21)$$

bestimmt werden. Wegen der Beschränkung auf symmetrische Litzenquerschnitte gibt es zwischen der Längsbeanspruchung und der Biegung sowie zwischen der Torsion und der Biegung keine Kopplung.

3 FE-Modelle zur Berechnung der Litzensteifigkeiten

Die Modellbildung wird hier am Beispiel der zweilagigen Litzen erläutert. Der Querschnitt der beiden modellierten und später experimentell untersuchten Litzen ist in Bild 1 dargestellt.

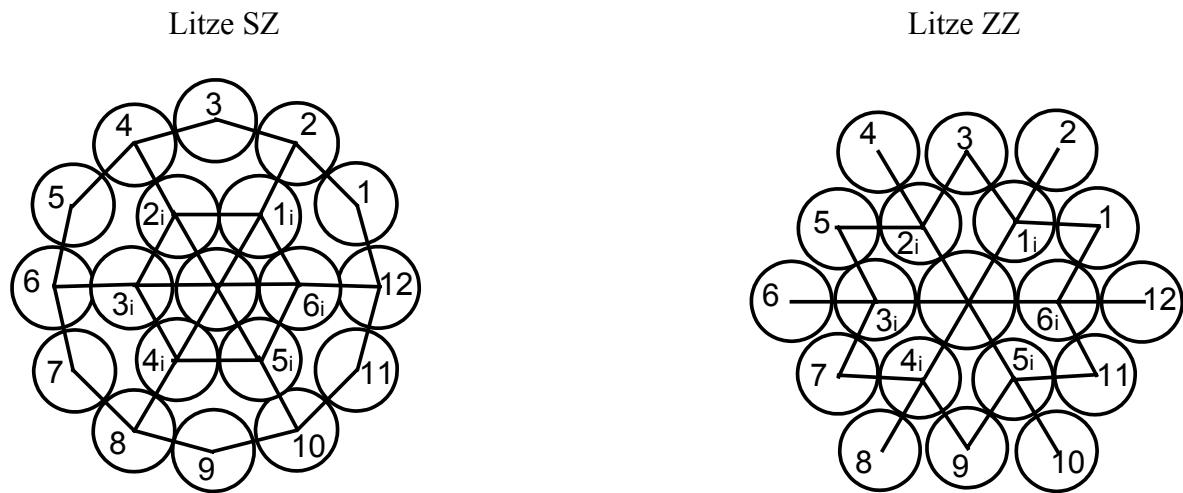


Bild 1. Querschnitte der Litzen SZ (innere Lage links geschlagen, äußere Lage rechts geschlagen) und ZZ (beide Lagen rechts geschlagen) mit Modell für den Abstützmechanismus der Drähte

Zur Vereinfachung werden die Drahtquerschnitte bei einem Schnitt senkrecht zur Litzenachse hier als Kreise dargestellt. Der bei beiden Litzen unterschiedliche Abstützmechanismus der Drähte untereinander wird mittels 3-D Stabelementen (3 Verschiebungs- und 3 Verdrehfreiheitsgrade) modelliert. Die Geometrie- und Materialparameter sind in Tabelle 1 zusammengefasst.

	Litze SZ	Litze ZZ
Aufbau	$0,71 + 6 \times 0,71 + 12 \times 0,71$	$0,76 + 6 \times 0,71 + 12 \times 0,71$
Litzendurchmesser	3,55 mm	3,6 mm
Anzahl der Drähte	19	19
Drahtdurchmesser	0,71 mm (alle Drähte)	0,76 mm (Kerndraht) 0,71 mm (Drähte 1. und 2. Lage)
Schlaglänge:	innere Lage	24 mm
	äußere Lage	36 mm
Elastizitätsmodul	$1,95 \cdot 10^5$ MPa	$1,95 \cdot 10^5$ MPa
Querkontraktionszahl	0,33	0,33

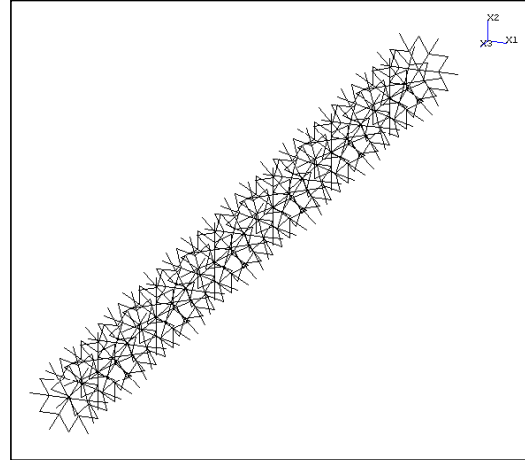
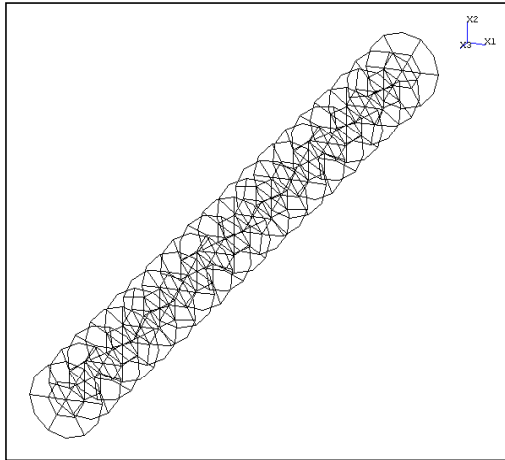
Tabelle 1. Geometrie- und Materialparameter der zweilagigen Litzen

Auch die einzelnen, helixförmig gewundenen Drähte wurden mit 3-D Stabelementen modelliert. Das für eine Schlaglänge (bei der SZ-Litze eine Schlaglänge der äußeren Drahtlage) entwickelte FE-Modell ist in Bild 2 dargestellt. Untersuchungen zur Konvergenz der Ergebnisse haben gezeigt, dass die Modellierung über eine Schlaglänge ausreicht.

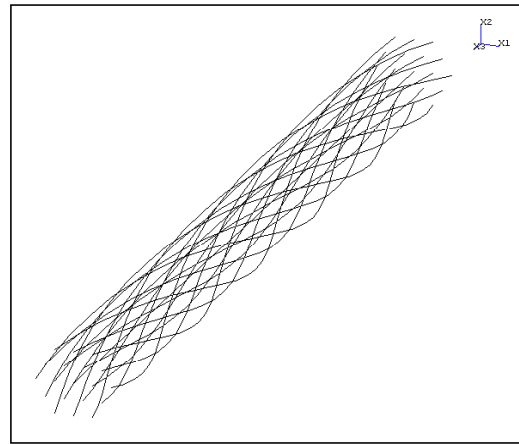
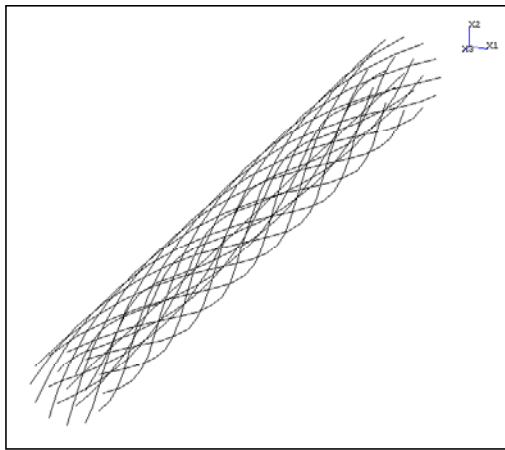
Kord SZ

Kord ZZ

Abstützung



Gesamtsystem der Drähte



Gesamtmodell

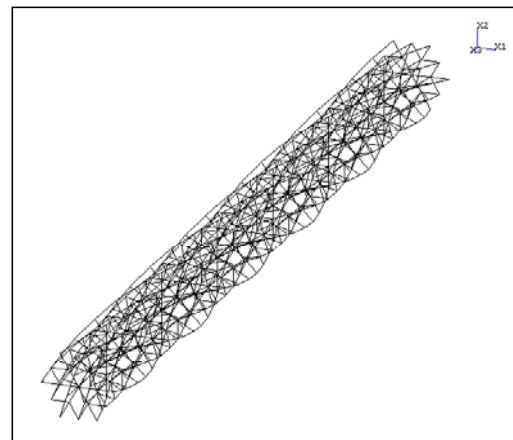
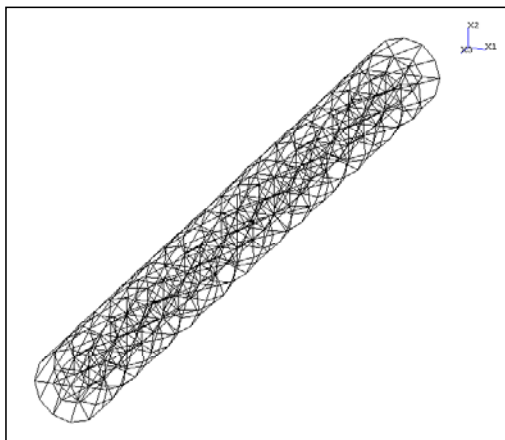
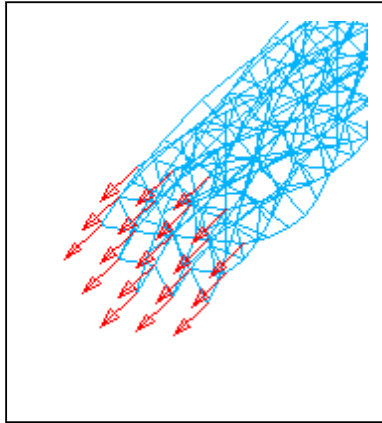


Bild 2. FE-Modelle der SZ- und ZZ-Litze

Die mittels FE-Stebelemente modellierten Drähte und Abstützungen der Drähte in den einzelnen Lagen sowie auch der Drähte in den unterschiedlichen Lagen werden im Bild 2 durch ihre Mittellinien repräsentiert. Zur Bestimmung der Steifigkeiten werden die Lastfälle Längsbeanspruchung, Torsion und Biegung realisiert. Dabei werden die Freiheitsgrade der Knotenpunkte des Anfangsquerschnittes (Verschiebungen und Verdrehungen) verhindert. Die Belastungen werden in Form von Einzelkräften und Einzelmomenten gleichmäßig auf die Draht-Knotenpunkte des Endquerschnittes verteilt. In Bild 3 sind für den Lastfall Längsbeanspruchung die Belastung und die Lagerung der Litze dargestellt.

a) Belastung des Endquerschnittes



b) Lagerung des Anfangsquerschnittes

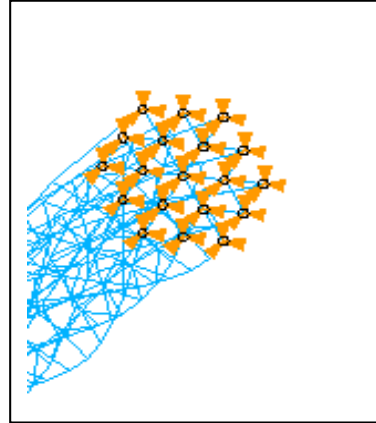


Bild 3. Belastung (Längskraft) und Lagerung der Litze

Nach der FE-Rechnung werden die Mittelwerte für die Verschiebungen und Verdrehwinkel, welche sich für die belasteten Knotenpunkte des Endquerschnittes ergeben, gebildet. Die Berechnung der Steifigkeiten kann dann unter Anwendung der Gleichungen (1) und (2) auf die einzelnen Lastfälle erfolgen. Für die symmetrischen Litzenquerschnitte tritt eine Entkopplung der Biegung von der Längsbeanspruchung und auch von der Torsion ein. Die Steifigkeitsmatrix in Gleichung (1) ist symmetrisch.

Längsbeanspruchung:

$$F = (EA)_L \frac{u_1}{l} + k_{FM_t} \frac{\phi_1}{l} \quad (22)$$

$$0 = k_{FM_t} \frac{u_1}{l} + (GJ)_L \frac{\phi_1}{l} \quad (23)$$

Torsion:

$$0 = (EA)_L \frac{u_2}{l} + k_{FM_t} \frac{\phi_2}{l} \quad (24)$$

$$M_t = k_{FM_t} \frac{u_2}{l} + (GJ)_L \frac{\phi_2}{l} \quad (25)$$

Biegung:

$$M_b = (EI)_L \frac{\psi}{l} \quad (26)$$

4 Experimentelle Untersuchungen

Das vorliegende Litzenmaterial wird in einzelne Litzenproben von 500 mm Länge zerlegt. In Bild 4 sind die einzelnen, auf der Hydropulsanlage durchgeführten Versuche zusammengestellt.

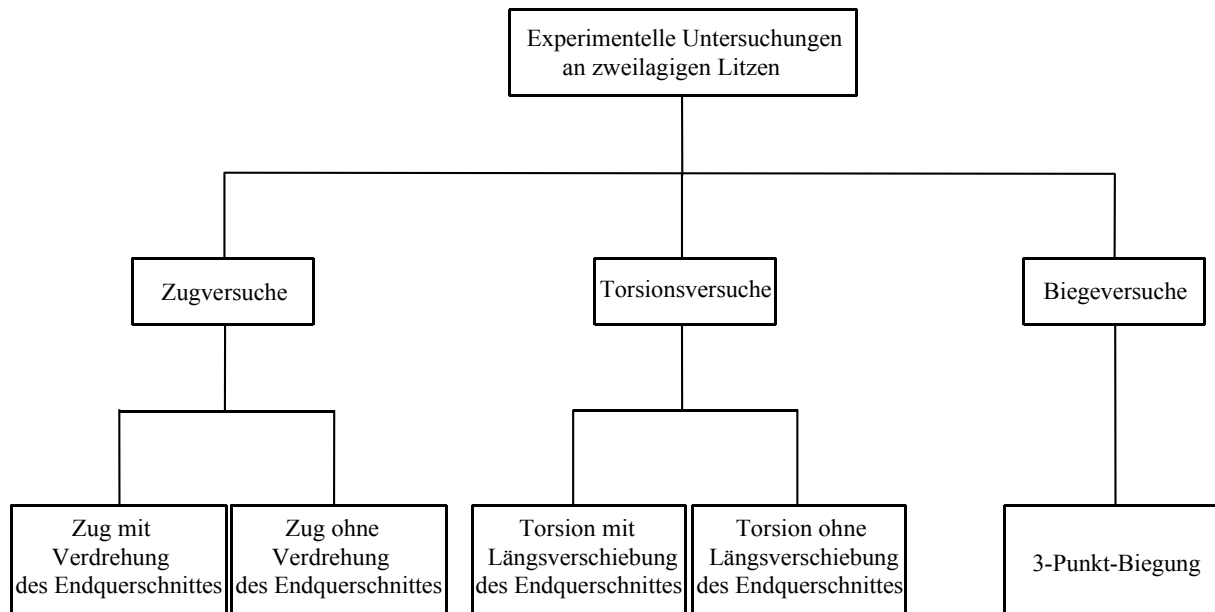


Bild 4. Zusammenstellung der Versuche

4.1 Zugversuche

Bei den Zugversuchen erfolgen die Belastungen und Entlastungen der Litzen innerhalb von 60 Sekunden. Die maximal aufgebrachte Zugkraft beträgt 5000 N. Damit bleiben die Verformungen im elastischen Bereich. Der Versuchsaufbau ohne Verdrehung des Endquerschnittes ist in Bild 5 dargestellt.

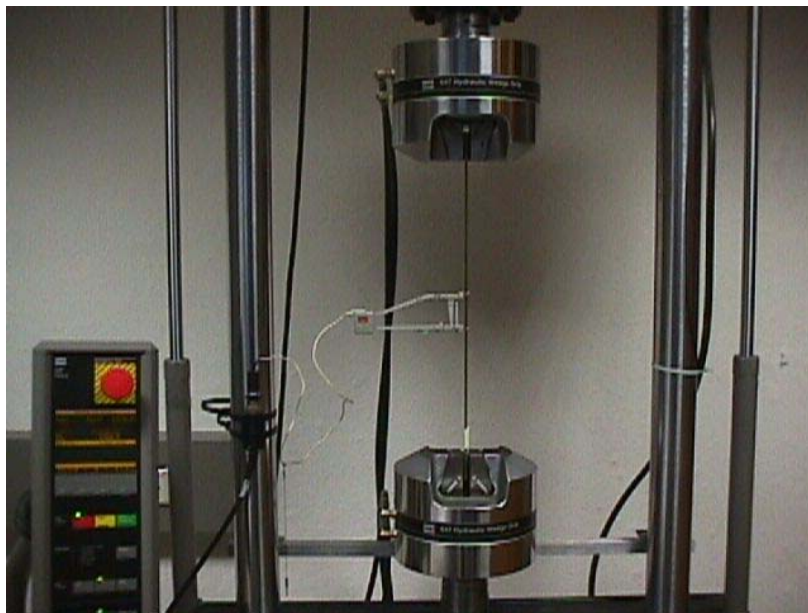


Bild 5. Versuchsaufbau zum Zugversuch ohne Verdrehung des Endquerschnittes

Mit Hilfe des im mittleren Litzenbereich angebrachten Extensiometers wird die Längsdehnung in Abhängigkeit von der aufgebrachten Belastung gemessen. Für die Zugversuche mit freier Verdrehung des Endquerschnittes

wird das untere Litzenende in einen drehbaren Kopf (Bild 8) eingespannt. Im unteren Kopf wird der Verdrehwinkel des Litzenendes in Abhängigkeit von der Zugkraft ermittelt. Die freie Litzenlänge beträgt 420 mm.

Jeweils ein typisches Be- und Entlastungsdiagramm für den Zugversuch mit freier Verdrehung an einer SZ- und einer ZZ-Litze ist im Bild 6 dargestellt. Die eingezeichneten Pfeile zeigen die Lastrichtung an.

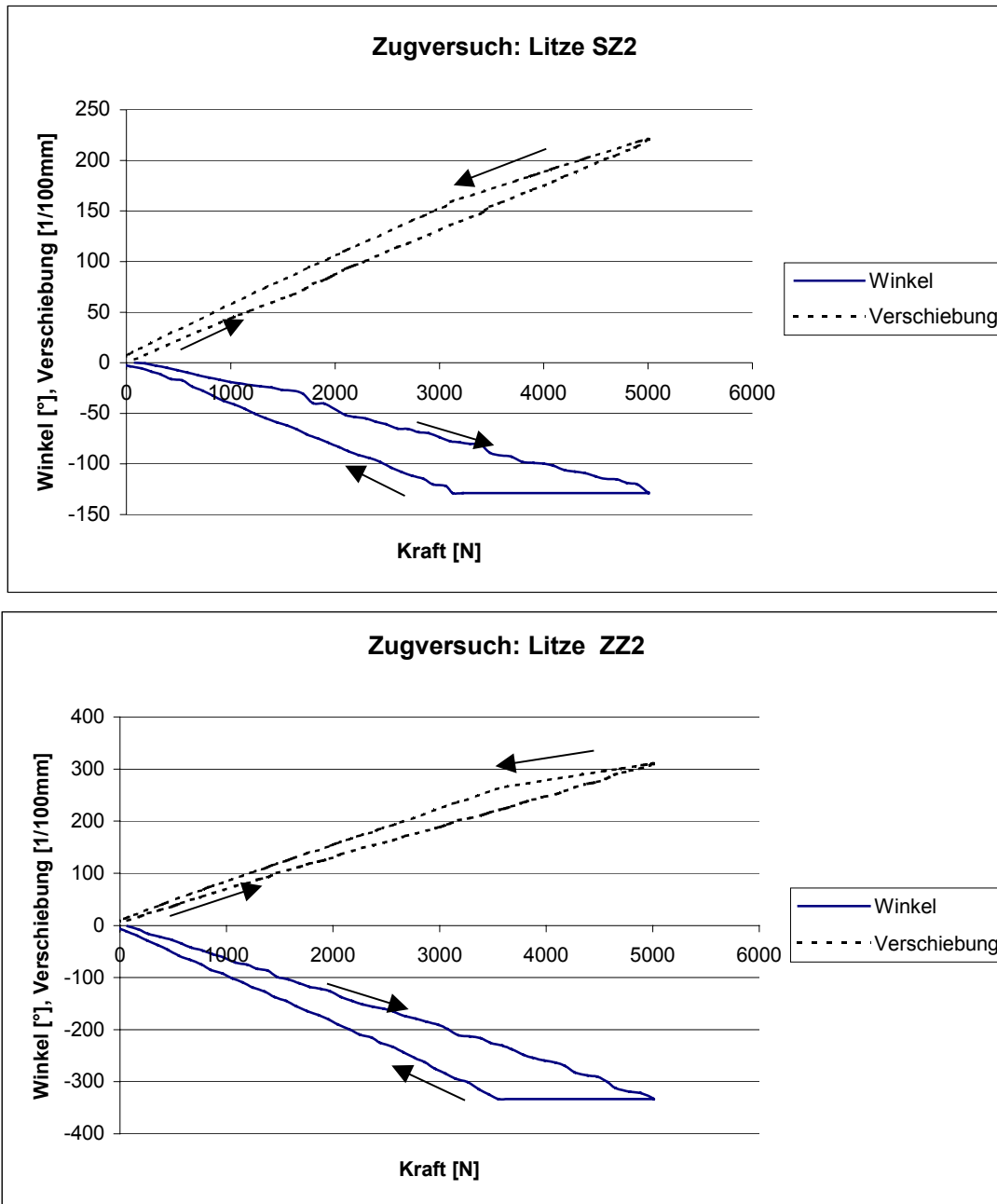


Bild 6. Be- und Entlastungsdiagramm für den Zugversuch bei freier Verdrehbarkeit des belasteten Endquerschnittes

Im Vergleich der beiden Litzenquerschnitte zeigt sich bei dem SZ-Querschnitt gegenüber dem ZZ-Querschnitt eine um etwa 25 % kleinere Verschiebung und ein um 60 % kleinerer Verdrehwinkel.

Mit dem Ziel, für jede Litzenart *einen* Satz von vergleichbaren Steifigkeitsparametern zu ermitteln, erfolgt die weitere Auswertung nur für die Belastungskurven. In Bild 7 sind die Verformungsgeraden (Linearisierung der Verformungskurven mittels Ausgleichsgeraden) für die beiden Litzenproben dargestellt.

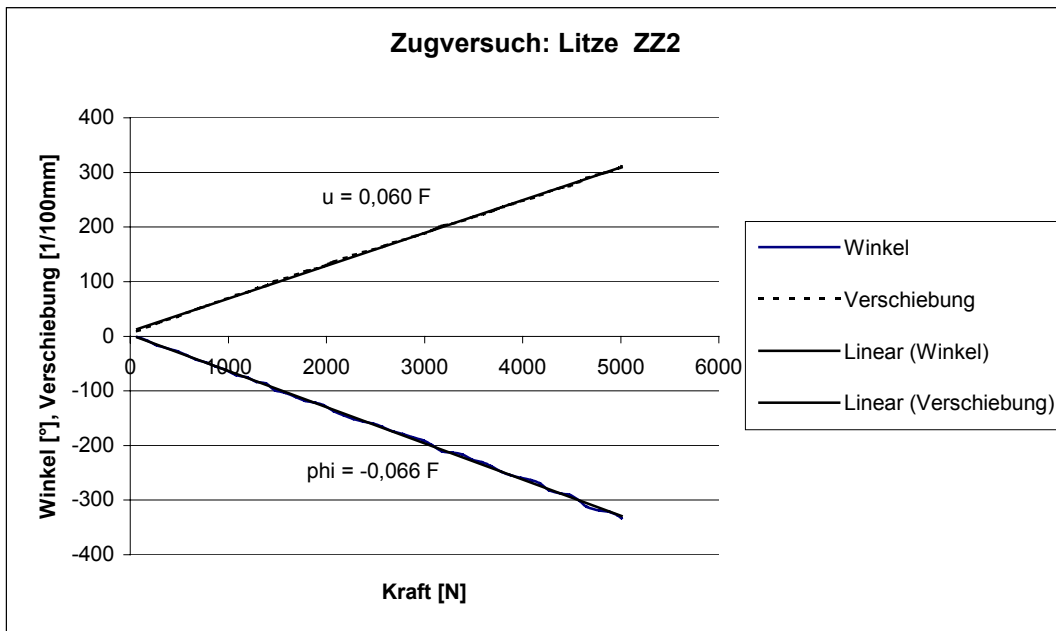
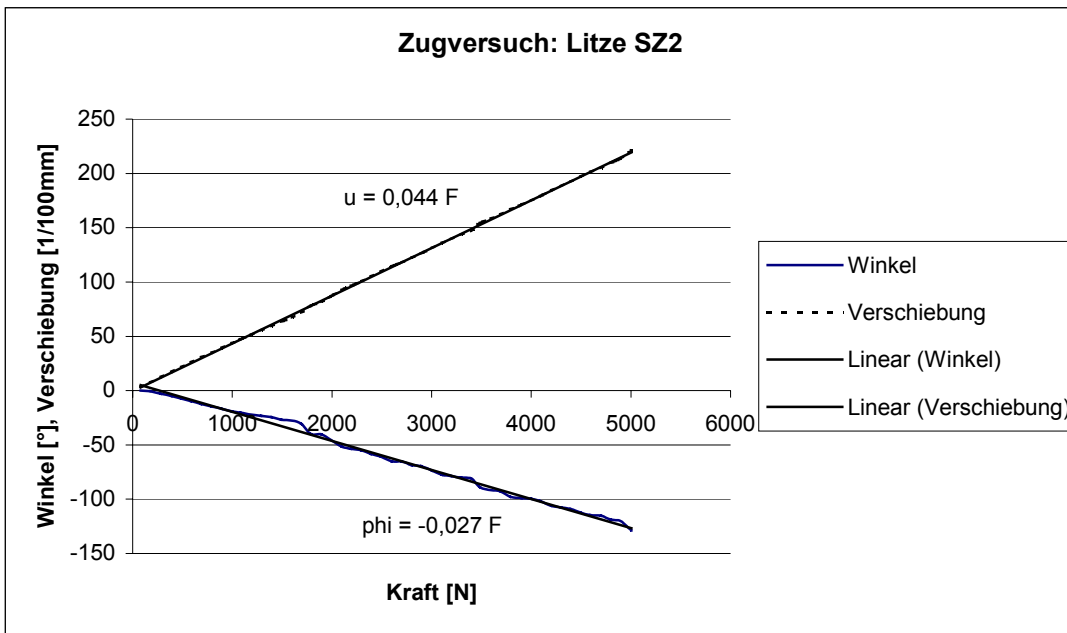


Bild 7. Verformungsgeraden der beiden Litzenproben (nach Linearisierung der Verformungskurven für die Belastungsphase) für den Zugversuch mit freier Verdrehung

Analoge Versuche erfolgen an Litzen, bei denen die Verdrehung am freien Litzenende verhindert wird. In diesen Fällen wird das dafür erforderliche Torsionsmoment gemessen. Es werden auch Zugversuche mit Verdrehung des freien Endes bei konstant gehaltenem Torsionsmoment (500 Nmm bzw. 1000 Nmm) durchgeführt.

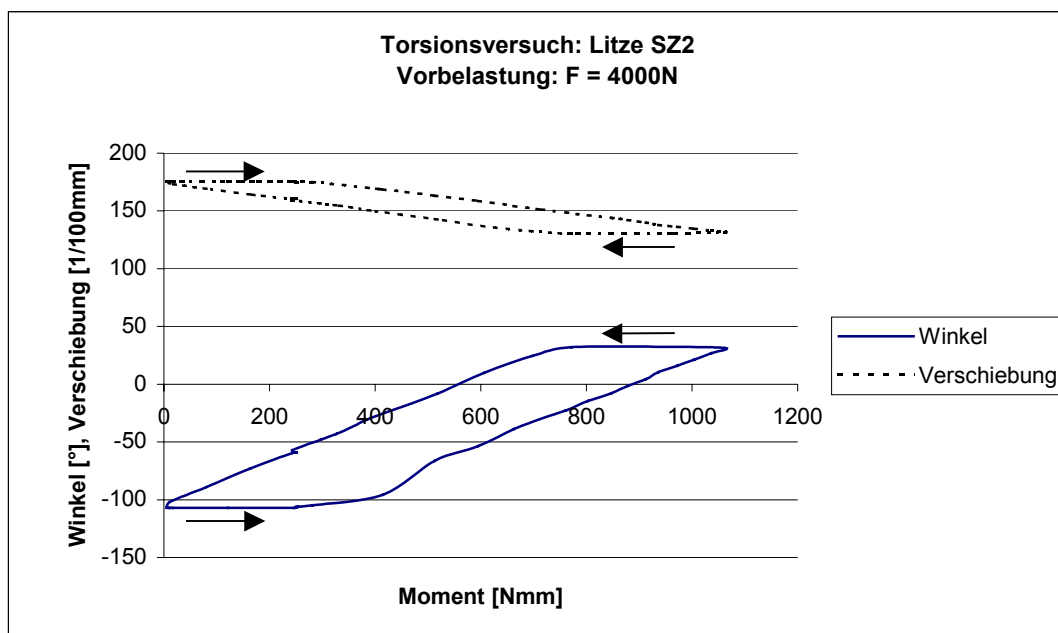
4.2 Torsionsversuche

Bei den Torsionsversuchen werden die Endquerschnitte bei konstant eingestellter Zugbeanspruchung der Litzenproben schrittweise mit einem ansteigenden bzw. abnehmenden Torsionsmoment belastet. Der Versuchsaufbau – speziell zur Einleitung des Torsionsmomentes – kann Bild 8 entnommen werden.



Bild 8. Einrichtung zur Einleitung des Torsionsmomentes beim Torsionsversuch

Die Verdrehwinkel wurden über ein Potenziometer aufgezeichnet. Die Be- und Entlastungskurven für die beiden Litzenarten – hier bei einer Vorbelastung mit einer konstanten Längskraft von 4000 N – sind im Bild 9 dargestellt.



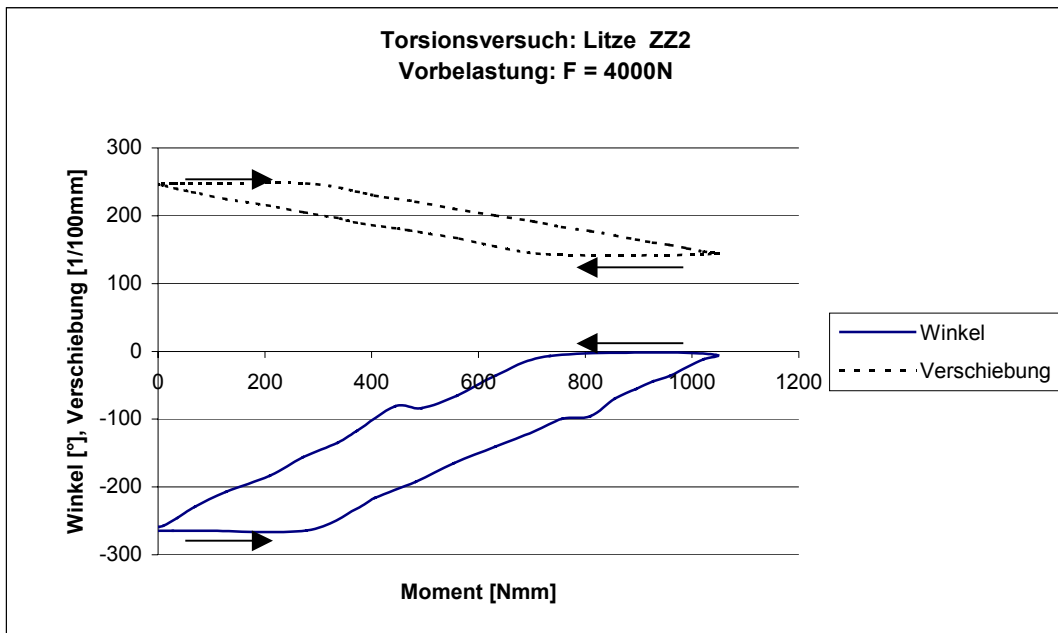
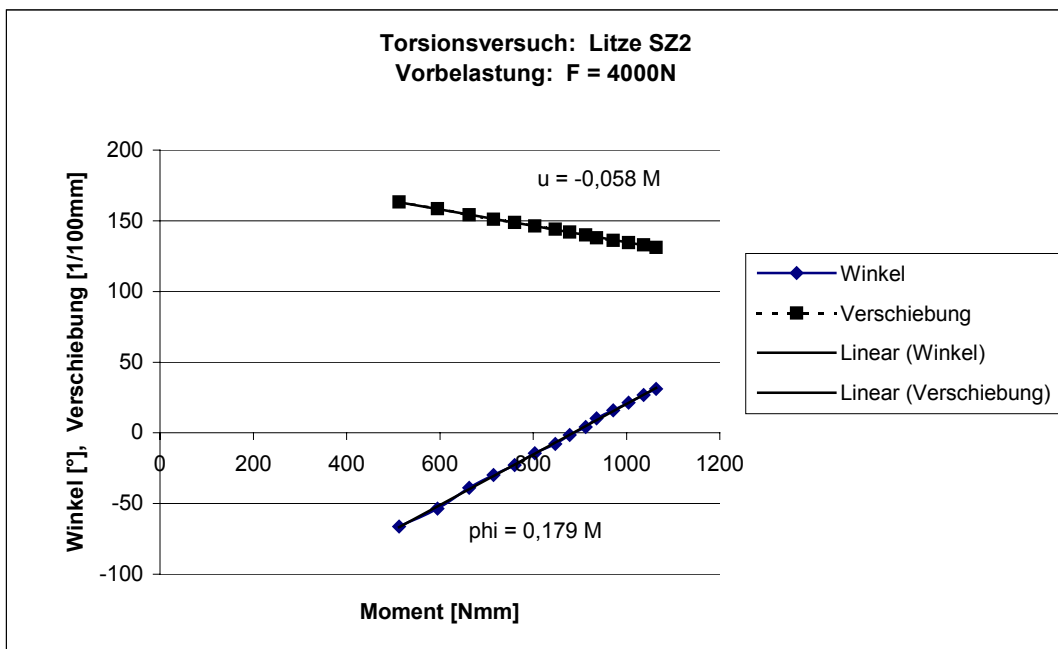


Bild 9. Be- und Entlastungsdiagramm für den Torsionsversuch bei freier Längsverschiebung mit einer konstanten Zugbelastung des Endquerschnittes

Neben einer ausgeprägten Hysterese zeigt sich auch hier, dass die ZZ-Litze im Vergleich zur SZ-Litze bei gleichen Belastungen wesentlich größere Verformungen erfährt. Auf grund der Konstruktion der Litze (Gleichschlag gegenüber Gegenschlag) war das auch nicht anders zu erwarten. Analog zum Zugversuch werden nun für die Belastungskurven die Verformungsgeraden ermittelt (Bild 10).



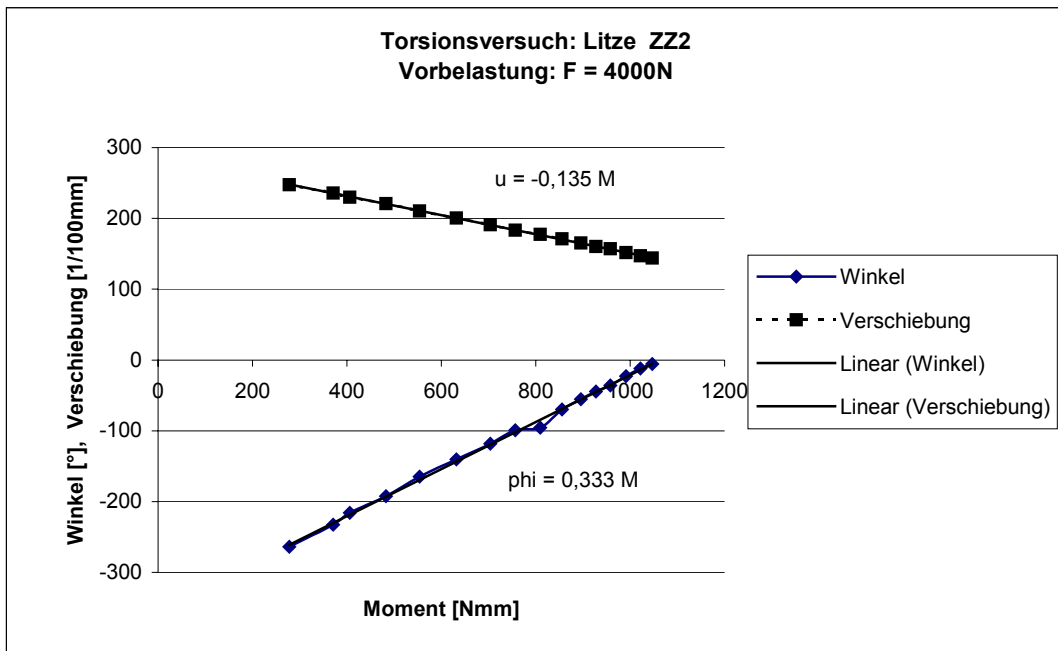


Bild 10. Verformungsgeraden der beiden Litzenproben (nach Linearisierung der Verformungskurven für die Belastungsphase) für den Torsionsversuch

Neben den Torsionsversuchen mit freier Längsverschiebung erfolgen auch Versuche mit verhinderter oder konstant gehaltener Längsverschiebung ($u = 0$ mm, $u = 0,5$ mm, $u = 1,0$ mm).

4.3 Biegeversuche

Der Aufbau des 3-Punkt-Biegeversuches ist aus Bild 11 ersichtlich. Bild 12 zeigt beispielhaft den Kraft-Verformungs-Verlauf zweier Proben. Dabei bleiben die Biegeverformungen im elastischen Bereich. Die Versuche werden bei drei verschiedenen Lagerabständen ($l = 80, 120, 160$ mm) realisiert.

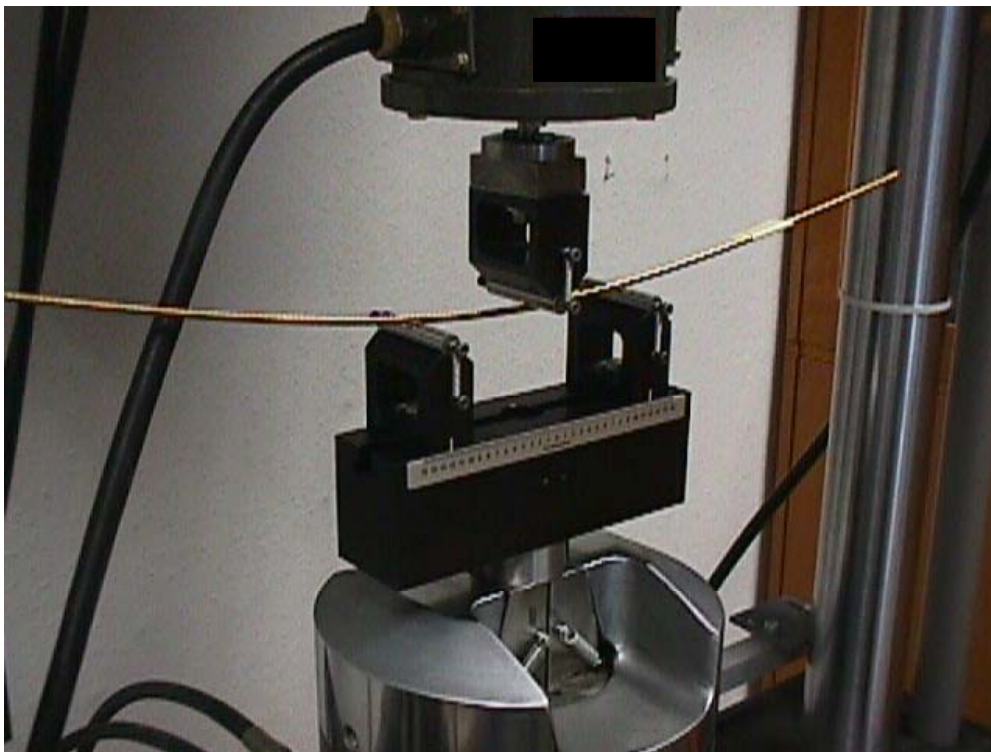


Bild 11. Aufbau des 3-Punkt-Biegeversuches

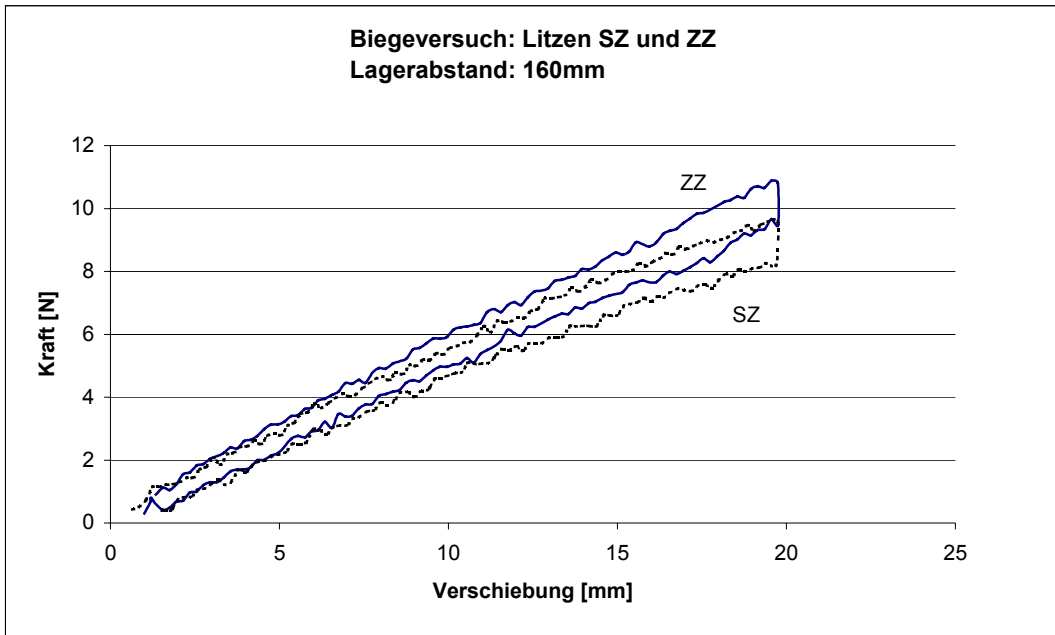


Bild 12. Durchbiegung in Abhängigkeit von der Belastung

Im unteren Lastbereich verlaufen die Kraft-Verschiebungs-Kurven für beide Litzen nahezu linear und können daher durch Geraden angenähert werden (Bild 13).

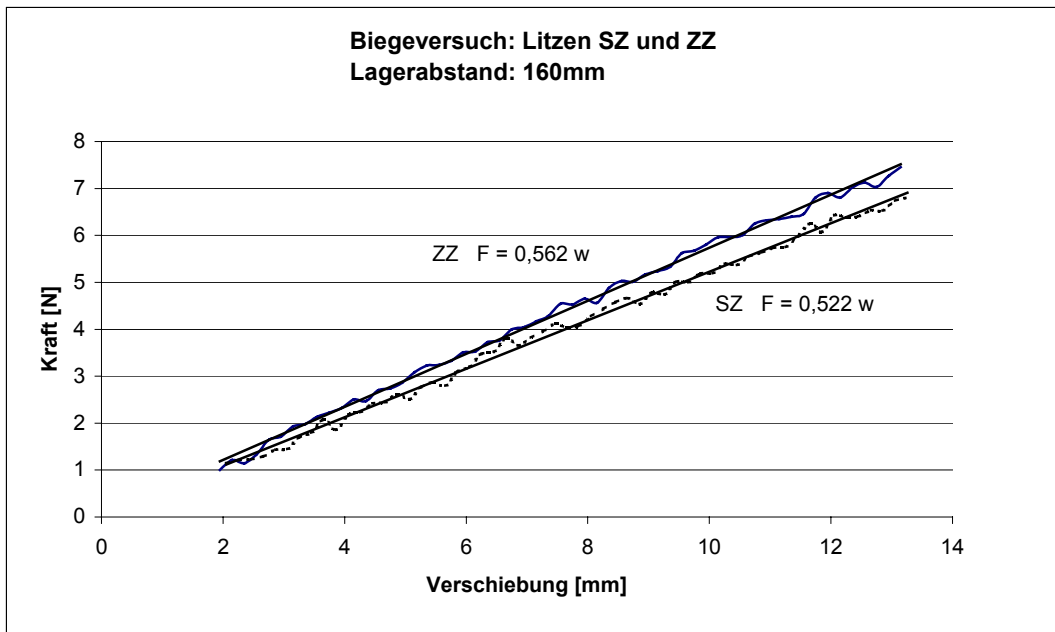


Bild 13. Belastungs-Verformungs-Geraden für den unteren Lastbereich

4.4 Auswertung der Zug- und Torsionsversuche an den SZ- und ZZ-Litzenproben

Die Versuche erfolgen an Litzenproben aus verschiedenen Herstellungsladungen. In Tabelle 2 sind die statistischen Mittelwerte der Versuchsergebnisse zusammengestellt.

Zugversuch mit freier Verdrehung des belasteten Litzenendes		
Litze SZ	$\frac{u}{F} = 0,00043 \text{ mm/N}$	$\frac{\phi}{F} = -0,00047 \text{ 1/N}$
Litze ZZ	$\frac{u}{F} = 0,00060 \text{ mm/N}$	$\frac{\phi}{F} = -0,00115 \text{ 1/N}$
Torsionsversuch mit freier Längsverschiebung des belasteten Litzenendes		
Litze SZ	$\frac{u}{M} = -0,00056 \text{ 1/N}$	$\frac{\phi}{M} = 0,00310 \text{ 1/Nmm}$
Litze ZZ	$\frac{u}{M} = -0,00135 \text{ 1/N}$	$\frac{\phi}{M} = 0,00580 \text{ 1/Nmm}$
Zugversuch mit verhinderter Verdrehung des belasteten Litzenendes		
Litze SZ	$\frac{u}{F} = 0,00036 \text{ mm/N}$	$\frac{M}{F} = 0,16 \text{ mm}$
Litze ZZ	$\frac{u}{F} = 0,00033 \text{ mm/N}$	$\frac{M}{F} = 0,21 \text{ mm}$
Torsionsversuch mit verhinderter Verschiebung des belasteten Litzenendes		
Litze SZ	$\frac{F}{M} = 1,21 \text{ 1/mm}$	$\frac{\phi}{M} = 0,00220 \text{ 1/Nmm}$
Litze ZZ	$\frac{F}{M} = 1,92 \text{ 1/mm}$	$\frac{\phi}{M} = 0,00280 \text{ 1/Nmm}$

Tabelle 2. Mittlere Ergebniswerte des Zugversuches mit freier und verhinderter Verdrehung sowie des Torsionsversuches mit freier und verhinderter Längsverschiebung

4.5 Auswertung der 3-Punkt-Biegeversuche an den SZ- und ZZ-Litzenproben

Die Auswertung erfolgt für den linearen Bereich der Verformungs-Belastungs-Kurven. Auch hier werden die statistischen Mittelwerte über die Ergebnisse für die einzelnen Proben gebildet. Die Ergebnisse sind in Tabelle 3 zusammengestellt.

Lagerabstand $l = 160 \text{ mm}$	
Litze SZ	$F/w = 0,51 \text{ N/mm}$
Litze ZZ	$F/w = 0,53 \text{ N/mm}$
Lagerabstand $l = 120 \text{ mm}$	
Litze SZ	$F/w = 1,23 \text{ N/mm}$
Litze ZZ	$F/w = 1,32 \text{ N/mm}$
Lagerabstand $l = 80 \text{ mm}$	
Litze SZ	$F/w = 4,33 \text{ N/mm}$
Litze ZZ	$F/w = 4,76 \text{ N/mm}$

Tabelle 3. Mittlere Ergebniswerte der 3-Punkt-Biegeversuche

5 Steifigkeitswerte für die SZ- und ZZ-Litzen

Die in den Tabellen 2 und 3 zusammengestellten Ergebniswerte für die Zug-, Torsions- und Biegeversuche bilden die Grundlage für die Bestimmung der Steifigkeitswerte aus den Experimenten. Die Berechnung der Zug- und Torsionssteifigkeiten sowie der Koppelsteifigkeiten für die Zug- und Torsionsbeanspruchung erfolgt durch Umstellung des Gleichungssatzes (22) bis (25). Für die Bestimmung der Biegesteifigkeit kann die aus der Balkenbiegung bekannte, über die Differentialgleichung der Biegelinie ableitbare Beziehung

$$(EI)_L = \frac{F l^3}{48 w}, \quad (27)$$

mit l als Abstand zwischen den beiden Lagern und w als Durchbiegung unter der Kraft F , verwendet werden. Für die numerisch und analytisch berechneten Steifigkeiten wurde der experimentell ermittelte Elastizitätsmodul des geraden Mitteldrahtes der Litzen für alle Drahtlagen eingesetzt. Tabelle 4 enthält die numerisch, analytisch und experimentell bestimmten Steifigkeitswerte für beide Litzenarten. Die beiden numerischen Grenzwerte für die Biegesteifigkeit nach Lanteigne (1985) wurden mit den Gleichungen (11) und (12) bestimmt.

	Variante		Zugsteifigkeit (EA) _L [kN]	Torsionssteifigkeit (GJ) _L [kNmm ²]	Biegesteifigkeit (EI) _L [kNmm ²]			Koppelsteifigkeiten k_{FM_t} [kNmm] k_{M_tF} [kNmm]	
numerisch	SZ		1 327	170	428			235	235
	ZZ		1 350	154	373			286	286
analytisch	SZ	Lanteigne	1 365	114	1 008	46		240	240
		Costello	1 343	148	46			240	234
	ZZ	Lanteigne	1 385	119	1 048	47		350	350
		Costello	1 366	152	46			348	338
experimentell	SZ		1 217 ¹⁾	169 ¹⁾	$l=80$ mm	$l=120$ mm	$l=160$ mm	220 ¹⁾	184 ¹⁾
			1 167 ²⁾	191 ²⁾	48	44	44	231 ²⁾	187 ²⁾
	ZZ		1 264 ¹⁾	131 ¹⁾	$l=80$ mm	$l=120$ mm	$l=160$ mm	294 ¹⁾	251 ¹⁾
			1 273 ²⁾	150 ²⁾	51	48	45	288 ²⁾	267 ²⁾

- 1) Zugversuch mit freier Verdrehung und Torsionsversuch mit freier Längsverschiebung des belasteten Litzenendes
- 2) Zugversuch mit verhinderter Verdrehung und Torsionsversuch mit verhinderter Längsverschiebung des belasteten Litzenendes

Tabelle 4. Gegenüberstellung der auf numerischer, analytischer und experimenteller Grundlage ermittelten Steifigkeitswerte für die SZ- und ZZ-Litze

Vergleich der Zugsteifigkeiten:

Die numerisch und analytisch bestimmten Zugsteifigkeiten liegen über den experimentell ermittelten Werten (bei den SZ-Proben um durchschnittlich 11 % und bei den ZZ-Proben um durchschnittlich 7 %). Für die ZZ-Litze ergibt sich gegenüber der SZ-Litze nach allen drei Verfahren eine größere Zugsteifigkeit. Bei den auf experimenteller Grundlage ermittelten Werten ist der Unterschied am größten.

Vergleich der Torsionssteifigkeiten:

Die mit den numerischen Modellen erzielten Ergebnisse stimmen verhältnismäßig gut mit den experimentellen Werten überein. Die nach Lanteigne (1985) berechneten Torsionssteifigkeiten weichen erwartungsgemäß sehr stark ab, da im Berechnungsmodell die Drahttorsion vernachlässigt wurde. Sowohl bei den numerischen Modellen als auch bei den Experimenten ergeben sich für die ZZ-Litze gegenüber der SZ-Litze die kleineren Torsionssteifigkeiten. Nach Lanteigne (1985) und auch nach Costello (1997) zeigt sich diese Tendenz nicht. Für beide Litzenarten erhält man nahezu die gleichen Torsionssteifigkeiten.

Vergleich der Biegesteifigkeiten:

Die experimentellen Ergebnisse stimmen nahezu mit dem unteren Grenzwert nach Lanteigne (1985) und dem Ergebnis nach Costello (1997) überein. Mit den numerischen Modellen ergeben sich demgegenüber wesentlich größere Steifigkeitswerte, welche die entwickelten FE-Modelle für die Modellierung des Biegelastfalles als ungeeignet erscheinen lassen. Bei einer Verwendung von Fachwerkstäben für die Modellierung der Drahtabstützungen (hinsichtlich der Kopplung mit den Balkenelementen nur Kompatibilität hinsichtlich der drei Verschiebungsfreiheitsgrade in den Knotenpunkten) lassen sich zwar die Biegesteifigkeiten an die Messergebnisse anpassen, für die anderen Steifigkeiten ergeben sich dann jedoch viel zu kleine Werte.

Vergleich der Koppelsteifigkeiten:

Die Koppelsteifigkeiten stellen ein Maß für die Kopplung der Verschiebungen und Verdrehungen bei der Zug- und bei der Torsionsbeanspruchung dar. Bei allen verwendeten Modellen liegen die Werte der Koppelsteifigkeiten für die ZZ-Litze über denen der SZ-Litze. Bei den numerischen und analytischen Modellen wird lediglich bei Costello (1997) die Querkontraktion der Drahtquerschnitte berücksichtigt. Deshalb ergibt sich im Vergleich dieser Modelle nur dort eine leichte Antisymmetrie der Steifigkeitsmatrix. Bei den experimentellen Ergebnissen ist der Unterschied zwischen k_{FM} und k_{MF} wesentlich ausgeprägter.

6 Zusammenfassung

In der Arbeit wird das Verhalten zweilagiger Litzen mit unterschiedlichem Querschnittsaufbau mittels numerischer und analytischer Berechnungsmodelle sowie auch experimentell untersucht. Die Bewertung erfolgt auf der Grundlage der Litzensteifigkeiten gegenüber Zug-, Torsions- und Biegebeanspruchungen.

Für den Zuglastfall, welcher zu den primären praktischen Beanspruchungen von Litzen und Seilen gehört, zeigen die mit den entwickelten FE-Modellen erzielten Ergebnisse eine gute Übereinstimmung mit den analytischen und experimentellen Ergebnissen. Die zur Beschreibung des Litzenverhaltens entwickelten FE-Modelle sind damit primär nur für Zug- und Torsionslastfälle geeignet. Ihr Einsatz zur Modellierung von Kord-Durchziehversuchen, wie sie bei der Untersuchung der Haftung des Kords im Gummimaterial üblich sind (Reifenherstellung), ist möglich.

Mit den Experimenten und den numerischen Modellen wird für die SZ-Litze gegenüber der ZZ-Litze eine erheblich größere Torsionssteifigkeit erhalten. Dieser Unterschied kann mit den analytischen Modellen nicht nachgewiesen werden.

Die Versuchsergebnisse zeigen eindeutig, dass bei realen Litzen die Steifigkeitsmatrix unsymmetrisch ist. Dieses Verhalten zeigen auch die unter Berücksichtigung der Querkontraktion abgeleiteten analytischen Beziehungen von Costello.

Danksagung

Die Autoren der vorliegenden Arbeit danken den Fux-Werken in Miskolc (Ungarn) für die Bereitstellung des Litzenmaterials.

Literatur

Antal, S.; Gelencsér, S.; Nagy T.; Seregély, Zs.: Problems of Improving Flexible Pipes (Hoses) Designed for the Delivery of High Pressure Gas and Gaseous Oil. *Kautschuk+Gummi, Kunststoffe*, 51, 1, (1998), 51-57.

Avak, R.; Wille, F.: Bond behaviour of round strand ropes in concrete. *Forum der Forschung – Wissenschaftsmagazin der BTU Cottbus*, 16, (2003), 51-56.

Cardou, A.; Jolicoeur, C.: Mechanical models of helical strands. *ASME Appl- Mech. Rev.*, 50(1), (1997), 1-14.

COSAR: *Finite-Element Software*, FEMCOS Magdeburg, <http://www.femcos.de>.

Costello, G.A.: *Theory of Wire Rope*. Second Edition, New York: Springer, (1997).

Feng, K.: Statische Berechnung des Gürtelreifens unter besonderer Berücksichtigung der kordverstärkten Lagen. *Fortschr.-Ber. VDI-Reihe*, 12, Nr. 258, Düsseldorf: VDI-Verlag, (1995).

Feyrer, K.: *Drahtseile: Bemessung, Betrieb, Sicherheit*. 2. Aufl., Berlin: Springer, (2000).

Hufenbach, W.; Kroll, L.; Holste, C.: Auslegung armierter Hochleistungsschläuche. *Gummi-Fasern-Kunststoffe*, 47, 3, (1994), 158-168.

Kocak, S.; Pidaparti, R.M.: Tire cord shape influence on stresses using a micromechanics model. *Tire Science and Technology*, 28, 2, (2000), 106-118.

Lanteigne, J.: Theoretical Estimation of the Response of Helically Armored Cables to Tension, Torsion, and Bending. *Journal of Applied Mechanics*, (1985), 52, 423-432.

Love, A.E.H.: *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. New York: Dover Publications, (1944), Chaps. 18 and 19.

Tonn, H.: Fördergurte für den Steinkohlenbergbau unter Tage – Anforderungen und Eigenschaften. *Kautschuk + Gummi, Kunststoffe*, 46, 1, (1993), 37-50.

Vanderbeken, B.: *Zugträger Stahllitze*. 6. Tagung Zahnradgetriebe, „Produkte und Komponenten im Vergleich“, TU Dresden, 10.-11. Sept. 2001, (2001), 1-7.

von der Wroge, H.: Gestaltung und Auslegung der Verbindungen hochfester Stahlseil-Fördergurte. Dissertation, Hannover, (1991).

Wille, F.: *Charakteristik und Modellbildung des Verbundtragverhaltens von einlagigen Rundlitzenseilen in Beton*. Brandenburgische Technische Universität Cottbus, Dissertation, (2004).

Adressen: Dr.-Ing. Günther Fritzsche, Dr.-Ing. Karl-Heinz Gröbel, Institut für Mechanik, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Universitätsplatz 2, D-39106 Magdeburg; Dr.-Ing. László Sárközi, Lehrstuhl für Mechanik, Universität Miskolc, H-3515 Miskolc-Egyetemváros.
e-mail: guenther.fritzsche@mb.uni-magdeburg.de, karl-heinz.groebel@mb.uni-magdeburg.de
tksl@uni-miskolc.hu