

Konzepte der Numerik endlicher Rotationen

A. Menzel, P. Betsch, E. Stein, P. Steinmann

Algorithmen zur Berechnung endlicher Rotation, die typischer Weise bei Finite Element Simulationen Anwendung finden, können in zwei allgemeine Kategorien unterteilt werden: Im Rahmen der ersten Kategorie werden iterative Rotationsfreiheitsgrade betrachtet, wohingegen der zweiten Kategorie totale Rotationsfreiheitsgrade zugrunde liegen. Diese Freiheitsgrade können auf drei unterschiedliche Konfigurationen bezogen werden: Den letzten Iterationsschritt, den letzten inkrementellen Lastschritt oder den unrotierten Ausgangszustand. Unabhängig von der gewählten Parametrisierung endlicher Rotationen weisen diese Formulierungen unterschiedliche numerische Eigenschaften in Bezug auf Robustheit und Stabilität sowie den erforderlichen zusätzlichen Speicherplatzbedarf auf. Diese allgemein zu klassifizierenden Merkmale werden in diesem Beitrag diskutiert.

1 Einleitung

Zur Formulierung endlicher Rotationen existieren zahlreiche Parametrisierungen wie die Euler–Rodrigues Formel, Quaternionen oder elementare Rotationen (Eulerwinkel, Kardanwinkel), siehe zum Beispiel Altmann (1986), Géradin und Rixen (1995) oder Crisfield (1997). Alle Parametrisierungen verlieren für bestimmte Drehabbildungen ihre Eineindeutigkeit zwischen den Rotationsparametern θ_i ($i = 1, 2, 3$) und dem zugehörigen Rotationstensor $\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}) \in SO(3)$, wobei $\boldsymbol{\theta} = \theta \mathbf{n}$ den Rotationsvektor mit der Rotationsachse $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$ und dem zugeordneten Drehwinkel $\theta \in \mathbb{R}$ bezeichnen soll. Darüberhinaus können bei der Linearisierung im Rahmen eines numerischen Berechnungsverfahrens lineare Abhängigkeiten auftreten, die zum Verlust der Eindeutigkeit der Berechnung führen bzw. zum den Verlust der Konvergenz des verwendeten Lösungsverfahrens verursachen, siehe Betsch u.a. (1998) oder Menzel u.a. (1998). Daher sollten die auftretenden Rotationsfreiheitsgrade hinreichend weit entfernt von diesen, vor allem von der verwendeten Kategorie abhängigen, singulären Punkten liegen.

2 Kategorisierung der Numerik endlicher Rotationen

Gegeben sei der Rotationstensor $\mathbf{R}^{(0)}$, welcher die kartesische Basis \mathbf{e}_i ($i = 1, 2, 3$) in die Basis $\mathbf{t}_i^{(0)}$ transformiert. Gesucht sind Formulierungen der Rotation $\mathbf{R} = \mathbf{t}_i \otimes \mathbf{t}_i^{(0)}$ welche die Basis $\mathbf{t}_i^{(0)}$ auf \mathbf{t}_i abbildet. Im Rahmen eines iterativen Lösungsverfahrens wird zwischen drei möglichen Bezugssystemen unterschieden, wobei der Index (k) den letzten Iterationsschritt, der Index (E) das letzte Inkrement und der Index (0) die unrotierte Referenzkonfiguration bezeichnet.

Kategorie I: Multiplikativer Update basierend auf iterativen, materiellen Rotationsfreiheitsgraden $\Delta\theta_i$ bzgl. der Basis $\mathbf{t}_i^{(k)}$ des letzten Iterationsschrittes in der Form: $\mathbf{R}^{(k+1)} = \mathbf{R}^{(k)} \cdot \mathbf{R}^\Delta(\Delta\theta_i)$.

Vorteile:

- Singularitäten treten praktisch nicht auf
- einfache Linearisierung

Nachteile:

- programmtechnisch umfangreicher Update
- zusätzlicher Speicherplatzbedarf ($\mathbf{R}^{(k)}$)
- im Allgemeinen unsymmetrische Elementsteifigkeitsmatrizen

Kategorie II: Additiver Update basierend auf totalen, materiellen Freiheitsgraden θ_i bzgl. der Basis $\mathbf{t}_i^{(0)}$ der unrotierten Referenzkonfiguration: $\theta_i^{(k+1)} = \theta_i^{(k)} + \Delta\theta_i$ und $\mathbf{R}^{(k+1)} = \mathbf{R}^{(0)} \cdot \mathbf{R}(\theta_i^{(k+1)})$.

- Vorteile:
 - programmtechnisch einfacher Update
 - symmetrische Elementsteifigkeitsmatrizen
 - kein zusätzlicher Speicherplatzbedarf
- Nachteile:
 - für bestimmte Rotationsabbildungen treten generell Singularitäten auf
 - aufwendige Linearisierung

Diese Kategorisierung definiert die Update–Struktur der Rotationsfreiheitsgrade. Darauf aufbauend werden im Folgenden drei unterschiedliche Verfahren erläutert.

Verfahren I: Numerische Implementation im Rahmen der Kategorie I.

Verfahren II: Numerische Implementation im Rahmen der Kategorie II.

Verfahren III: Additiver Update basierend auf inkrementellen, materiellen Freiheitsgraden θ_i bzgl. der Basis $t_i^{(E)}$ des letzten Inkrementes: $\theta_i^{(k+1)} = \theta_i^{(k)} + \Delta\theta_i$ mit $\theta_{i=1,2,3}^{(k=0)} = 0$. Die Gesamttrotation ergibt sich aus dem multiplikativen Update $\mathbf{R}^{(k+1)} = \mathbf{R}^{(E)} \cdot \mathbf{R}(\theta_i^{(k+1)})$. Am Ende der Gleichgewichtsiteration innerhalb eines Lastschrittes (k^E) wird die Geschichtsvariable $\mathbf{R}^{(k^E)} \mapsto \mathbf{R}^{(E)}$ gespeichert. Man erhält somit ein hybrides Verfahren, das wesentliche Eigenschaften der Kategorien I und II kombiniert.

- Vorteile:
 - hinreichend kleine Lastschritte lassen die Berechnung beliebig großer Rotationen zu
 - programmtechnisch einfacher Update
 - symmetrische Elementsteifigkeitsmatrizen
- Nachteile:
 - aufwendige Linearisierung
 - zusätzlicher Speicherplatzbedarf ($\mathbf{R}^{(E)}$)

3 Numerik endlicher Rotationen

Im Folgenden beschränken wir uns stellvertretend für alle unterschiedlichen Parametrisierungen endlicher Rotationen auf die Darstellung elementarer Rotationen. Die Rotationsparameter θ_i bezeichnen daher Drehwinkel bzgl. der einzelnen Drehachsen. Die Reihenfolge der Multiplikation dieser Einzelrotationen \mathbf{R}_i entspricht dem Bezug auf mitbewegte oder feste Rotationsachsen. Im Folgenden werden als feste Rotationsachsen die kartesischen Basisvektoren e_i verwendet, so dass sich die Gesamttrotation zu $\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{R}(\theta_3 e_3) \cdot \mathbf{R}(\theta_2 e_2) \cdot \mathbf{R}(\theta_1 e_1)$ ergibt.

Anhand der strukturmechanischen Beschreibung von glatten Schalen wird diese Parametrisierung innerhalb aller Verfahren diskutiert – zur Schalenformulierung siehe Betsch und Stein (1996) sowie die dort zitierte Literatur. Die Referenzrotation ist über $\mathbf{R}^{(0)} = t_i^{(0)} \otimes e_i$ definiert, wobei im Folgenden $t^{(0)} = t_3^{(0)}$ und $t = t_3$ die Schalendirektoren der unrotierten bzw. rotierten Konfiguration bezeichnen. Des weiteren ist die Drillrotation um den Direktor auszuschließen, so dass mit $\theta_3 \doteq 0$ der Zusammenhang

$$\begin{aligned} t_i &= \mathbf{R}(\mathbf{R}^{(0)} \cdot \boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{R}^{(0)} \cdot e_i \\ &= \mathbf{R}^{(0)} \cdot \mathbf{R}(\theta_2 e_2) \cdot \mathbf{R}(\theta_1 e_1) \cdot e_i \quad \text{mit} \quad R_{ij}(\theta_\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_1 \sin \theta_2 & \cos \theta_1 \sin \theta_2 \\ 0 & \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ -\sin \theta_2 & \sin \theta_1 \cos \theta_2 & \cos \theta_1 \cos \theta_2 \end{bmatrix} \quad (1) \\ &= \mathbf{R}^{(0)} \cdot \mathbf{R}(\theta_\alpha e_\alpha) \cdot e_i \doteq \tilde{\mathbf{R}} \cdot e_i \end{aligned}$$

folgt, wobei $\alpha = 1, 2$. Im Allgemeinen führen im Rahmen einer Finiten Element Formulierung multiplikative Verfahren der Kategorie I zu unsymmetrischen Element–Steifigkeitsmatrizen – vgl. Simo (1992) – und additive Verfahren der Kategorie II zu symmetrischen Element–Steifigkeitsmatrizen, siehe zum Beispiel Cardona and Géradin (1988), Ibrahimbegović u.a. (1995) oder Gruttmann u.a. (2000). Die hier betrachtete Reduktion auf zwei Rotationsfreiheitsgrade liefert hingegen generell symmetrische Element–Steifigkeitsmatrizen.

3.1 Verfahren I anhand elementarer Rotationen

Im Rahmen der Finiten Element Methode ist die Linearisierung des Schalendirektors notwendig. Die Umsetzung innerhalb der singularitätenfreien Kategorie I liefert mit $t_\varepsilon = \mathbf{R}_\varepsilon \cdot e_3$ und $\varepsilon \in \mathbb{R} \mapsto \tilde{\mathbf{R}}_\varepsilon \in SO(3)$ den Zusammen-

hang

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{t} &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} [\tilde{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^\Delta(\varepsilon \Delta \theta_2 \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{R}^\Delta(\varepsilon \Delta \theta_1 \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{e}_3] \right|_{\varepsilon=0} \\ &= -\Delta \theta_\alpha \tilde{\mathbf{R}} \cdot \left[\begin{smallmatrix} (3) \\ \mathbf{e} \end{smallmatrix} \cdot \mathbf{e}_\alpha \right] \cdot \tilde{\mathbf{R}}^t \cdot \mathbf{t} = -\Delta \theta_\alpha \begin{smallmatrix} (3) \\ \mathbf{e} \end{smallmatrix} \cdot \mathbf{t}_\alpha \cdot \mathbf{t} = \Delta \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{t} \quad ,\end{aligned}\quad (2)$$

wobei $\begin{smallmatrix} (3) \\ \mathbf{e} \end{smallmatrix}$ den dreistufigen Permutationstensor bezeichnet und die Exponentialabbildung $\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}) = \exp(-\begin{smallmatrix} (3) \\ \mathbf{e} \end{smallmatrix} \cdot \boldsymbol{\theta})$ benutzt wurde. Den zugehörigen Update fasst Algorithmus 1 zusammen.

Algorithmus 1 *Verfahren I: Multiplikativer Update basierend auf iterativen Rotationsfreiheitsgraden.*

Gegeben: $\mathbf{R}^{(0)}$, *iterative Rotationsfreiheitsgrade* $\Delta \theta_\alpha$, *Geschichtsvariable* $\mathbf{R}^{(k)}$

$$\text{Schritt 1: } R_{ij}^\Delta(\Delta \theta_\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \Delta \theta_2 & \sin \Delta \theta_1 \sin \Delta \theta_2 & \cos \Delta \theta_1 \sin \Delta \theta_2 \\ 0 & \cos \Delta \theta_1 & -\sin \Delta \theta_1 \\ -\sin \Delta \theta_2 & \sin \Delta \theta_1 \cos \Delta \theta_2 & \cos \Delta \theta_1 \cos \Delta \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Schritt 2: } \mathbf{R}^{(k+1)} = \mathbf{R}^{(k)} \cdot \mathbf{R}^\Delta \text{ und } \mathbf{t}^{(k+1)} = \mathbf{R}^{(0)} \cdot \mathbf{R}^{(k+1)} \cdot \mathbf{e}_3$$

3.2 Verfahren II anhand elementarer Rotationen

Die Formulierung elementarer Rotationen innerhalb der Kategorie II liefert mit $\mathbf{t}_\varepsilon = \tilde{\mathbf{R}}_\varepsilon \cdot \mathbf{e}_3$ für den iterativen Direktor $\Delta \mathbf{t}$ den Zusammenhang

$$\Delta \mathbf{t} = \left. \frac{d}{d\varepsilon} [\mathbf{R}^{(0)} \cdot \mathbf{R}([\theta_2 + \varepsilon \Delta \theta_2] \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{R}([\theta_1 + \varepsilon \Delta \theta_1] \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{e}_3] \right|_{\varepsilon=0} = \left. \frac{d}{d\varepsilon} [R_{ij}^{(0)} \bar{R}_{j3}(\theta_\alpha + \varepsilon \Delta \theta_\alpha) \mathbf{e}_i] \right|_{\varepsilon=0} \quad (3)$$

mit den Koeffizienten

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} [\bar{R}_{j3}(\theta_\alpha + \varepsilon \Delta \theta_\alpha)] \right|_{\varepsilon=0} = \begin{bmatrix} -\sin \theta_1 \sin \theta_2 & \cos \theta_1 \cos \theta_2 \\ -\cos \theta_1 & 0 \\ -\sin \theta_1 \cos \theta_2 & -\cos \theta_1 \sin \theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta_1 \\ \Delta \theta_2 \end{bmatrix} \quad . \quad (4)$$

Die Singularität des Verfahrens wird hier deutlich, denn für $\cos \theta_1 = 0 \iff \theta_1 = \pm n \pi/2$ mit $n = 1, 3, 5, \dots$ stimmt der rechte Spaltenvektor der 3×2 Matrix in Gl.(4) mit dem Nullvektor überein und $\Delta \theta_2$ kann daher im Rahmen einer iterativen Berechnung beliebige Werte annehmen. Anschaulich entsprechen diese Rotationswinkel θ_1 bzgl. der Rotationsachse \mathbf{e}_1 mit $\cos \theta_1 = 0$ den Drehungen, welche die Achse \mathbf{e}_2 kollinear auf \mathbf{e}_3 abbilden. Somit liefert eine anschließende Rotationen $\mathbf{R}(\theta_2 \mathbf{R}(\theta_1 \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{e}_2)|_{\cos \theta_1=0}$ mit einem Winkel θ_2 die auszuschließende Drillrotation. Den zugehörigen Update fasst Algorithmus 2 zusammen.

Algorithmus 2 *Verfahren II: Additiver Update basierend auf totalen Rotationsfreiheitsgraden.*

Gegeben: $\mathbf{R}^{(0)}$, *iterative Rotationsfreiheitsgrade* $\Delta \theta_\alpha$, *Geschichtsvariablen* $\theta_\alpha^{(k)}$

$$\text{Schritt 1: } \theta_\alpha^{(k+1)} = \theta_\alpha^{(k)} + \Delta \theta_\alpha$$

$$\text{Schritt 2: } \mathbf{t}^{(k+1)} = R_{ij}^{(0)} \bar{R}_{j3}(\theta_\alpha^{(k+1)}) \mathbf{e}_i \text{ mit:}$$

$$\bar{R}_{j3}^{(k+1)} = [\cos \theta_1^{(k+1)} \sin \theta_2^{(k+1)}, -\sin \theta_1^{(k+1)}, \cos \theta_1^{(k+1)} \cos \theta_2^{(k+1)}]^t$$

3.3 Verfahren III anhand elementarer Rotationen

Im Rahmen des Verfahrens III wird nun die Referenzrotation $\mathbf{R}^{(0)}$ aus Verfahren II durch die Rotation $\mathbf{R}^{(E)}$ ersetzt, die dem letzten Inkrement entspricht. Da die auftretenden inkrementellen Rotationsparameter θ_α nun nicht mehr die Gesamtrotation repräsentieren, tritt die oben beschriebene Singularität praktisch nicht mehr auf, da die inkrementellen Winkel θ_α im Allgemeinen hinreichend klein bleiben. Andernfalls kann ein kleinerer Lastschritt gewählt werden. Den zugehörigen Update fasst Algorithmus 3 zusammen.

Algorithmus 3 *Verfahren III: Hybrider Update basierend auf inkrementellen Rotationsfreiheitsgraden.*

<i>Gegeben:</i>	<i>iterative Rotationsfreiheitsgrade $\Delta\theta_\alpha$, Geschichtsvariablen $\theta_\alpha^{(k)}$ und $\mathbf{R}^{(E)}$</i>
-----------------	---

<i>Schritt 1:</i>	$\theta_\alpha^{(k+1)} = \theta_\alpha^{(k)} + \Delta\theta_\alpha$
<i>Schritt 2:</i>	$\mathbf{t}^{(k+1)} = R_{ij}^{(E)} \bar{R}_{j3}(\theta_\alpha^{(k+1)}) \mathbf{e}_i$ mit: $\bar{R}_{j3}^{(k+1)} = [\cos\theta_1^{(k+1)} \sin\theta_2^{(k+1)}, -\sin\theta_1^{(k+1)}, \cos\theta_1^{(k+1)} \cos\theta_2^{(k+1)}]^t$
<i>Gleichgewicht:</i>	$\mathbf{R}^{(E)} \cdot \mathbf{R}(\theta_2^{(k+1)} \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{R}(\theta_1^{(k+1)} \mathbf{e}_1) \mapsto \mathbf{R}^{(E)}$ und $\theta_{\alpha=1,2}^{(k^E)} = 0$

4 Numerisches Beispiel

Zum Vergleich der vorgestellten Algorithmen wird als numerisches Beispiel ein einseitig eingespannter Kragarm betrachtet, der mit 2×20 Vier-Knoten Schalenelementen diskretisiert wird – siehe Bild 1. Die Geometrie und Materialparameter sind mit dem Beispiel in Argyris und Symeonides (1981) bzw. Simo und Vu-Quoc (1986) übereinstimmend gewählt: Es wird de-Saint-Venant-Material verwendet mit $E \doteq 4.2 \times 10^7$ und $\nu = 0.3$, so dass sich für die Abmessungen $L = 100$ (Länge), $W = 10$ (Breite) und $H = 1$ (Höhe) die Stabgrößen $EI = 3.5 \times 10^7$ und $GA = 1.61538 \times 10^8$ ergeben. Das freie Ende des Kragarms ist am mittleren Knoten durch eine Einzelkraft \mathbf{F} belastet, die in jedem Deformationszustand kollinear zum Schalendirektor \mathbf{t} des Lastknotens verläuft. Im Rahmen der Finiten Element Berechnung liefert diese deformationsabhängige Last $\mathbf{F} = F \mathbf{t}$ daher folgenden Beitrag zur Arbeit der äußeren Lasten

$${}^{\text{fol}}G_{\text{ext}} = F \delta\varphi_{I^F}^t \cdot \mathbf{t} \quad , \quad (5)$$

wobei φ den Ortsvektor der Schalenmittelfläche charakterisiert und I^F den Knotenindex des Lastangriffspunktes bezeichnet. Die zugehörige Linearisierung liefert unsymmetrische Element-Steifigkeitsmatrizen und für die gewählten Randbedingungen dieses Beispiels wird die Gesamt-Steifigkeitsmatrix ebenfalls unsymmetrisch. Zur allgemeinen Formulierung deformationsabhängiger Lasten sei hier auf die Arbeiten von Sewell (1967) sowie Schweizerhof und Ramm (1984) verwiesen.

Bild 1 zeigt die Referenzkonfiguration des Kragarms sowie mehrere verformte Zustände in räumlicher Darstellung und schematischer Seitenansicht. Für kleine Lasten ähnelt die Deformation einer Aufrollbewegung unter reiner Biegung; erst im weiteren Belastungsverlauf stellt sich eine doppelt gekrümmte Konfiguration ein und der Lastangriffspunkt sinkt unter sein Ausgangsniveau ab. Des weiteren ist in Bild 1 der Rotationsfreiheitsgrad θ_1 der unbelasteten freien Endknoten (Knotenindex I^A und I^B) als Funktion von F dargestellt. Der Lastknoten I^F ist hierbei von untergeordnetem Interesse, da der zweite Rotationsfreiheitsgrad aus Symmetriegründen konstant ist und in diesem Beispiel verschwindet ($\mathcal{O}(\theta_2^F) = 10^{-15}$, was im Rahmen der gewählten Rechengenauigkeit liegt). Der zweite Rotationsfreiheitsgrad der unbelasteten freien Endknoten hingegen, nimmt in diesem Beispiel endliche Werte an ($\mathcal{O}(\theta_2^{I^A,B}) = 10^{-1}$). Bei einer Last des Betrags $F = 11945$ stellt sich eine Verformung ein, für welche die Werte der betrachteten Rotationswinkel mit $\theta_1^{I^A,B} = 1.54135$ nahe der analytischen Singularität von $\theta_1 = \pi/2$ liegen. Bereits in dieser Umgebung der exakten Singularität weist das Verfahren II numerische Instabilitäten auf, so dass im Rahmen einer Newton Iteration kaum Konvergenz zu erzielen ist – die zu Grunde liegende Steifigkeitsmatrix ist also schlecht konditioniert. Im Gegensatz hierzu benötigen die vorgestellten Algorithmen der Verfahren I und III wesentlich weniger Iterationen, um den Gleichgewichtszustand zu berechnen. Tabelle 1 stellt anhand der

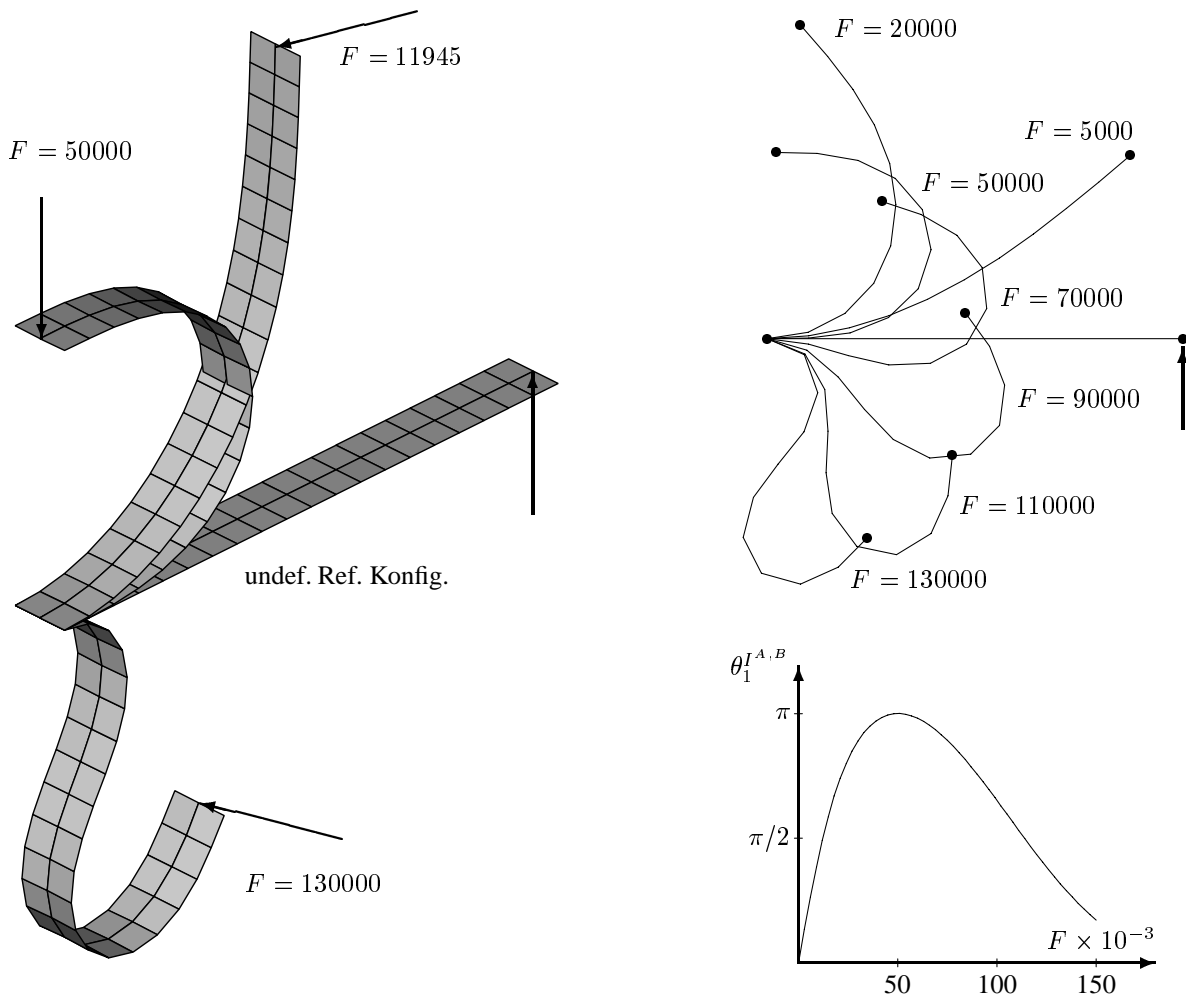


Bild 1: Kragarm unter mitbewegter Einzellast.

Norm des Residuums im Rahmen der Newton Iteration der Finiten Element Berechnung diese Eigenschaften der einzelnen Verfahren gegenüber. Betrachtet wird hierbei der Lastschritt $F \in [11750, 11945]$.

5 Zusammenfassung

Zur numerischen Beschreibung endlicher Rotationen existieren zwei allgemeine Kategorien an Algorithmen, die zum einen iterative (I) und zum anderen totale (II) Drehfreiheitsgrade beinhalten. Jede Parametrisierung endlicher Rotationen kann innerhalb beider Kategorien umgesetzt werden. Allen additiven Formulierungen der Kategorie II liegen in der Umsetzung Singularitäten zu Grunde, die lediglich in der praktischen Anwendung dadurch behoben werden können, dass sich im Rahmen einer in einzelne Lastschritte unterteilten Berechnung die auftretenden Freiheitsgrade auf den Gleichgewichtszustand des letzten Inkrementes beziehen (Verfahren III). Das abschließende Finite Element Beispiel unterstreicht den Verlust der Konvergenz des Newton Verfahrens bei Verwendung des standard additiven Algorithmus (Verfahren II) bereits in der Nähe der analytischen Singularität.

Literatur

Altmann, S. L.: *Rotations, Quaternions and Double Groups*. Clarendon Press, Oxford (1986).

Argyris, J. H.; Symeonides, S.: Nonlinear finite element analysis of elastic systems under nonconservative loading – natural formulation. Part I: Quasistatic problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 26, (1981), 75–123.

Betsch, P.; Menzel, A.; Stein, E.: On the parametrization of finite rotations in computational mechanics. A classification of concepts with application to smooth shells. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 155, (1998), 273–305.

Tabelle 1: Norm des Residuums innerhalb des Lastschrittes $F \in [11750, 11945]$.

Verfahren I (elementare Rotationen)	Verfahren II (elementare Rotationen)	Verfahren III (elementare Rotationen)
1.949916 E + 02	1.949916 E + 02	1.949916 E + 02
8.433229 E + 04	1.251561 E + 05	5.956414 E + 04
2.127597 E + 01	6.732856 E + 04	2.843861 E + 02
3.280380 E - 01	9.763342 E + 03	2.976625 E + 03
1.678641 E - 06	1.166502 E + 05	8.825525 E - 01
	9.711156 E + 03	3.811774 E - 02
	3.110315 E + 05	1.498415 E - 06
	3.425361 E + 03	
	6.605754 E + 04	
	2.472728 E + 03	
	1.878583 E + 04	
	2.756632 E + 02	
	1.226123 E + 02	
	2.009009 E - 01	
	9.940662 E - 05	
	1.446147 E - 06	

Betsch, P.; Stein, E.: A nonlinear extensible 4-node shell element based on continuum theory and assumed strain interpolations. *J. Nonlinear Sci.*, 6, (1996), 169–199.

Cardona, A.; Géradin, M.: A beam finite element non-linear theory with finite rotations. *Int. J. Numer. Methods Engng.*, 26, (1988), 2403–2438.

Crisfield, M. A.: *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Volume 2*. Wiley, Sussex (1997).

Géradin, M.; Rixen, D.: Parametrization of finite rotations in computational dynamics: A review. *Revue Européenne des Éléments Finis*, 4, 5–6, (1995), 497–553.

Gruttmann, F.; Sauer, R.; Wagner, W.: Theory and numerics of three-dimensional beams with elastoplastic material behaviour. *Int. J. Numer. Methods Engng.*, 48, (2000), 1675–1702.

Ibrahimbegović, A.; Frey, F.; Kožar, I.: Computational aspects of vector-like parametrization of three-dimensional finite rotations. *Int. J. Numer. Methods Engng.*, 38, (1995), 3653–3673.

Menzel, A.; Betsch, P.; Stein, E.; Steinmann, P.: Zur Formulierung und Numerik der Statik und Dynamik von Schalen bei endlichen Deformationen. *Bauingenieur*, 73, (1998), 283–291.

Schweizerhof, K.; Ramm, E.: Displacement dependent pressure loads in nonlinear finite element analysis. *Comput. Struct.*, 18, (1984), 1099–1114.

Sewell, M. J.: On configuration-dependent loading. *Arch. Rat. Mech.*, 23, (1967), 327–351.

Simo, J. C.: The (symmetric) hessian for geometrically nonlinear models in solid mechanics: Intrinsic definition and geometric interpretation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 96, (1992), 189–200.

Simo, J. C.; Vu-Quoc, L.: A three-dimensional finite-strain rod model. Part II: Computational aspects. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 58, (1986), 79–116.

Anschriften: Dr.-Ing. A. Menzel und Prof. Dr.-Ing. P. Steinmann, Lehrstuhl für Technische Mechanik, Technische Universität Kaiserslautern, PF 3049, D-67663 Kaiserslautern, email: amenzel@rhrk.uni-kl.de, ps@rhrk.uni-kl.de, url: <http://mechanik.mv.uni-kl.de>; Prof. Dr.-Ing. P. Betsch, Institut für Mechanik und Regelungstechnik – Mechatronik, Universität Siegen, Paul-Bonatz-Straße 9-11, D-57068 Siegen, email: betsch@imr.mb.uni-siegen.de, url: <http://www.mb.uni-siegen.de/d/imr6>; Prof. em. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. Dr. h.c. mult. E. Stein, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover, Appelstr. 9A, D-30167 Hannover, email: stein@ibnm.uni-hannover.de, url: <http://www.ibnm.uni-hannover.de>.