

## Zur Modellierung des geschwindigkeitsabhängigen Verhaltens von superelastischen Formgedächtnislegierungen

A. Vishnevsky, R. Lammering, I. Schmidt

*Es wird ein thermodynamisch konsistentes Modell für die konstitutive Beschreibung von superelastischen Formgedächtnislegierungen vorgestellt, das die geschwindigkeitsabhängigen Effekte bei Be- und Entlastung erfasst. Weiterhin wird die numerische Lösung des Systems aus Evolutionsdifferentialgleichungen, Anfangsbedingungen und Wärmeleitungsdifferentialgleichung beschrieben. Numerische Berechnungen belegen die Plausibilität des Modells.*

### 1 Einleitung

Metallische Formgedächtnislegierungen (FGL) kombinieren im superelastischen Zustand eine hohe Dämpfungskapazität mit Festigkeitseigenschaften, die vergleichbar sind mit denen herkömmlicher Stähle. Superelastizität entsteht bei mechanischer Belastung einer austenitisch (in der Hochtemperaturphase) vorliegenden FGL. Nach Erreichen der kritischen Spannung beginnt die Austenit-Martensit-Umwandlung. Im Unterschied zum thermisch erzeugten Martensit bilden sich unter Last nur Varianten aus, die günstig zur Belastungsrichtung orientiert sind. Diese Umwandlung ist mit Dehnungen von bis zu 8% verbunden. Nach der Entlastung auf Spannungen unterhalb der Martensit-Austenit-Umwandlungsspannung kehrt das Gitter zurück in den austenitischen Zustand. Damit stellen sich auch die Dehnungen zurück. Die Austenit-Martensit-Umwandlungsspannung ist erheblich größer als die für die Rückumwandlung nötige, so dass sich eine ausgeprägte mechanische Hysterese bildet. Die Fläche dieser Hysterese definiert die Energiemenge, die in jedem Zyklus durch mechanische Belastung in Wärme umgesetzt wird. Sie ist ein Maß für die mechanische Dämpfung.

Unter quasistatischer Belastung ( $\dot{\epsilon} \lesssim 0,001 \text{ s}^{-1}$ ) läuft die Phasenumwandlung bei näherungsweise konstanter Spannung ab. Für eine bestimmte FGL hängt diese Spannung nur von der Temperatur des untersuchten Körpers ab, die bei geringen Belastungsgeschwindigkeiten gleich der Umgebungstemperatur bleibt. Unter hoher Belastungsgeschwindigkeit steigt die Neigung der Spannungs-Dehnungs-Kurve während der Phasentransformation mit wachsender Dehnungsrate. Überdies bringt eine zyklische Belastung zusätzliche Änderungen in den Spannungs-Dehnungs-Verlauf. Infolgedessen werden die Form und die Fläche der mechanischen Hysterese beeinflusst (Lammering und Schmidt, 2001).

Wegen der hohen Dämpfungskapazität sind superelastische FGL für Anwendungen in den Bereichen der Schwingungsdämpfung und Absorption von Stoßwellenenergie geeignet (Birman, 1997).

In den letzten Jahren entstand eine ganze Reihe von mikromechanisch, thermomechanisch und phänomenologisch basierten Stoffgesetzen zur Beschreibung von FGL, vgl. u.a. Helm und Haupt (2002), Bo und Lagoudas (1999), Levitas (1998), Brinson und Huang (1996), Raniecki und Lexcelent (1998), Siredey u. a. (1999), Tanaka (1986), Seelecke (1999), Bertram (1982), Auricchio (1995). Nicht alle Stoffgesetze sind zur Beschreibung des geschwindigkeitsabhängigen Verhaltens von superelastischen FGL anwendbar. So haben zum Beispiel mikromechanisch basierte Stoffgesetze oftmals eine große Anzahl von Parametern, die in der Ingenieurpraxis schwierig experimentell zu bestimmen sind. Ein gutes Verhältnis zwischen einer einfachen Definition der Materialparameter und einer befriedigenden Beschreibung der vielfältigen komplexen Phänomene hat eine auf Fließflächen basierende Klasse von Stoffgesetzen (Helm und Haupt, 2002; Bo und Lagoudas, 1999; Bertram, 1982; Auricchio, 1995). Diese Modelle beinhalten eine Vielzahl von thermodynamischen und mechanischen Aspekten und nutzen die Methoden

der Plastizitätstheorie, was in Hinblick auf eine FE Modellierung auf Grund der großen Anzahl von Vorarbeiten vorteilhaft ist.

In dieser Arbeit wird das geschwindigkeitsabhängige Verhalten eines thermodynamisch konsistenten Modells für FGL untersucht (Helm und Haupt, 2002). Nach der Behandlung der wesentlichen Gleichungen des Stoffgesetzes und der Wärmeleitungsgleichung in Kapitel 2 wird in Kapitel 3 die numerische Umsetzung des Modells für die Simulation von Zugversuchen dargestellt. Schließlich folgen Beispielrechnungen in Kapitel 4.

## 2 Modellierung des Werkstoffverhaltens

In diesem Abschnitt wird die geometrisch lineare konstitutive Modellierung superelastischer Formgedächtnislegierungen behandelt. Dem Modell liegt eine Funktion für die Freie Energie zugrunde, die zusammen mit den Evolutionsgleichungen und der Wärmeleitungsgleichung die wesentlichen thermomechanischen Verhältnisse von NiTi-FGL beschreibt. Die Modellbildung folgt dem Ansatz von Helm und Haupt (Helm und Haupt, 2002).

### 2.1 Grundlegende Zerlegungen

Das Stoffgesetz basiert auf additiven Zerlegungen von Verzerrungen und Energien. Der linearisierte Greensche Verzerrungstensor

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_e + \mathbf{E}_d \quad (1)$$

wird in den elastischen Anteil der Gesamtverzerrung  $\mathbf{E}_e$  und den Verzerrungszustand des spannungsinduzierten Martensits  $\mathbf{E}_d$  aufgespalten. Letzterer wird seinerseits additiv zerlegt in zwei weitere Terme:

$$\mathbf{E}_d = \mathbf{Y}_e + \mathbf{Y}_d \quad (2)$$

Die inneren Variablen  $\mathbf{Y}_e$  und  $\mathbf{Y}_d$  in Gleichung (2) sind vom Verzerrungstyp und stehen mit Energiespeicherungsprozessen bzw. Dissipationseigenschaften der Deformation in Zusammenhang.

Die Freie Energie wird gemäß

$$\psi = \hat{\psi}(\theta, \mathbf{E}_e, z, \mathbf{Y}_e) = \hat{\psi}_e(\theta, \mathbf{E}_e, z) + \hat{\psi}_s(\mathbf{Y}_e). \quad (3)$$

in den thermoelastischen Anteil  $\hat{\psi}_e$  und den viskoinelastischen Anteil  $\hat{\psi}_s$  zerlegt. Die Variable  $\theta$  bezeichnet die Temperatur. Die Größe  $z$  beschreibt den spannungsinduzierten Anteil des Martensits und nimmt Werte zwischen 0 und 1 an.

### 2.2 Dissipationsungleichung

Aus der Energiebilanz und dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik erhält man mit der Clausius-Duhem-Ungleichung

$$-\dot{\psi} - \dot{\theta}\eta + \frac{1}{\rho} \mathbf{T} : \dot{\mathbf{E}} - \frac{1}{\rho\theta} \mathbf{q} \cdot \text{grad } \theta \geq 0 \quad (4)$$

den Ausdruck für die thermomechanische Dissipation (Truesdell und Noll, 2004). In Gleichung (4) sind  $\eta$  die Entropie,  $\rho$  die Massendichte,  $\mathbf{T}$  der Spannungstensor und  $\mathbf{q}$  der Wärmeflussvektor. Die Dissipationsungleichung wird in den thermischen Anteil

$$-\frac{1}{\rho\theta} \mathbf{q} \cdot \text{grad } \theta \geq 0 \quad (5)$$

und die mechanische Dissipation

$$\delta = -\dot{\psi} - \dot{\theta}\eta + \frac{1}{\rho} \mathbf{T} : \dot{\mathbf{E}} \geq 0 \quad (6)$$

zerlegt. Während Gleichung (5) durch eine geeignete Wahl des Wärmeleitgesetzes erfüllt wird, ist Gleichung (6) von besonderem Interesse.

Nach Ableitung der Freien Energie unter Verwendung der Gleichungen (1) und (2) nimmt die Dissipationsungleichung folgende Form an:

$$\delta = - \left[ \frac{\partial \hat{\psi}_e}{\partial \theta} + \eta \right] \dot{\theta} + \frac{1}{\rho} \left[ \mathbf{T} - \rho \frac{\partial \hat{\psi}_e}{\partial \mathbf{E}_e} \right] : \dot{\mathbf{E}}_e + \frac{\partial \hat{\psi}_s}{\partial \mathbf{Y}_e} : \dot{\mathbf{Y}}_d - \frac{\partial \hat{\psi}_e}{\partial z} \dot{z} + \frac{1}{\rho} \left[ \mathbf{T}^D - \rho \frac{\partial \hat{\psi}_s}{\partial \mathbf{Y}_e} \right] : \dot{\mathbf{E}}_d \geq 0 \quad (7)$$

Dabei ist  $\mathbf{T}^D$  der deviatorische Anteil des Spannungstensors.

Aus Gleichung (7) bekommt man die Potenzialbeziehungen für den Spannungstensor und die Entropie

$$\mathbf{T} = \rho \frac{\partial \hat{\psi}_e}{\partial \mathbf{E}_e}, \quad \eta = - \frac{\partial \hat{\psi}_e}{\partial \theta} \quad (8)$$

sowie die Restungleichung

$$\rho \delta = \rho \frac{\partial \hat{\psi}_s}{\partial \mathbf{Y}_e} : \dot{\mathbf{Y}}_d - \rho \frac{\partial \hat{\psi}_e}{\partial z} \dot{z} + \left[ \mathbf{T}^D - \rho \frac{\partial \hat{\psi}_s}{\partial \mathbf{Y}_e} \right] : \dot{\mathbf{E}}_d \geq 0. \quad (9)$$

Durch Annahme einer linearen Abhängigkeit zwischen dem spannungsinduzierten Anteil des Martensits  $z$  und dem inelastischen Verzerrungstensor  $\mathbf{E}_d$  (Levitas, 1998)

$$z = \frac{\|\mathbf{E}_d\|}{\sqrt{\frac{2}{3}}\gamma_d} \Rightarrow \dot{z} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}}\gamma_d} \frac{\mathbf{E}_d}{\|\mathbf{E}_d\|} : \dot{\mathbf{E}}_d \quad (10)$$

bekommt man:

$$\rho \delta = \rho \frac{\partial \hat{\psi}_s}{\partial \mathbf{Y}_e} : \dot{\mathbf{Y}}_d + \left[ \mathbf{T}^D - \rho \frac{\partial \hat{\psi}_s}{\partial \mathbf{Y}_e} - \frac{\rho}{\sqrt{\frac{2}{3}}\gamma_d} \frac{\partial \hat{\psi}_e}{\partial z} \frac{\mathbf{E}_d}{\|\mathbf{E}_d\|} \right] : \dot{\mathbf{E}}_d \geq 0 \quad (11)$$

Hierin ist  $\gamma_d$  eine Materialkonstante, welche im eindimensionalen Fall die gesamte Hysteresenbreite definiert, vgl. Bild 1.

Der Ausdruck (11) lässt sich in folgender Form darstellen:

$$\rho \delta = \mathbf{X}_\varepsilon : \dot{\mathbf{Y}}_d + [\mathbf{T}^D - \mathbf{X}_\varepsilon - \mathbf{X}_\theta] : \dot{\mathbf{E}}_d \geq 0 \quad (12)$$

Dabei sind die inneren Variablen

$$\mathbf{X}_\varepsilon = \rho \frac{\partial \hat{\psi}_s}{\partial \mathbf{Y}_e}, \quad \mathbf{X}_\theta = \frac{\rho}{\sqrt{\frac{2}{3}}\gamma_d} \frac{\partial \hat{\psi}_e}{\partial z} \frac{\mathbf{E}_d}{\|\mathbf{E}_d\|} \quad (13)$$

eingeführt worden, die den Charakter von Spannungen haben (Helm und Haupt, 2002). Für den eindimensionalen Fall sind die Größen in Bild 1 dargestellt.

Mit der Annahme proportionaler Beziehungen bei Verwendung positiv-(semi)definiten Faktoren zwischen den Variablen in Gleichung (12)

$$\mathbf{X}_\varepsilon \sim \dot{\mathbf{Y}}_d, \quad [\mathbf{T}^D - \mathbf{X}_\varepsilon - \mathbf{X}_\theta] \sim \dot{\mathbf{E}}_d \quad (14)$$

ist die Erfüllung der Restungleichung gewährleistet und damit automatisch die thermodynamische Konsistenz des Materialmodells.

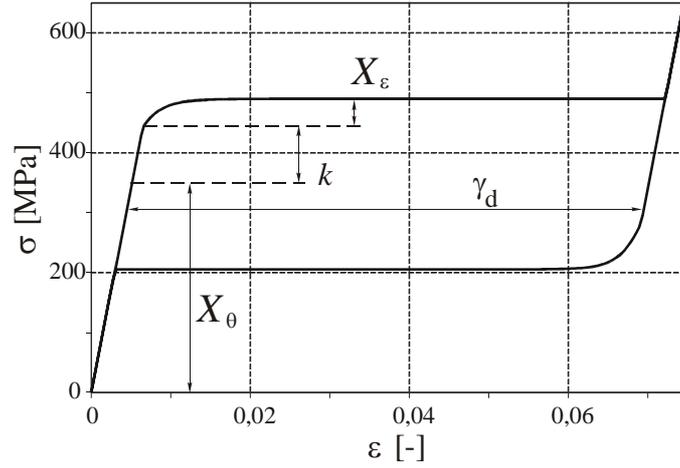


Bild 1: Grafische Darstellung der wesentlichen Größen des Modells im eindimensionalen Fall (Zahlenwerte für NiTi SE-508)

### 2.3 Definition der Freien Energie

Die allgemeine Formulierung der Freien Energie ist durch Gleichung (3) gegeben. Ihr thermoelastischer Anteil wird auf folgende Weise dargestellt (Raniecki und Bruhns, 1991; Helm und Haupt, 2002):

$$\begin{aligned} \psi_e = \hat{\psi}_e(\theta, \mathbf{E}_e, z) = & \frac{\mu}{\rho} \mathbf{E}^D : \mathbf{E}^D + \frac{\kappa}{2\rho} (Sp \mathbf{E}_e)^2 - \frac{3\alpha\kappa}{\rho} (Sp \mathbf{E}_e) (\theta - \theta_0) \\ & + c_d (\theta - \theta_0) + u_0^A + z\Delta u_0 - \theta \left[ c_d \ln \frac{\theta}{\theta_0} + \eta_0^A + z\Delta\eta_0 \right] \end{aligned} \quad (15)$$

In Gleichung (15) sind  $\mu$  der Schubmodul,  $\kappa$  der Kompressionsmodul,  $\alpha$  der Koeffizient der thermischen Ausdehnung,  $\theta_0$  die Referenztemperatur und  $c_d$  die Wärmekapazität. Die Größen  $\Delta u_0$  und  $\Delta\eta_0$  berechnen sich zu  $\Delta u_0 = u_0^M - u_0^A$  und  $\Delta\eta_0 = \eta_0^M - \eta_0^A$ , wobei  $u_0$  und  $\eta_0$  die Anfangswerte der inneren Energie und der Entropie sind. Die Kopfzeiger  $M$  und  $A$  bezeichnen Martensit bzw. Austenit,  $D$  steht für Deviatoranteil.

Der viskoinelastische Anteil der Freien Energie wird in Form einer quadratischen Funktion angenommen (Helm und Haupt, 2002):

$$\psi_s = \hat{\psi}_s(\mathbf{Y}_e) = \frac{c}{2\rho} \mathbf{Y}_e : \mathbf{Y}_e \quad (16)$$

Die weiteren Abhängigkeiten für  $\mathbf{T}$ ,  $\eta$  und  $\Delta\psi = \frac{\partial\psi_e}{\partial z}$  bekommt man durch Ableitung der Freien Energie nach der entsprechenden dualen Variablen.

### 2.4 Evolutionsgleichungen

In diesem Abschnitt werden die proportionalen Beziehungen in Gleichung (14) durch entsprechende Evolutionsgleichungen für die Beschreibung superelastischer FGL ersetzt. Jede Phasenumwandlung lässt sich analog zum plastischen Fließen mit Phasenumwandlungsflächen beschreiben. Die einfachste Lösung ist die Verwendung einer Hyperfläche im Spannungsraum:

$$f^{A \rightarrow M} = \|\mathbf{T}^D - \mathbf{X}_\varepsilon\| - \sqrt{\frac{2}{3}}k - \|\mathbf{X}_\theta\|; \quad f^{M \rightarrow A} = \|\mathbf{T}^D - \mathbf{X}_\varepsilon - \mathbf{X}_\theta\| - \sqrt{\frac{2}{3}}k \quad (17)$$

mit

$$\|\mathbf{X}_\theta\| = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\rho (\Delta u_0 - \theta \Delta \eta_0)}{\gamma_d} \quad (18)$$

In den Gleichungen (17) beschreiben die Funktionen  $f^{A \rightarrow M}$  und  $f^{M \rightarrow A}$  den Verlauf der Spannungen bei der Austenit-Martensit Transformation und bei der Rücktransformation. Die Größe  $k$  ist äquivalent zur Fließspannung (siehe Bild 1).

Die Evolution der inelastischen Verzerrungen wird mit Hilfe eines assoziierten Fließgesetzes dargestellt:

$$\dot{\mathbf{E}}_d = \lambda_d \frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}} = \lambda_d \mathbf{N} \quad (19)$$

Hierin ist  $\mathbf{N}$  der Normalenvektor zur Umwandlungsfläche und  $\lambda_d$  der sogenannte inelastische Multiplikator.

Für den inelastischen Multiplikator sowie für die Transformationsrichtung im superelastischen Zustand gelten folgende Regeln:

$$\lambda_d = \begin{cases} \frac{1}{\eta_d} \left( \frac{f}{r_d} \right)^m & A \rightarrow M \quad \text{für} \quad \|\mathbf{T}^D - \mathbf{X}_\varepsilon\| = \|\mathbf{X}_\theta^{A \rightarrow M}\|, f^{A \rightarrow M} > 0, z < 1 \\ \frac{1}{\eta_d} \left( \frac{f}{r_d} \right)^m & M \rightarrow A \quad \text{für} \quad f^{M \rightarrow A} > 0, f^{A \rightarrow M} < 0, z > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (20)$$

Hierin sind  $\eta_d$ ,  $r_d$  und  $m$  die Viskositätskonstanten. Die Evolutionsgleichung für die interne Variable  $\mathbf{Y}_d$  kommt aus der Konsistenzbedingung:

$$\dot{\mathbf{Y}}_d = \frac{b}{c} \dot{s}_d \mathbf{X}_\varepsilon \quad (21)$$

Dabei sind  $b$  und  $c$  Materialkonstanten und

$$\dot{s}_d = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\dot{\mathbf{E}}_d\| \quad (22)$$

beschreibt die akkumulierten inelastischen Verzerrungen.

## 2.5 Wärmeleitungsgleichung

Ausgehend vom ersten Hauptsatz der Thermodynamik

$$\dot{e} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{q} + r + \frac{1}{\rho} \mathbf{T} : \dot{\mathbf{E}} \quad (23)$$

mit der Inneren Energie  $e = \psi + \theta \eta$  erhält man nach Ableitung der Inneren Energie sowie der Freien Energie  $\psi$  unter Verwendung der zerlegten Verzerrungen (Gleichungen (1) und (2)), der Potenzialbeziehungen (Gleichung (8)) und Gleichung (13) die erweiterte Wärmeleitungsgleichung

$$c_d \dot{\theta} + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{q} - r = -\frac{3\alpha\kappa}{\rho} \theta S_p \dot{\mathbf{E}}_e + \frac{1}{\rho} \mathbf{T} : \dot{\mathbf{E}}_d - \Delta u_0 \dot{z} - \frac{1}{\rho} \mathbf{X}_\varepsilon : \dot{\mathbf{Y}}_e \quad (24)$$

mit der konstanten Wärmekapazität  $c_d = -\theta \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}$  und der Wärmezufuhr im Volumen infolge skalarer Wärmequellen  $r$ .

Für den Fall der spannungsinduzierten Phasenumwandlung (Superelastizität) nimmt die Wärmeleitungsgleichung (24) mit den Evolutionsgleichungen schließlich folgende Form an:

$$\underbrace{c_d \dot{\theta} + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{q} - r}_{w_t} = \underbrace{-\frac{3\alpha\kappa}{\rho} S_p \dot{\mathbf{E}}_e + \frac{1}{\rho} \mathbf{X}_\varepsilon : \dot{\mathbf{Y}}_d + \frac{1}{\rho} \left( f + \sqrt{\frac{2}{3}} k \right)}_{w_m} \underbrace{\lambda_d - \theta \Delta \eta_0 \dot{z}_{SIM}}_{w_u} \quad (25)$$

In der Wärmeleitungsgleichung (25) sind folgende Terme zu erkennen:  $w_t$  enthält rein thermische Effekte,  $w_m$  thermoelastische und thermoinelastische Kopplungen,  $w_u$  den Energieaustausch, verursacht durch die Phasenumwandlung.

### 3 Numerische Simulation des thermomechanischen Verhaltens von NiTi-Drähten

#### 3.1 Annahmen

Die superelastische Verformung einer Zugprobe ist im Experiment ein recht komplexer thermomechanischer Prozess. Spannungserhöhung an den Klemmbacken des Prüfstandes, konvektiver Wärmeaustausch an der Oberfläche der Versuchsprobe, inhomogene Phasenumwandlung usw. machen die Modellierung beliebig kompliziert. Die Abbildung der wesentlichen Prozesse erfordert sinnvolle Vereinfachungen.

In dieser Arbeit werden Zugversuche an dünnen Drähten betrachtet. Deren Geometrie in Kombination mit dem Wärmeübergang zwischen Probe und umgebender Luft sowie der Wärmeleitung des Materials führt zu einer kleinen Biot-Zahl (Hewitt u. a., 1994):

$$Bi = \frac{\alpha_t D}{\lambda} \approx 0,05 \leq 0,1 \quad (26)$$

Hierin sind  $\alpha_t$  die Wärmeübergangszahl (Luft-Probe),  $\lambda$  die Wärmeleitfähigkeit und  $D$  der Durchmesser des Drahtes. Die Stellen der Phasenumwandlung sind im Experiment nicht gleichmäßig in einer Probe verteilt. Dadurch entsteht eine nicht homogene Erwärmung bzw. Abkühlung über die Probenlänge (Shaw und Kyriakides, 1995; Helm und Haupt, 2002). In den weiteren numerischen Beispielen wird jedoch angenommen, dass die Phasentransformation im ganzen Volumen gleichzeitig verläuft. Wegen der kleinen Biot-Zahl kann davon ausgegangen werden, dass zu einem bestimmten Zeitpunkt in der gesamten Probe eine einheitliche Temperatur herrscht.

Die räumliche Aufwärmung durch äußere Energiequellen wird ausgeschlossen. Daher entfällt in Gleichung (25) der Term  $r$ . Außerdem sind die Temperaturänderungen so gering, dass die Wärmeausdehnung im Rahmen dieser Arbeit vernachlässigt werden kann.

#### 3.2 Thermomechanische Kopplung

Im Folgenden wird der eindimensionale Zugversuch betrachtet. Die tensoriellen Gleichungen werden daher durch entsprechende skalare Gleichungen für die eindimensionale Simulation von Zugversuchen ersetzt.

Die Wärmeleitungsgleichung (25) nimmt folgende Form an:

$$\underbrace{c_d \dot{\theta}}_{w_1} = \underbrace{-\frac{\alpha_t A}{\rho V} (\theta - \theta_0)}_{w_2} + \underbrace{\frac{1}{\rho} \left( \sqrt{\frac{2}{3}} k + \frac{3}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{b}{c} X_\varepsilon^2 + f \right)}_{w_3} \lambda_d \underbrace{-\theta \Delta \eta_0 \dot{z}}_{w_4} \quad (27)$$

Hierin sind  $A$  die Probenoberfläche,  $V$  das Probenvolumen und  $\theta_0$  die als konstant angenommene Temperatur der Umgebung. Gleichung (27) stellt eine thermodynamische Bilanzgleichung dar, in der alle Komponenten massenspezifische Leistungen sind.  $w_1$  ist die Leistung, die erforderlich ist, um den Körper um eine bestimmte Temperatur in einer bestimmten Zeit zu erwärmen.  $w_2$  stellt die Leistung dar, die als Wärmeaustausch über die Oberfläche des Körpers abgeführt wird. Die Klammer in  $w_3$  enthält die folgenden Terme:  $\sqrt{\frac{2}{3}} k$  ist ein Maß für die Wärmeenergie aus der Differenz zwischen den Umwandlungsspannungen,  $\frac{3}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{b}{c} X_\varepsilon^2$  für die aus kinematischer Verfestigung und der letzte Term  $f$  ist viskoser Natur. Aus Gleichung (19) folgt, dass  $\lambda_d$  zur inelastischen Verzerrung proportional ist und immer positiv bleibt. Somit steht  $w_3$  immer für eine positive Wärmeproduktion.

Ein wichtiger Anteil der Leistung in Gleichung (27) ist  $w_4$ . Das Produkt  $-\theta \Delta \eta_0$  ist stets positiv, während das Vorzeichen von  $\dot{z}$  von der Umwandlungsrichtung abhängt. Daraus folgt, dass die direkte Austenit-Martensit-Umwandlung ( $\dot{z} > 0$ ) eine positive Wärmeleistung und dementsprechend die Martensit-Austenit-Umwandlung ( $\dot{z} < 0$ ) eine negative Wärmeleistung erzeugen.

Die Anfangsspannungen der Phasenumwandlungen sind sehr empfindlich bezüglich der Temperatur. Eine Erhöhung der Temperatur ruft eine Steigung der Anfangsspannungen hervor und umgekehrt. Gleichung (18) zeigt die Abhängigkeit der inneren Variablen  $\mathbf{X}_\theta$  von der Temperatur.

Die aufgeführten Gleichungen der thermomechanischen Kopplung bilden ein geschlossenes System, in dem eine steigende Spannung zu einer Phasenumwandlung (Austenit-Martensit-Umwandlung) führt, die ihrerseits über die Wärmebilanzgleichung die Temperatur des Körpers erhöht und dementsprechend die Anfangsspannung der weiteren Umwandlung. Die Martensit-Austenit-Umwandlung verläuft sinngemäß.

### 3.3 Modellparameter

Das vorgestellte phänomenologische Modell für Formgedächtnislegierungen enthält einen umfangreichen Satz von Parametern, der sich aus der Komplexität des Stoffgesetzes ergibt. Die verwendeten Materialkonstanten für die NiTi Legierung SE-508 sind in Tabelle 1 enthalten. Sie wurden in eigenen Laborversuchen (Schmidt und Lammering, 2004) ermittelt und durch Werte aus der Literatur ergänzt (Helm und Haupt, 2002).

Parameter	Bezeichnung	Wert	Einheit
Elastizitätsmodul	$E$	68200	MPa
Halbe Hysteresenhöhe	$k$	90	MPa
Hysteresenbreite	$\gamma_d$	0,065	-
*) Schubmodul für $\mathbf{X}_\varepsilon$	$c$	14000	MPa
*) Begrenzungsterm für $\mathbf{X}_\varepsilon$	$b$	700	-
*) Viskosität	$\eta_d$	$2 \cdot 10^6$	MPa/s
*) Exponent	$m$	3	-
*) Viskositätsparameter	$r_d$	1	MPa
*) Dichte	$\rho$	6400	kg/m <sup>3</sup>
Entropiedifferenz	$\Delta\eta_0$	-81,25	J/kg K
Energiedifferenz	$\Delta u_0$	-20410	J/kg
*) Wärmekapazität	$c_d$	0,00046	J/kg·K
Wärmeübergangszahl	$\alpha_t$	52,9	W/m <sup>2</sup> K

Tabelle 1: Für die Modellierung verwendete Parameter. Werte aus der Literatur sind mit \*) gekennzeichnet.

### 3.4 Beschreibung des numerischen Verfahrens

Das beschriebene Modell für FGL im superelastischen Zustand besteht aus den Evolutionsdifferentialgleichungen, die die Beziehungen zwischen den Variablen des Modells herstellen; den Anfangsbedingungen der Umwandlung und der Wärmeleitungsdifferentialgleichung.

Die Differentialgleichungen werden mit Hilfe des impliziten Euler-Verfahrens linearisiert (Simo und Hughes, 1998) und mit einem Prädiktor-Korrektor-Verfahren für die Spannungen gelöst. Der numerische Algorithmus für die Zeitintegration der Differentialgleichungen ist ähnlich wie die Algorithmen in den Arbeiten Simo und Hughes (1998), Hartmann und Haupt (1993), Meggyes und Új (2000) aufgebaut. Seine Aufgabe besteht darin, bei vorgegebenem Verzerrungsverlauf  $\varepsilon(t)$  den entsprechenden Spannungsverlauf  $\sigma(t)$  zu ermitteln.

Es wird davon ausgegangen, dass die Anfangsbedingungen  ${}^n\varepsilon_d, {}^n s_d, {}^n X_\varepsilon, {}^n z, {}^n \theta$  aus dem Gleichgewichtsschritt  ${}^n(\dots)$  bekannt sind. In einem Zeitschritt  $\Delta t$  werden die aktualisierten Zustandsvariablen  ${}^{n+1}\varepsilon_d, {}^{n+1}s_d, {}^{n+1}X_\varepsilon, {}^{n+1}z, {}^{n+1}\theta$  abhängig vom Verzerrungszuwachs  $\Delta{}^n\varepsilon$  berechnet. Von der Seite der numerischen Berechnungen sehen beide Umwandlungsrichtungen ähnlich aus. Daher wird im Folgenden nur auf die Austenit-Martensit Umwandlung eingegangen.

Zuerst wird in einem elastischen Prediktor-Schritt eine Versuchsspannung (trial stress)

$${}^{n+1}\sigma^{tr} = C ({}^{n+1}\varepsilon - {}^n\varepsilon_d) \quad (28)$$

aus den aktualisierten Verzerrungen  ${}^{n+1}\varepsilon$  berechnet. Hierin ist  $C$  der Elastizitätsmodul und  ${}^{n+1}\varepsilon = \varepsilon({}^n t + \Delta t)$ . Dann werden die inneren Variablen

$${}^{n+1}X_\theta^{tr} = \frac{\rho}{\gamma_d} (\Delta u_0 - \Delta\eta_0 {}^n \theta); \quad {}^{n+1}X_\varepsilon^{tr} = {}^n X_\varepsilon \quad (29)$$

ermittelt sowie die Prediktor-Werte der effektiven Spannung  $\tau^{tr}$  und der Fließfunktion  $f^{tr}$  für die Martensitum-

wandlung:

$${}^{n+1}\tau_{AM}^{tr} = {}^{n+1}\sigma^{tr} - {}^{n+1}X_\varepsilon^{tr} \quad (30)$$

$${}^{n+1}f_{AM}^{tr} = |{}^{n+1}\tau_{AM}^{tr}| - (k + {}^{n+1}X_\theta^{tr}). \quad (31)$$

Weiterhin werden die Transformationsbedingungen überprüft. Falls

$${}^{n+1}\tau_{AM}^{tr} > 0, \quad |{}^{n+1}\tau_{AM}^{tr}| > {}^{n+1}X_\theta^{tr} \text{ und } {}^n z < 1 \quad (32)$$

gelten, ruft die aktuelle Beanspruchung eine Austenit-Martensit-Umwandlung hervor. Falls hingegen die Bedingungen

$${}^{n+1}\tau_{AM}^{tr} < 0, \quad {}^{n+1}\tau_{MA}^{tr} > 0 \text{ und } {}^n z > 0 \quad (33)$$

erfüllt sind, findet eine Rückumwandlung statt. Anderenfalls ist die Deformation elastisch (im austenitischen oder martensitischen Bereich) und die Zustandsvariablen werden wie folgt aktualisiert:

$${}^{n+1}\sigma = {}^{n+1}\sigma^{tr}; \quad {}^{n+1}\varepsilon_d = {}^n\varepsilon_d; \quad {}^{n+1}X_\varepsilon = {}^nX_\varepsilon; \quad {}^{n+1}z = {}^nz \quad (34)$$

$${}^{n+1}\theta = \frac{\rho c_d {}^n\theta + L\theta_0 \Delta t}{\rho c_d + L\Delta t} \quad (35)$$

mit  $L = \frac{\alpha_t A}{V}$ . Gleichung (35) ist die Linearisierung der Differentialgleichung (27) unter den Bedingungen:  $w_3 = 0$  und  $w_4 = 0$ .

Wenn die Bedingungen (32) oder (33) erfüllt sind, befindet sich das Material im inelastischen Zustand. In diesem Fall wird ein inelastischer Korrektor-Schritt angewendet:

$${}^n\Delta\varepsilon_d = \sqrt{\frac{2}{3}} {}^n\Delta\lambda_d \text{sign}({}^n\tau) \quad (36)$$

Hierin sind  ${}^n\Delta\lambda_d = {}^n\lambda_d \Delta t$  der Konsistenzparameter und  $\text{sign}({}^n\tau)$  das Vorzeichen der effektiven Spannung. Im skalaren Fall spielt  $\text{sign}({}^n\tau)$  die Rolle des Normalenvektors  $\mathbf{N}$ . Die Zuwächse aller Zustandsvariablen lassen sich mit Hilfe der Evolutionsgleichungen und der Abhängigkeit (36) durch den Konsistenzparameter ausdrücken. Daher reduziert sich die Ermittlung der aktualisierten Zustandsvariablen auf dessen Bestimmung.

Aus den Gleichungen (17)-(20) und mit der Definition der effektiven Spannung  $\tau = \sigma + X_\varepsilon$  bekommt man den Ausdruck für die Fließfunktion in folgender Gestalt:

$$|{}^{n+1}\tau| = \sqrt{\frac{3}{2}} r_d \left( \frac{\eta_d}{\Delta t} {}^{n+1}\Delta\lambda_d \right)^{\frac{1}{m}} + k - \frac{\rho(\Delta u_0 - \Delta\eta_0 {}^{n+1}\theta)}{\gamma} \quad (37)$$

Hierin erhält man die Temperatur im Schritt  $n + 1$  aus der Wärmeleitungsgleichung

$${}^{n+1}\theta = {}^{n+1}\chi \left( \rho c_d {}^n\theta + L\theta_0\Delta t + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{b}{c} {}^{n+1}X_\varepsilon^2 {}^{n+1}\Delta\lambda_d + \left( r_d \left( \frac{\eta_d}{\Delta t} {}^{n+1}\Delta\lambda_d \right)^{\frac{1}{m}} + \sqrt{\frac{2}{3}}k \right) {}^{n+1}\Delta\lambda_d \right) \quad (38)$$

mit

$${}^{n+1}\chi = \frac{1}{\rho c_d + L\Delta t + \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\rho\Delta\eta_0}{\gamma} {}^{n+1}\Delta\lambda_d}. \quad (39)$$

Nach der Lösung der Differentialgleichungen (13), (16), (19), (21) und (22) bezüglich der Variablen  $X_\varepsilon$  erhält man bei weitergehender Linearisierung die Gleichung

$${}^{n+1}X_\varepsilon = {}^{n+1}\beta \left( {}^nX_\varepsilon + \sqrt{\frac{3}{2}}c {}^{n+1}\Delta\lambda_d \text{sign}({}^{n+1}\tau) \right) \text{ mit } {}^{n+1}\beta = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{2}{3}}b {}^{n+1}\Delta\lambda_d}. \quad (40)$$

Die effektive Spannung lässt sich wie folgt ausdrücken:

$$\begin{aligned} {}^{n+1}\tau &= {}^{n+1}\sigma - {}^{n+1}X_\varepsilon = \\ & {}^{n+1}\sigma^{tr} - \sqrt{\frac{2}{3}} C {}^{n+1}\Delta\lambda_d \operatorname{sign}({}^{n+1}\tau) - {}^{n+1}\beta \left( {}^nX_\varepsilon + \sqrt{\frac{3}{2}} c {}^{n+1}\Delta\lambda_d \operatorname{sign}({}^{n+1}\tau) \right) \end{aligned} \quad (41)$$

Es wird dabei angenommen, dass die Normalenvektoren  ${}^{n+1}\mathbf{N}^{tr}$  und  ${}^{n+1}\mathbf{N}$  zusammenfallen. Daraus folgt die Beziehung für den eindimensionalen Fall

$$\operatorname{sign}({}^{n+1}\tau) = \operatorname{sign}({}^{n+1}\tau^{tr}), \quad (42)$$

mit deren Berücksichtigung Gleichung (41) folgende Form erhält:

$${}^{n+1}\sigma^{tr} - {}^{n+1}\beta {}^nX_\varepsilon = \left( 1 + \frac{{}^{n+1}\Delta\lambda_d \left( \sqrt{\frac{2}{3}} C + {}^{n+1}\beta \sqrt{\frac{3}{2}} c \right)}{|{}^{n+1}\tau^{tr}|} \right) {}^{n+1}\tau^{tr} \quad (43)$$

Mit den Definitionen

$${}^{n+1}\alpha = 1 + \frac{{}^{n+1}\Delta\lambda_d \left( \sqrt{\frac{2}{3}} C + {}^{n+1}\beta \sqrt{\frac{3}{2}} c \right)}{|{}^{n+1}\tau^{tr}|} \quad (44)$$

und

$${}^{n+1}\Xi = {}^{n+1}\sigma^{tr} - {}^{n+1}\beta {}^nX_\varepsilon \quad (45)$$

wird Gleichung (43) neu formuliert:

$${}^{n+1}\alpha {}^{n+1}\tau^{tr} = {}^{n+1}\Xi \quad (46)$$

Schließlich wird die Fließbedingung in der Form

$$\Psi({}^{n+1}\Delta\lambda_d) = \frac{1}{{}^{n+1}\alpha} |{}^{n+1}\Xi| - |{}^{n+1}\tau^{tr}| = 0 \quad (47)$$

ausgedrückt. Aus Gleichung (44) folgt, dass die Variable  ${}^{n+1}\alpha$  immer positiv bleibt. Gleichung (47) ist eine konventionelle skalare nichtlineare Gleichung mit unbekanntem Konsistenzparameter  ${}^{n+1}\Delta\lambda_d$ . Für die Lösung der Gleichung wurde das Bisektionsverfahren verwendet.

#### 4 Beispielrechnungen

Für die Untersuchung des geschwindigkeitsabhängigen Verhaltens von superelastischen FGL werden zwei numerische Beispiele behandelt. Dazu werden die Materialkonstanten und thermischen Konstanten aus Tabelle 1 verwendet. Die simulierte Probe ist ein Draht mit dem Durchmesser  $d = 0,9$  mm und der Länge  $l = 25$  mm. Die umgebende Temperatur  $\theta_0 = 295$  K bleibt während der Belastung konstant.

In der ersten Simulation wird die Probe verzerrungskontrolliert belastet und wieder entlastet (siehe Bild 2a). Es werden Dehnungsgeschwindigkeiten zwischen  $\dot{\varepsilon} = \pm 0,0002$  s<sup>-1</sup> (Bild 2b) und  $\dot{\varepsilon} = \pm 0,01$  s<sup>-1</sup> (Bild 2d) gewählt. Die maximale Dehnung ist jeweils  $\varepsilon_{\max} = 0,08$ . In den links gezeigten Bildern von Bild 2 sind die massenspezifischen Leistungen aus Gleichung (27) dargestellt. Die rechten Bilder zeigen Spannungs-Dehnungs-Diagramme.

Zunächst (Bild 2b) wird die quasistatische Belastung mit der Dehnungsgeschwindigkeit  $\dot{\varepsilon} = \pm 0,0002$  s<sup>-1</sup> modelliert. Unter dieser Belastung ist die Wärmeproduktion oder -absorption praktisch mit dem Wärmeaustausch ausgeglichen und ruft keine Änderung der Temperatur hervor. Bei einer Dehnungsgeschwindigkeit von  $\dot{\varepsilon} = \pm 0,001$  s<sup>-1</sup> (Bild 2c) ist im linken Bild zu sehen, dass die gestiegene Wärmeproduktion (-absorption) nicht vollständig ausgeglichen werden kann. Das führt zur Änderung der Temperatur in der Probe und als Folge zur Änderung des Spannungs-Dehnungs-Verlaufs. Die letzte Berechnung (Bild 2d) erfolgt bei einer Dehnungsgeschwindigkeit von  $\dot{\varepsilon} = \pm 0,01$  s<sup>-1</sup>. Die Wärme aus der Phasenumwandlung wird größtenteils in Körperwärme transformiert. Die

b, c, d links:

- Massenspezifische Leistungen aus Phasenumwandlung ( $w_4$ )
- - - - - Wärmekapazität ( $-w_1$ )
- - - - - Wärmeaustausch ( $w_2$ )
- Mechanische Hysterese ( $w_3$ )  
(vgl. Wärmeleitungsgleichung)

b, c, d rechts:

- Simulation
- - - Experiment

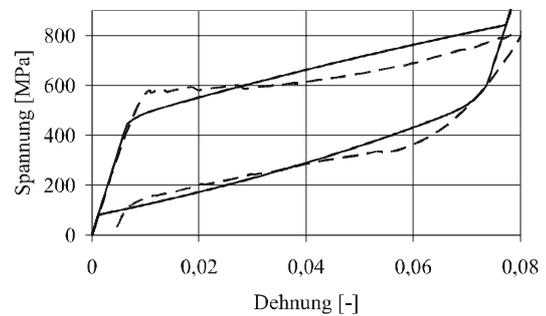
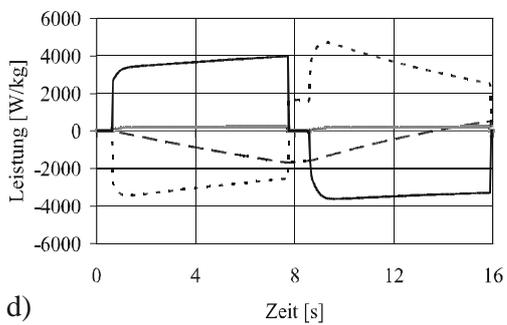
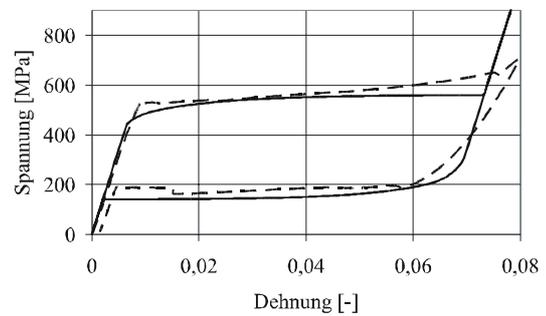
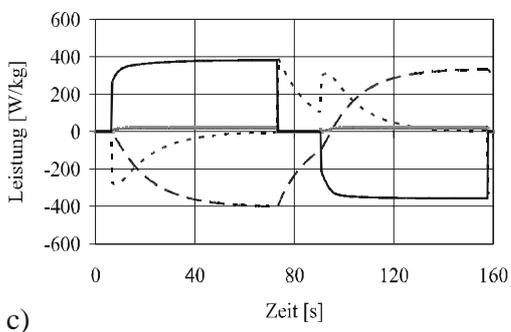
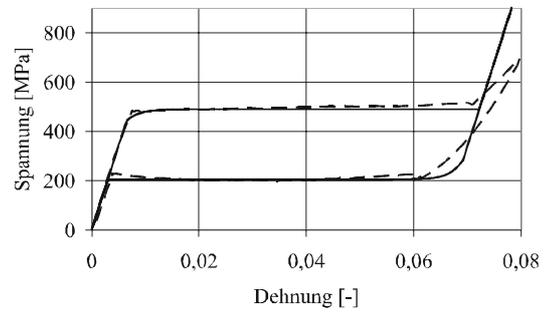
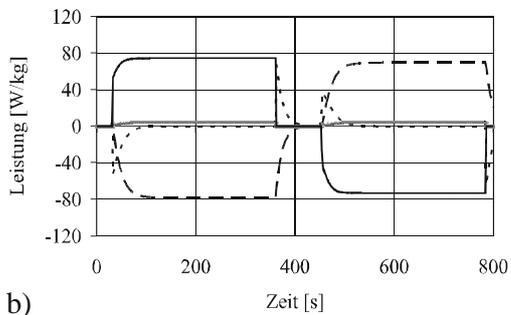
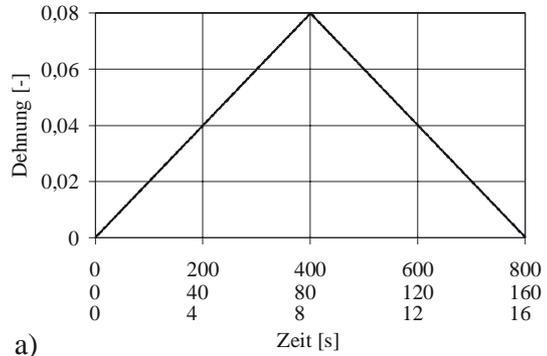


Bild 2: Simulation der einmaligen Be- und Entlastungen der Probe unter verschiedenen Dehnungsgeschwindigkeiten

starke Steigung (Absenkung) der Temperatur beeinflusst wesentlich den Spannungsverlauf. Bei dieser Dehnungsgeschwindigkeit sieht man, dass die Spannung im Umwandlungsbereich fast linear von der Dehnung abhängt.

Bild 2 enthält neben simulierten Spannungs-Dehnungs-Diagrammen auch experimentelle Kurven (Schmidt und Lammering, 2004). Bei der quasistatischen Belastung zeigt das Modell sehr gute Übereinstimmung mit den experimentellen Daten (Bild 2b). Mit steigender Belastungsgeschwindigkeit (Bild 2c, d) weisen Simulation und Versuchskurven Abweichungen auf, jedoch wird das qualitative Verhalten richtig wiedergegeben. Die Elastizitätsmoduln von Austenit und Martensit wurden bei dieser Modellierung gleich angenommen und erklären die Abweichungen nach vollständiger Umwandlung.

Im zweiten numerischen Versuch wird das zyklische Verhalten des Modells untersucht. Die Probe wird wieder verzerrungskontrolliert be- und entlastet, wobei nach jedem dritten Zyklus die Dehnungsgeschwindigkeit steigt (Bild 3a). Die maximale Dehnung ist  $\varepsilon_{\max} = 0,075$ . Bild 3c zeigt die Temperatur der Probe in Abhängigkeit von der Zeit. Die Amplitude der Temperaturschwingungen steigt mit der Dehnungsgeschwindigkeit. Bei jeder Entlastung fällt die Temperatur der Probe durch die Martensit-Austenit-Rückumwandlung. Zum Zeitpunkt der Austenit-Martensit-Umwandlung erreicht die Probe nicht die ursprüngliche Temperatur der Umgebung. Infolgedessen beginnt jede folgende Phasenumwandlung bei einer erhöhten (abgesenkten) Temperatur. Anstieg bzw. Absenkung der Temperatur führen zu einem Anstieg bzw. zu einer Absenkung der Anfangsspannungen bei den Phasenumwandlungen. Dieses Verhalten der Probe unter zyklischer Belastung ist in den Bildern 3b und 3c gezeigt.

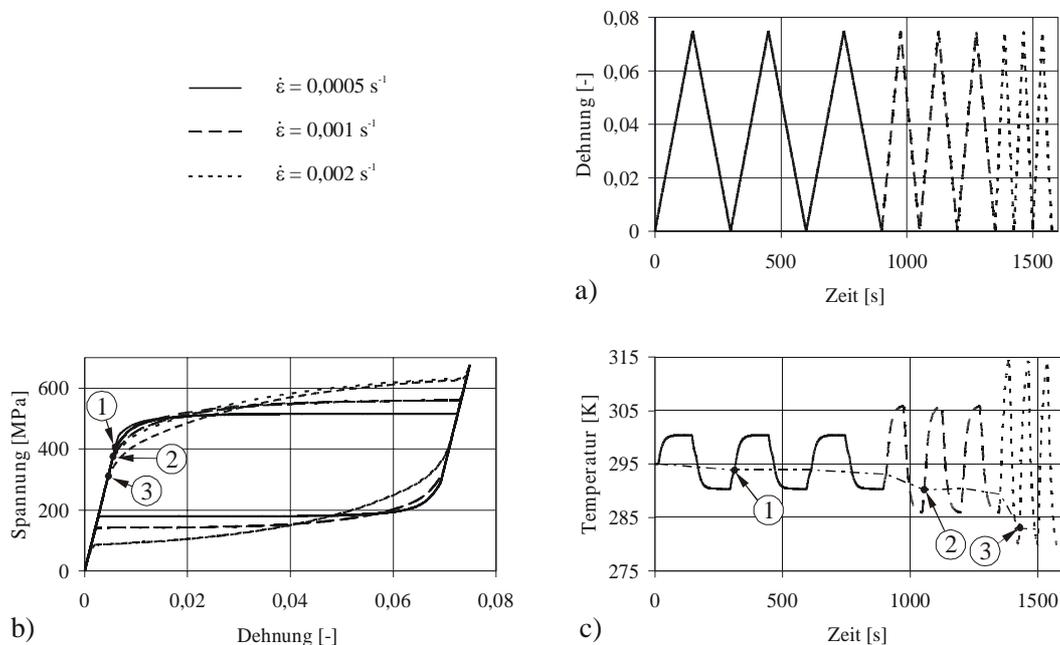


Bild 3: Zyklische Belastung der Probe mit Anstieg der Dehnungsgeschwindigkeit

## 5 Zusammenfassung und Ausblick

In numerischen Untersuchungen mit einem thermodynamisch konsistenten Werkstoffmodell wurde nachgewiesen, dass das Verhalten superelastischer FGL bei verschiedenen Belastungsgeschwindigkeiten qualitativ gut abgebildet wird. So erfasst das Modell die Erwärmung der Probe bei höheren Belastungsgeschwindigkeiten und die daraus resultierenden Veränderungen im Spannungs-Dehnungs-Diagramm, wie z.B. eine ansteigende Neigung der Spannungs-Dehnungs-Kurve während der Phasentransformation mit wachsender Dehnungsrate und das Absinken der Spannung, bei der die Austenit-Martensit-Transformation einsetzt. Weitere Arbeiten werden sich mit einer Verbesserung des Modells befassen und mit einem Abgleich mit experimentellen Ergebnissen. Weiterhin ist die Berechnung beschichteter Strukturen vorgesehen.

## Danksagung

Der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) wird für die finanzielle Unterstützung der Arbeiten gedankt.

## Literatur

- Auricchio, F.: *Shape memory alloys applications, micromechanics, macromodelling and numerical simulations*. Dissertation, University of California at Berkeley (1995).
- Bertram, A.: Thermo-mechanical constitutive equations for the description of shape memory effects in alloys. *Nuclear Engineering and Design*, 74, (1982), 173 – 182.
- Birman, V.: Review of mechanics of shape memory alloy structures. *Applied Mechanics Review*, 50, (1997), 629 – 645.
- Bo, Z.; Lagoudas, D. C.: Thermomechanical modeling of polycrystalline smas under cyclic loading. *International Journal of Engineering Science*, 37, (1999), 1089 – 1203.
- Brinson, L. C.; Huang, M. S.: Simplification and comparisons of shape memory alloy constitutive models. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 7, (1996), 108 – 114.
- Hartmann, S.; Haupt, P.: Stress computation and consistent tangent operator using non-linear kinematic hardening models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36, (1993), 3801 – 3814.
- Helm, D.; Haupt, P.: Shape memory behavior: Modelling within continuum thermomechanics. *International Journal of Solids and Structures*, 40, (2002), 827 – 849.
- Hewitt, G. F.; Shires, G. L.; Bott, T. R.: *Process Heat Transfer*. CRC Press, Boca Raton etc. (1994).
- Lammering, R.; Schmidt, I.: Experimental investigation on the damping capacity of niti components. *Smart Material Structures*, 10, (2001), 853 – 859.
- Levitas, V. I.: Thermomechanical theory of martensitic phase transformations in inelastic materials. *International Journal of Solids and Structures*, 35, (1998), 889 – 940.
- Meggyes, Á.; Új, J.: Stress computation algorithm for temperature dependent non-linear kinematic hardening model. *Periodica Polytechnica Ser. Mech. Eng.*, 44, 1, (2000), 105 – 114.
- Raniecki, B.; Bruhns, O.: Thermodynamic reference model for elastic-plastic solids undergoing phase transformations. *Archives of Mechanics*, 43, (1991), 343 – 376.
- Raniecki, B.; Lexcellent, C.: Thermodynamics of isotropic pseudoelasticity in shape memory alloys. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 17, (1998), 185 – 205.
- Schmidt, I.; Lammering, R.: The damping behaviour of superelastic niti components. *Accepted for publication in Material Science and Engineering A, 2004*.
- Seelecke, S.: *Adaptive Strukturen mit Formgedächtnisaktoren - Modellierung und Simulation* (1999), Habilitationsschrift.
- Shaw, J. A.; Kyriakides, S.: Thermomechanical aspects of niti. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 43, (1995), 1243 – 1281.
- Simo, J. C.; Hughes, T. J. R.: *Computational Inelasticity*. Springer, New York etc. (1998).
- Siredey, N.; Patoor, E.; Berveiller, M.; Eberhardt, A.: Constitutive equations for polycrystalline thermoelastic shape memory alloys: Part i. intragranular interactions and behavior of the grain. *International Journal of Solids and Structures*, 36, (1999), 4289 – 4315.
- Tanaka, K.: A thermomechanical sketch of shape memory effect: One-dimensional tensile behavior. *Research Mechanics*, 18, (1986), 251 – 263.
- Truesdell, C.; Noll, W.: *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*. Springer (2004).

---

Address: Dipl.-Ing. Andrey Vishnevsky, Prof. Dr.-Ing. Rolf Lammering und Dipl.-Ing. Ina Schmidt, Institut für Mechanik, Helmut-Schmidt-Universität, Universität der Bundeswehr Hamburg, Holstenhofweg 85, D-22043 Hamburg.  
email: andrey.vishnevsky@hsu-hh.de; rolf.lammering@hsu-hh.de; ina.schmidt@hsu-hh.de.