

Zum Einfluss eines inneren Freiheitsgrades auf das Verhalten eines Pendels mit vibrierender Aufhängung

Zum Gedenken an Professor Dr.-Ing. Dr. h. c. mult. Friedrich P. J. Rimrott, seine hervorragenden wissenschaftlichen und organisatorischen Beiträge zur Mechanik, seinen hochgeschätzten Rat und seine herzliche Freundschaft während seines nahezu 5-jährigen Wirkens an der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

I. I. Blekhman, L. Sperling

Die Vibration der Lagerachse eines einfachen Pendels im Schwerfeld kann bekanntlich das Gleichgewicht des stehenden Pendels (Überkopfpendingel) stabilisieren; sie kann aber auch dasjenige des hängenden Pendels destabilisieren. In der vorliegenden Arbeit wird das Pendelmodell durch einen mit dem Pendelkörper elastisch und viskos gedämpft verbundenen Massenpunkt mit einem zusätzlichen radialen Freiheitsgrad verallgemeinert. Für den Fall der vertikalen Vibration der Lagerachse wird gezeigt, dass das Vorhandensein dieser Zusatzmasse das Verhalten des Pendels unter bestimmten Bedingungen wesentlich verändert: Instabile Gleichgewichtslagen werden stabil und umgekehrt. Das Vorhandensein des zusätzlichen Freiheitsgrades gestattet die Stabilisierung des stehenden Pendels bei wesentlich kleineren Werten der Geschwindigkeitsamplitude der Achsschwingungen. Zur Lösung der Aufgabe wird die Methode der direkten Bewegungsteilung angewendet.

1 Einleitung

Die Vergrößerung der Anzahl der Freiheitsgrade eines mechanischen Systems kann, besonders wenn es nichtlinear ist, wesentliche Änderungen seines Verhaltens hervorrufen. Professor F. P. J. Rimrott hat sich u. a. in diesem Zusammenhang durch eine Vielzahl von Untersuchungen zur Modellierung und zum Verhalten dissipativer Kreisel mit elastischen Elementen verdient gemacht, siehe z. B. Rimrott (1989) und Rimrott und Semenov (1994). Diese Untersuchungen wurden von Rimrott und seinen Mitarbeitern besonders auch in seiner Magdeburger Zeit vorangetrieben, siehe z. B. Rimrott u.a. (1997) sowie Saitov und Rimrott (1997). Neben der Beeinflussung der Lagedrift wurden besonders auch qualitative Effekte, wie z. B. Einflüsse auf die Stabilität, unvollständige Lagedrift („Energiefälle“) und strukturelle Resonanzen, untersucht und die Ergebnisse zur prinzipiellen Beschreibung grundsätzlicher Effekte häufig didaktisch meisterlich in Form einfacher Näherungsformeln und anschaulicher Bilder dargestellt.

Von den Autoren der vorliegenden Arbeit wurde ein weiterer prinzipieller, durch Vergrößerung der Anzahl der Freiheitsgrade verursachter Effekt untersucht, der Einfluss innerer Freiheitsgrade auf die Selbstsynchronisation unwuchtiger Rotoren. Das Modell wurde dadurch verallgemeinert, dass der Rotorkörper eine gewisse, durch Federn und Dämpfer mit ihm verbundene Punktmasse enthält, siehe Blekhman und Sperling (2003, 2004) sowie Sperling und Blekhman (2001). Ziel dieser Untersuchungen war, die zu erwartenden wesentlichen Unterschiede des stabilen synchronen Umlaufens solcher Rotoren im Vergleich zu kompakten Rotoren zu nutzen und z. B. in bestimmten Drehzahlbereichen instabile, vom praktischen Gesichtspunkt vorteilhafte Phasierungen, wie gleichphasiges Umlaufen von Rotoren in Vibratoren zur Schwingungserregung von Vibrationsmaschinen, zu stabilisieren. Diese Aufgabe erwies sich allerdings als erheblich komplizierter als die Untersuchung der Selbstsynchronisation von Vibratoren mit kompakten Rotoren. Ausführlich behandelt wurde bisher erst eine vergleichsweise einfache Aufgabe dieser Klasse.

In der vorliegenden Arbeit wird eine weitere Aufgabe dieses Typs betrachtet, die Untersuchung der Änderungen im Verhalten eines Pendels mit vibrierender Lagerachse infolge einer in ihm enthaltenen, durch Federn und Dämpfer mit ihm verbundenen Punktmasse.

Die Aufgabe, das Verhalten des gewöhnlichen kompakten Pendels mit vibrierender Lagerachse zu untersuchen, gilt heute als klassisch. Anscheinend erstmals wurde sie von Stephenson schon im Jahre 1908 betrachtet. Praktisch gerieten seine Arbeiten, Stephenson (1908, 1909), jedoch in Vergessenheit, und die Probleme wurden von einer Reihe anderer Autoren in der Folgezeit mittels unterschiedlicher Methoden erneut untersucht, siehe im einzelnen den kurzen Überblick in dem Buch Blekhman (2000). Am bekanntesten unter diesen Veröffentlichungen wurden die Arbeiten von Kapitsa (1951, 1954), die als Anregung zur Verallgemeinerung und weiteren Ausarbeitung der angewendeten Methode, der sogenannten Methode der direkten Bewegungsteilung, sowie zur Entwicklung eines allgemeinen Verfahrens zur Lösung von Aufgaben über die Wirkung der Vibration auf nichtlineare mechanische Systeme, Vibrationsmechanik genannt, dienten, siehe Blekhman (2000). Die Hauptschlussfolgerung aus der Untersuchung des kompakten Pendels mit vibrierender Lagerachse besteht darin, dass das bei Fehlen der Vibration immer instabile stehende Pendel durch den Einfluss der Vibration unter bestimmten Bedingungen stabil wird. Nach Ansicht der Autoren sprechen alle Gründe dafür, das Pendel mit vibrierender Lagerachse Stephenson-Kapitsasches Pendel zu nennen.

In der vorliegenden Arbeit wird bei Beschränkung auf vertikale Vibration der Lagerachse und den radialen Freiheitsgrad der Punktmasse gezeigt, dass das Ausgestattetsein des Pendels mit einem zusätzlichen Freiheitsgrad sein Verhalten wesentlich verändern kann: Instabile Gleichgewichtslagen werden stabil und umgekehrt. Es stellt sich heraus, dass das Vorhandensein des zusätzlichen Freiheitsgrades die Stabilisierung des stehenden Pendels bei wesentlich kleineren Werten der Geschwindigkeitsamplitude der Achsschwingungen gestattet. Für die Lösung der Aufgabe wird die Methode der direkten Bewegungsteilung angewendet (Blekhman, 2000).

Ein spezieller Fall dieser Aufgabe, entsprechend einer federgefedelten Scheibe, die sich einen masselosen Stab entlang bewegen kann, wurde in den Arbeiten Hemp und Sethna (1968), Schmidt (1983) und Ryland und Meirovich (1977) mittels der klassischen Mittelungsmethode untersucht.

2 Systemmodell und Bewegungsgleichungen

Das Modell des betrachteten Systems ist in Bild 1 dargestellt. Die Bewegung wird als eben vorausgesetzt. Die Masse des Pendels ohne Zusatzmasse sei m_0 , sein Massenträgheitsmoment bezüglich der Achse senkrecht zur Bewegungsebene durch den Massenmittelpunkt C mit dem Abstand l von der mit $y(\Omega t)$ vertikal vibrierenden Lagerachse A sei J_C . Die mit der Dämpfungskonstanten k viskos gedämpfte Bewegung des Pendels wird durch die Winkelkoordinate φ beschrieben. Der Beschreibung der Bewegung des zusätzlichen, in radialer Richtung beweglichen Massenpunktes mit der Masse m dient die Koordinate ρ . Der Ursprung M der Koordinate ρ ist dadurch definiert, dass die Feder mit der Steifigkeit c unbelastet ist, und befindet sich im Abstand r von der Lagerachse A . Die Dämpfungskonstante des viskosen Dämpfers sei b .

Analoge Untersuchungen für alternative Aufgaben durch Berücksichtigung einer horizontalen Vibration der Lagerachse und/oder eines tangentialen Freiheitsgrades der Zusatzmasse sind für weitere Publikationen vorgesehen.

Mittels entsprechender bekannter Methoden der analytischen Mechanik erhält man für das beschriebene Modell unter Berücksichtigung der Erdbeschleunigung g die Bewegungsgleichungen

$$\left[J_A + m(r + \rho)^2 \right] \ddot{\varphi} + k\dot{\varphi} + 2m(r + \rho)\dot{\rho}\dot{\varphi} + [S_A + m(r + \rho)](g + \ddot{y}) \sin \varphi = 0, \quad (2.1)$$

$$\ddot{\rho} + 2\delta\dot{\rho} + \omega^2 \rho = (r + \rho)\dot{\varphi}^2 + (g + \ddot{y}) \cos \varphi. \quad (2.2)$$

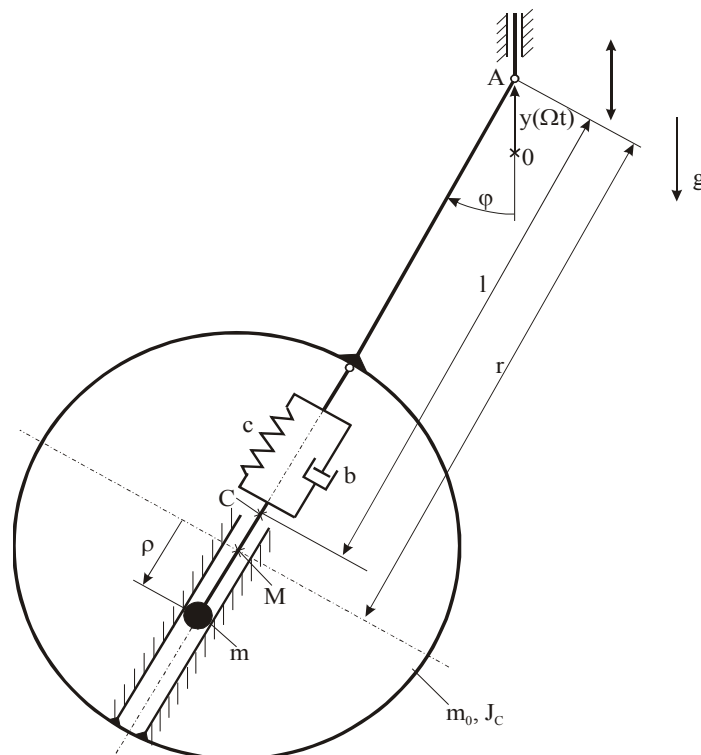


Bild 1. Modell des Pendels mit vibrierender Lagerachse und einem zusätzlichen Freiheitsgrad

Für das Massenträgheitsmoment J_A und das statische Moment S_A des Pendelkörpers bezüglich der Lagerachse sowie für die Kennkreisfrequenz ω und den Abklingkoeffizienten δ der Schwingungen der Zusatzmasse gilt

$$J_A = J_C + m_0 l^2, \quad S_A = m_0 l, \quad \omega^2 = \frac{c}{m}, \quad 2\delta = \frac{b}{m}. \quad (2.3)$$

Für die Lagerachse wird die harmonische Schwingung

$$y(\Omega t) = A \cos \Omega t. \quad (2.4)$$

mit der Amplitude A und der Erregerkreisfrequenz Ω angenommen.

3 Näherungsweise Herleitung von Existenz- und Stabilitätsbedingungen für Gleichgewichtslagen

Zur näherungsweisen Ermittlung von im zeitlichen Mittel ruhenden Lagen des Systems und zur Untersuchung ihrer Stabilität wird die Methode der direkten Bewegungsteilung angewendet, Blekhman (2000). Nach dieser Methode suchen wir die Lösung des Differentialgleichungssystems (2.1)/(2.2) in der Form

$$\varphi = \alpha(t) + \psi(t, \Omega t), \quad \rho = \tilde{\varepsilon}(t) + \kappa(t, \Omega t). \quad (3.1)$$

Hierbei sind $\alpha(t)$ und $\tilde{\varepsilon}(t)$ langsam veränderliche Komponenten. Die schnell veränderlichen Komponenten $\psi(t, \Omega t)$ und $\kappa(t, \Omega t)$ werden als 2π -periodisch hinsichtlich der „schnellen Zeit“

$$\tau = \Omega t \quad (3.2)$$

vorausgesetzt, mit verschwindendem Mittelwert hinsichtlich τ :

$$\langle \psi(t, \tau) \rangle = 0, \quad \langle \kappa(t, \tau) \rangle = 0. \quad (3.3)$$

Hier und im folgenden bedeuten spitze Klammern die Mittelung bezüglich τ :

$$\langle \dots \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dots d\tau. \quad (3.4)$$

Nach Einsetzen des Ansatzes (3.1) in das Gleichungssystem (2.1)/(2.2) und anschließender Mittelung erhält man die Gleichungen der langsamen Bewegung

$$\begin{aligned} & \left[J_A + m(r + \tilde{\varepsilon})^2 \right] \ddot{\alpha} + m \langle \kappa^2 \rangle \ddot{\alpha} + m \langle \kappa^2 \dot{\psi} \rangle + k \dot{\alpha} \\ & + 2m(r + \tilde{\varepsilon}) \left[\tilde{\varepsilon} \dot{\alpha} + \langle \dot{\kappa} \dot{\psi} \rangle + \langle \kappa \ddot{\psi} \rangle \right] + 2m \left[\langle \kappa \dot{\psi} \rangle \tilde{\varepsilon} + \langle \kappa \dot{\kappa} \rangle \dot{\alpha} + \langle \kappa \dot{\kappa} \dot{\psi} \rangle \right] \\ & + \left[S_A + m(r + \tilde{\varepsilon}) \right] \left[g \left(\langle \cos \psi \rangle \sin \alpha + \langle \sin \psi \rangle \cos \alpha \right) - A \Omega^2 \left(\langle \cos \Omega t \cos \psi \rangle \sin \alpha + \langle \cos \Omega t \sin \psi \rangle \cos \alpha \right) \right] \\ & + mg \left(\langle \kappa \cos \psi \rangle \sin \alpha + \langle \kappa \sin \psi \rangle \cos \alpha \right) \\ & - mA \Omega^2 \left(\langle \cos \Omega t \kappa \cos \psi \rangle \sin \alpha + \langle \cos \Omega t \kappa \sin \psi \rangle \cos \alpha \right) = 0, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} & \ddot{\tilde{\varepsilon}} + 2\delta \dot{\tilde{\varepsilon}} + \omega^2 \tilde{\varepsilon} = (r + \tilde{\varepsilon}) \left[\dot{\alpha}^2 + \langle \dot{\psi}^2 \rangle \right] + 2\dot{\alpha} \langle \kappa \dot{\psi} \rangle + \langle \kappa \dot{\psi}^2 \rangle \\ & + g \left(\langle \cos \psi \rangle \cos \alpha - \langle \sin \psi \rangle \sin \alpha \right) - A \Omega^2 \left(\langle \cos \Omega t \cos \psi \rangle \cos \alpha - \langle \cos \Omega t \sin \psi \rangle \sin \alpha \right) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Diese Gleichungen sind gekoppelt mit den Gleichungen der schnellen Bewegung, die sich durch Subtraktion der Gleichungen der langsamen Bewegung vom Gesamtsystem ergeben. Bei der Herleitung dieser Gleichungen setzen wir voraus, dass die schnellen Bewegungskomponenten ψ und κ klein sind im Vergleich zu den langsamen Komponenten α und $\tilde{\varepsilon}$. Nach Linearisierung in ψ und κ erhalten wir

$$\begin{aligned}
& \left[J_A + m(r + \tilde{\varepsilon})^2 \right] \ddot{\psi} + 2m(r + \tilde{\varepsilon}) \left(\ddot{\alpha} \kappa + \dot{\tilde{\varepsilon}} \dot{\psi} + \dot{\alpha} \dot{\kappa} \right) + k \dot{\psi} + 2m \dot{\tilde{\varepsilon}} \dot{\alpha} \kappa \\
& + \left[S_A + m(r + \tilde{\varepsilon}) \right] \left\{ g \cos \alpha \psi - A \Omega^2 \left[\sin \alpha \cos \Omega t + \cos \alpha (\cos \Omega t \psi - \langle \cos \Omega t \psi \rangle) \right] \right\} \\
& + mg \sin \alpha \kappa - mA \Omega^2 \sin \alpha (\cos \Omega t \kappa - \langle \cos \Omega t \kappa \rangle) = 0,
\end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}
& \ddot{\kappa} + 2\delta \dot{\kappa} + \omega^2 \kappa = 2(r + \tilde{\varepsilon}) \dot{\alpha} \dot{\psi} + \dot{\alpha}^2 \kappa - g \sin \alpha \psi \\
& - A \Omega^2 \left[\cos \alpha \cos \Omega t - \sin \alpha (\cos \Omega t \psi - \langle \cos \Omega t \psi \rangle) \right]
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Ungeachtet der wesentlich komplizierteren Gestalt des erhaltenen Systems von Integrodifferentialgleichungen (3.5) – (3.8) kann die Näherungslösung des Problems auf ihrer Basis wesentlich leichter gefunden werden als mittels des ursprünglichen Gleichungssystems. Das erklärt sich dadurch, dass die Gleichungen der langsamen Bewegung nur unter dem Operator der Mittelwertbildung von den Lösungen der Gleichungen der schnellen Bewegung abhängen. Zur Erfassung der wesentlichen Eigenschaften des Systems der langsamen Bewegung ist es daher hinreichend genau, nur eine Näherungslösung der Gleichungen der schnellen Bewegung zu berücksichtigen. Insbesondere kann man bei der Lösung der Gleichungen der schnellen Bewegung (3.7)/(3.8) die langsam veränderlichen Variablen α und $\tilde{\varepsilon}$ als „eingefroren“, d. h. als Konstanten behandeln. Außerdem wird $\tilde{\varepsilon} \ll r$ vorausgesetzt und folglich $\tilde{\varepsilon}$ gegenüber r vernachlässigt. Darüber hinaus werden unter der Annahme $\dot{\alpha} \ll \dot{\psi}$, $\ddot{\alpha} \ll \ddot{\psi}$, $g \ll A \Omega^2$ weitere Glieder wie die Parametererregungen und die Koppelglieder vernachlässigt. Die Erregerkreisfrequenz Ω der Gleichung (3.7) liege auch deutlich oberhalb der Eigenkreisfrequenz der Pendelschwingungen für $\kappa \equiv 0$. Mit dem Gesamtmassträgheitsmoment J und dem gesamten statischen Moment S gemäß

$$J = J_A + mr^2, \quad S = S_A + mr \tag{3.9}$$

und der entsprechenden reduzierten Pendellänge

$$e = \frac{J}{S} = \frac{J_C + m_0 l^2 + mr^2}{m_0 l + mr} \tag{3.10}$$

folgt dann

$$\frac{Sg}{J} = \frac{m_0 l + mr}{J_C + m_0 l^2 + mr^2} g \ll \Omega^2 \quad \text{bzw.} \quad g \ll e \Omega^2. \tag{3.11}$$

In diesem Falle dürfen in dieser Gleichung auch die $\dot{\psi}$ proportionalen Glieder vernachlässigt werden. Wenn wir hinsichtlich der Koordinate ρ , d. h. für die Bewegung der Zusatzmasse, eine Bewegung nahe der Resonanz ($\omega \approx \Omega$) zulassen und daher das Dämpfungsglied in Gleichung (3.8) beibehalten, erhalten wir schließlich die stark vereinfachten Gleichungen der schnellen Bewegung

$$J \ddot{\psi} = SA \Omega^2 \sin \alpha \cos \Omega t, \tag{3.12}$$

$$\ddot{\kappa} + 2\delta \dot{\kappa} + \omega^2 \kappa = -A \Omega^2 \cos \alpha \cos \Omega t. \tag{3.13}$$

Wir bemerken, dass die Berechtigung der vorgenommenen Vernachlässigungen auch auf dem Wege einer numerischen Lösung der Bewegungsgleichungen a posteriori überprüft werden kann. Erste numerische Ergebnisse liegen bereits vor und sollen gesondert publiziert werden. Darüber hinaus entsprechen diese Annahmen der sogenannten reinen Trägheitsnäherung, Blekhman (2000), die bei der Lösung der entsprechenden Aufgabe für das gewöhnliche Pendel mit vibrierender Lagerachse das richtige Resultat liefert.

Die stationäre, hinsichtlich Ωt periodische Lösung der Gleichungen (3.12)/(3.13) bei eingefrorenem α lautet

$$\psi = -\mu \cos \Omega t \sin \alpha, \tag{3.14}$$

$$\kappa = -(M \cos \Omega t + N \sin \Omega t) \cos \alpha \tag{3.15}$$

mit

$$\mu = \frac{SA}{J} = \frac{A}{e}, \quad M = A\eta^2(1-\eta^2)V^2, \quad N = 2AD\eta^3V^2. \quad (3.16)$$

Hierbei gilt im Sinne der elementaren Schwingungslehre für das Abstimmungsverhältnis η , den Dämpfungsgrad D und die Vergrößerungsfunktion (den dimensionslosen Betrag des Frequenzganges für κ) V :

$$\eta = \frac{\Omega}{\omega}, \quad D = \frac{\delta}{\omega}, \quad V = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}}. \quad (3.17)$$

In den Gleichungen der langsamen Bewegung wird nun die Koordinatentransformation

$$\omega^2 \tilde{\varepsilon} - g \cos \alpha = \omega^2 \varepsilon \quad \text{bzw.} \quad \tilde{\varepsilon} = \varepsilon + \frac{mg \cos \alpha}{c} \quad (3.18)$$

vorgenommen. Für eine vertikale Pendelposition entspricht das dem verbreiteten Vorgehen, den Koordinatenursprung in die statische Ruhelage des schwingenden Körpers, im vorliegenden Falle der Zusatzmasse, zu legen. Unter Berücksichtigung von $\tilde{\varepsilon} \ll r$ und bei Beschränkung auf die Glieder bis 2. Grades bzw. im Falle von Gliedern mit dem Faktor $\cos \Omega t$ bis ersten Grades in den schnellen Koordinaten ψ und κ erhalten wir damit die Gleichungen der langsamen Bewegung

$$\begin{aligned} & \left[J + m \langle \kappa^2 \rangle \right] \ddot{\alpha} + k \dot{\alpha} + 2mr \left[\dot{\varepsilon} \dot{\alpha} + \langle (\kappa \dot{\psi}) \dot{\alpha} \rangle \right] + 2m \left[\langle \kappa \dot{\kappa} \rangle \dot{\alpha} + \langle \kappa \dot{\psi} \rangle \dot{\varepsilon} \right] \\ & + S \left[g \left(1 - \frac{1}{2} \langle \psi^2 \rangle \right) \sin \alpha - A \Omega^2 \langle \cos \Omega t \psi \rangle \cos \alpha \right] \\ & + mg \langle \kappa \psi \rangle \cos \alpha - mA \Omega^2 \langle \cos \Omega t \kappa \rangle \sin \alpha = 0, \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\ddot{\varepsilon} + 2\delta \dot{\varepsilon} + \omega^2 \varepsilon = r \left(\dot{\alpha}^2 + \langle \dot{\psi}^2 \rangle \right) + 2\dot{\alpha} \langle \kappa \dot{\psi} \rangle - \frac{1}{2} g \langle \psi^2 \rangle \cos \alpha + A \Omega^2 \langle \cos \Omega t \psi \rangle \sin \alpha \quad (3.20)$$

Nach Auswertung und Einsetzen der Mittelwerte folgt daraus

$$\begin{aligned} & \left(J + \frac{1}{2} mA^2 \eta^4 V^2 \cos^2 \alpha \right) \ddot{\alpha} + (k + 2mr \dot{\varepsilon}) \dot{\alpha} \\ & + S \left[g \left(1 - \frac{1}{4} \mu^2 \sin^2 \alpha \right) + \frac{\mu}{2} A \Omega^2 \cos \alpha \right] \sin \alpha \\ & + \left[\frac{1}{2} (\mu g \cos \alpha + A \Omega^2) (1 - \eta^2) - 2\mu \Omega D \eta \dot{\varepsilon} \right] mA \eta^2 V^2 \sin \alpha \cos \alpha = 0, \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\varepsilon} + 2\delta \dot{\varepsilon} + \omega^2 \varepsilon = r \dot{\alpha}^2 - 2\mu A \Omega D \eta^3 V^2 \sin \alpha \cos \alpha \dot{\alpha} + \frac{\mu^2}{2} r \Omega^2 \sin^2 \alpha \\ - \frac{\mu}{2} \left(\frac{\mu}{2} g \cos \alpha + A \Omega^2 \right) \sin^2 \alpha. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Dieses Gleichungssystem ist wesentlich einfacher als das ursprüngliche System (2.1), (2.2) mit (2.4), weil es autonom ist. Damit ergeben sich für die entsprechend der Problemstellung zu bestimmenden konstanten Lösungen

$$\alpha = \alpha^* = \text{const.}, \quad \varepsilon = \varepsilon^* = \text{const.} \quad (3.23)$$

die Existenzbedingungen

$$S \left[g \left(1 - \frac{1}{4} \mu^2 \sin^2 \alpha^* \right) + \frac{\mu}{2} A \Omega^2 \cos \alpha^* \right] \sin \alpha^* + \frac{1}{2} (\mu g \cos \alpha^* + A \Omega^2) m A \eta^2 (1 - \eta^2) V^2 \sin \alpha^* \cos \alpha^* = 0, \quad (3.24)$$

$$\omega^2 \varepsilon^* - \frac{\mu^2}{2} r \Omega^2 \sin^2 \alpha^* + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\mu}{2} g \cos \alpha^* + A \Omega^2 \right) \sin^2 \alpha^* = 0 \quad (3.25)$$

Nach Einführung der Nachbarbewegung

$$\alpha = \alpha^* + \vartheta, \quad \varepsilon = \varepsilon^* + \gamma \quad (3.26)$$

erhalten wir für die Stabilitätsuntersuchung aus den Gleichungen (3.21), (3.22) die allgemeinen Gleichungen in den Variationen:

$$\left(J + \frac{1}{2} m A^2 \eta^4 V^2 \cos^2 \alpha^* \right) \ddot{\vartheta} + k \dot{\vartheta} - m \mu A \Omega D \eta^3 V^2 \sin 2\alpha^* \dot{\gamma} + S \left[g \cos \alpha^* \left(1 - \frac{3}{4} \mu^2 \sin^2 \alpha^* \right) + \frac{\mu}{2} A \Omega^2 \cos 2\alpha^* \right] \vartheta \quad (3.27)$$

$$+ \frac{1}{2} m \left[\mu g (1 - 3 \sin^2 \alpha^*) \cos \alpha^* + A \Omega^2 \cos 2\alpha^* \right] A \eta^2 (1 - \eta^2) V^2 \vartheta = 0, \\ \ddot{\gamma} + 2\delta \dot{\gamma} + \omega^2 \gamma = -\mu A \Omega D \eta^3 V^2 \sin 2\alpha^* \dot{\vartheta} \\ + \frac{1}{2} \mu (\mu r - A) \Omega^2 \sin 2\alpha^* \vartheta - \frac{\mu^2}{4} g (3 \cos^2 \alpha^* - 1) \sin \alpha^* \vartheta. \quad (3.28)$$

Die konstanten Lösungen (3.23) sind asymptotisch stabil, wenn die entsprechenden Lösungen der Variationsgleichungen (3.27), (3.28) asymptotisch stabil sind.

4 Auswertung der Existenz- und der Stabilitätsbedingungen

4.1 Sonderfall des horizontalen Pendels

Unter der Annahme

$$g = 0, \quad (4.1)$$

d. h. für ein horizontal angeordnetes Pendel oder für solche Parameterwerte, für die der Einfluss der Erdbeschleunigung g vernachlässigbar ist, vereinfachen sich die Existenzbedingungen (3.24), (3.25) zu

$$\frac{1}{2} A \Omega^2 \left[\mu S + m A \eta^2 (1 - \eta^2) V^2 \right] \sin \alpha^* \cos \alpha^* = 0, \quad (4.2)$$

$$\omega^2 \varepsilon^* - \frac{\mu}{2} (\mu r - A) \Omega^2 \sin^2 \alpha^* = 0, \quad (4.3)$$

und die Variationsgleichungen nehmen die folgende Gestalt an:

$$\left(J + \frac{1}{2} m A^2 \eta^4 V^2 \cos^2 \alpha^* \right) \ddot{\vartheta} + k \dot{\vartheta} - m \mu A \Omega D \eta^3 V^2 \sin 2\alpha^* \dot{\gamma} + \frac{1}{2} A \Omega^2 \left[\mu S + m A \eta^2 (1 - \eta^2) V^2 \right] \cos 2\alpha^* \vartheta = 0, \quad (4.4)$$

$$\ddot{\gamma} + 2\delta\dot{\gamma} + \omega^2\gamma = -\mu A\Omega D\eta^3 V^2 \sin 2\alpha^* \dot{\gamma} + \frac{\mu}{2}(\mu r - A)\Omega^2 \sin 2\alpha^* \vartheta. \quad (4.5)$$

Die Existenzbedingungen (4.2), (4.3) haben erwartungsgemäß die Lösungen

$$\alpha_1^* = 0, \quad \varepsilon_1^* = 0, \quad \alpha_2^* = \pi, \quad \varepsilon_2^* = 0, \quad (4.6)$$

$$\alpha_3^* = \frac{\pi}{2}, \quad \varepsilon_3^* = \frac{\mu}{2}(r\mu - A)\eta^2, \quad \alpha_4^* = \frac{3\pi}{2}, \quad \varepsilon_4^* = \varepsilon_3^* \quad (4.7)$$

Für alle 4 Lösungen gilt

$$\sin 2\alpha^* = 0, \quad (4.8)$$

so dass die Gleichungen (4.4) und (4.5) entkoppelt werden und die asymptotische Stabilität hinsichtlich ε^* für $\delta \neq 0$ gesichert ist. Wird auch $k \neq 0$ vorausgesetzt, so gilt nach Gleichung (4.4) die notwendige und hinreichende Bedingung für asymptotische Stabilität hinsichtlich α^*

$$\left[\mu S + mA\eta^2(1-\eta^2)V^2 \right] \cos 2\alpha^* > 0. \quad (4.9)$$

Mit

$$A = 1 + \xi \Phi, \quad \xi = \frac{me}{S} = \frac{mJ}{S^2}, \quad \Phi = \frac{\eta^2(1-\eta^2)}{(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2} \quad (4.10)$$

lässt sich die Stabilitätsbedingung in der Form

$$A \cos 2\alpha^* > 0 \quad (4.11)$$

schreiben. Dabei erfasst der Parameter ξ die Intensität des Einflusses der Zusatzmasse. Der den Vergrößerungsfunktionen ähnliche Frequenzgang $\Phi = \Phi(\eta)$ ist mit dem Dämpfungsgrad D als Scharparameter in Bild 2 dargestellt. Er ist im unterkritischen Frequenzbereich $\eta < 1$ positiv und im überkritischen Frequenzbereich $\eta > 1$ negativ.

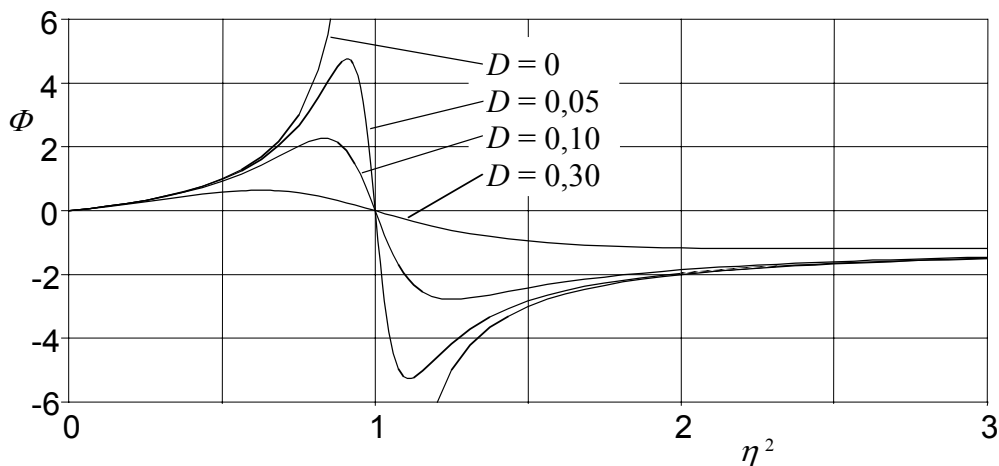


Bild 2. Darstellung der Funktion Φ zur Interpretation der Stabilitätsbedingung (4.11)

Anhand dieses Bildes kann mittels einer horizontalen Geraden $\Phi_\xi = -1/\xi$ die Stabilitätsbedingung (4.10) leicht für einen bestimmten Wert des Parameters ξ interpretiert werden. Für die Erregerfrequenzbereiche, für die $\Phi > \Phi_\xi$ gilt, ist die Stabilitätsbedingung für die ersten beiden Lösungen (4.6),

$$A > 0, \quad (4.12)$$

erfüllt, für die Erregerfrequenzbereiche, für die $\Phi < \Phi_\xi$ gilt, die Stabilitätsbedingung für die Lösungen (4.7),

$$A < 0. \quad (4.13)$$

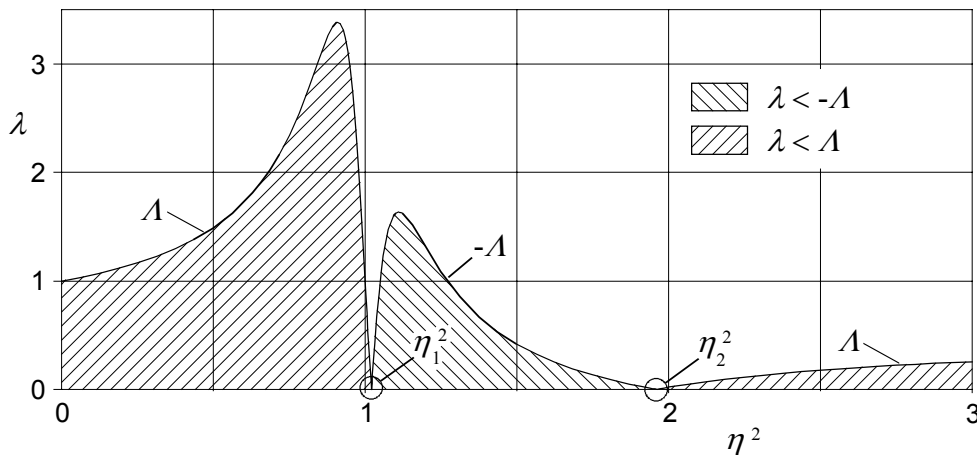


Bild 3. Instabilitätsbereich $\lambda < -A$ für das hängende und Stabilitätsbereiche $\lambda < A$ für das stehende Pendel; Parameterwerte: $\xi = 0,5$; $D = 0,05$

Bild 3 zeigt A in Abhängigkeit von η^2 für die speziellen Parameterwerte $\xi = 0,5$ und $D = 0,05$, wobei im betrachteten Fall $\lambda = 0$ gilt (siehe Abschnitt 4.2). Demnach sind die Lösungen (4.6) in den Bereichen $0 < \eta < \eta_1$ und $\eta_2 < \eta$ und die Lösungen (4.7) in dem Bereich $\eta_1 < \eta < \eta_2$ stabil und in den jeweils anderen Bereichen instabil.

4.2 Allgemeiner Fall des Pendels im Schwerfeld

Betrachten wir wieder die Bewegung des Pendels in der vertikalen Ebene bei nicht vernachlässigbarer Erdbeschleunigung g , so müssen wir von den komplizierteren Existenzbedingungen (3.24), (3.25) zur Bestimmung von α^* und ε^* ausgehen. Nach wie vor existieren u. a., wie es auch zu erwarten war, die Lösungen (4.6), dem hängenden und dem stehenden Pendel entsprechend. Wir verzichten auf die Ermittlung weiterer Lösungen und wenden uns der hauptsächlich interessierenden Frage der Stabilität dieser Lösungen (4.6) zu.

Da die rechte Seite der Gleichung (3.28) wieder verschwindet, ist die Stabilität der Bewegung der Zusatzmasse unter der Voraussetzung $\delta \neq 0$ wieder gesichert.

Setzen wir

$$\sigma = \cos \alpha^*, \quad \sigma_1 = 1, \quad \sigma_2 = -1, \quad (4.14)$$

so lautet die erste Gleichung in den Variationen (3.27) jetzt

$$\left(J + \frac{1}{2} m A^2 \eta^4 V^2 \right) \ddot{\vartheta} + k \dot{\vartheta} + S \left[\sigma g + \frac{\mu}{2} A \Omega^2 \right] \vartheta + \frac{1}{2} m \left[\sigma \mu g + A \Omega^2 \right] A \eta^2 (1 - \eta^2) V^2 \vartheta = 0. \quad (4.15)$$

Für die weitere Auswertung setzen wir eine hinreichend starke Lagerachsenregung voraus, so dass

$$g\mu \ll A\Omega^2 \quad \text{bzw.} \quad gS \ll J\Omega^2 \quad (4.16)$$

gilt und sich unter der Voraussetzung $k \neq 0$ die folgende Bedingung für asymptotische Stabilität ergibt:

$$\sigma Sg + \frac{1}{2} \frac{(SA\Omega)^2}{J} + \frac{1}{2} m(A\Omega)^2 \eta^2 (1 - \eta^2) V^2 > 0. \quad (4.17)$$

Mit dem den Einfluss der Erdbeschleunigung charakterisierenden Parameter

$$\lambda = \frac{2ge}{(A\Omega)^2} \quad (4.18)$$

lässt sich die Bedingung (4.17) mit den Bezeichnungen (4.10) in Verallgemeinerung der Bedingungen (4.12) und (4.13) in der Form

$$A > -\sigma\lambda \quad (4.19)$$

darstellen. Bild 3 zeigt in Abhängigkeit von η^2 hinsichtlich des stets positiven Parameters λ den Instabilitätsbereich $\lambda < -A$ für das hängende und die Stabilitätsbereiche $\lambda < A$ für das stehende Pendel für die speziellen Parameterwerte $\xi = 0,5$ und $D = 0,05$. Bemerkenswert ist die Existenz eines überkritischen Frequenzbereiches, für das diese Pendelpositionen beide instabil sind und vermutlich andere Lösungen des Gleichungssystems (3.24), (3.25) stabil werden.

Wir bestätigen abschließend, dass die bekannten Ergebnisse für das Pendel ohne zusätzlichen Freiheitsgrad richtig mit erfasst sind. Für $\xi = 0$ folgt aus (4.19)

$$1 > -\sigma\lambda \quad (4.20)$$

bzw.

$$(A\Omega)^2 > -2\sigma ge. \quad (4.21)$$

Für $\sigma = \sigma_1 = +1$ (hängendes Pendel) ist diese Bedingung immer erfüllt.

Für $\sigma = \sigma_1 = -1$ (stehendes Pendel) folgt die klassische Stabilitätsbedingung

$$A\Omega > \sqrt{2ge}. \quad (4.22)$$

Diese einfachen Ergebnisse gelten nach (4.10) auch im Grenzfall $c \rightarrow \infty$, d. h., $\eta = 0$, $\Phi = 0$, wodurch die Ergebnisse in einem gewissen Umfang bestätigt werden. Im entgegengesetzten Grenzfall einer äußerst weichen Feder erhält man mit $c = 0$ die Grenzwerte $\lim_{\eta \rightarrow \infty} \Phi = -1$, $\lim_{\eta \rightarrow \infty} A = 1 - \xi$ bzw. unter Berücksichtigung der Beziehungen (4.10) und (4.18) anstelle von (4.20), (4.18) und (3.10)

$$1 > -\sigma\lambda^*, \quad \lambda^* = \frac{2ge^*}{(A\Omega)^2}, \quad e^* = \frac{J}{S - me}. \quad (4.23)$$

Wir bemerken, dass der zur Stabilisierung des stehenden Pendels notwendige Mindestwert der Geschwindigkeitsamplitude der Lagerachsschwingungen $(A\Omega)_{\min}^m$ bei Vorhandensein des eingebauten Massenpunktes im unterkritischen Bereich unter bestimmten Umständen wesentlich kleiner ist als der entsprechende Wert $(A\Omega)_{\min}$ bei Fehlen der Masse. Das Verhältnis dieser Werte ergibt sich aus den Formeln (4.19) und (4.22) zu

$$q = \frac{(A\Omega)_{\min}^m}{(A\Omega)_{\min}} = \frac{1}{\sqrt{A}}. \quad (4.24)$$

Unter den Bedingungen von Bild 3 ($\xi = 0,5$; $D = 0,05$) erhalten wir z. B. für $\eta^2 = 0,9$ die Werte $A = 3$ und

$$q = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,6.$$

5 Über die Vibrationssteuerung von Gleichgewichtslagen des Pendels

Die in den Abschnitten 3 bis 5 erhaltenen Ergebnisse legen den Gedanken nahe, dass die Hauptgesetzmäßigkeiten des untersuchten Systems erhalten bleiben und gezielt genutzt werden können, wenn die Relativbewegung der Zusatzmasse nach einem z. B. durch eine Steuerung erzwungenen Weg-Zeit-Gesetz vorgegeben wird. Anstelle einer Analyse der passiven Reaktion des Systems auf die Schwingungen des Achslagers kann diese Reaktion auf diese Weise aktiv beeinflusst werden. So ist die solcherart abgewandelte Aufgabe, die dazu dienen kann, bestimmte Verhaltenseigenschaften des Pendels auf einfacherem Wege zu bestätigen, auch von eigenem Interesse.

Wir nehmen an, dass die Relativbewegung der Zusatzmasse als harmonische Schwingung mit der Erregerkreisfrequenz Ω der Achsschwingungen mit einer bestimmten gegebenen Amplitude B und einer bestimmten Phasenverschiebung β bezüglich der Schwingungen der Pendelachse gegeben ist:

$$\rho = \kappa = B \cos(\Omega t + \beta). \quad (5.1)$$

Damit wird das System der Bewegungsgleichungen (2.1), (2.2) auf die eine folgende Gleichung reduziert und abgewandelt:

$$\begin{aligned} & \left\{ J_A + m[r + B \cos(\Omega t + \beta)]^2 \right\} \ddot{\varphi} + k\dot{\varphi} - 2m[r + B \cos(\Omega t + \beta)]B\Omega \sin(\Omega t + \beta)\dot{\varphi} \\ & + \left\{ S_A + m[r + B \cos(\Omega t + \beta)] \right\} (g - A\Omega^2 \cos \Omega t) \sin \varphi = 0. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Entsprechend der Methode der direkten Teilung der Bewegung suchen wir eine Näherungslösung mittels des den Beziehungen (3.1) – (3.4) entsprechenden Ansatzes

$$\varphi = \alpha(t) + \psi(t, \Omega t), \quad \tau = \Omega t, \quad \langle \psi(t, \tau) \rangle = 0. \quad (5.3)$$

Bei Beschränkung auf die Glieder bis 2. Grades bzw. im Falle von Gliedern mit dem Faktor $\cos \Omega t$ oder $\cos(\Omega t + \beta)$ bis ersten Grades in der schnellen Koordinate ψ erhalten wir die Gleichung der langsamen Bewegung

$$\begin{aligned} & J\ddot{\alpha} + 2mrB[\langle \cos(\Omega t + \beta) \ddot{\psi} \rangle - \Omega \langle \sin(\Omega t + \beta) \dot{\psi} \rangle] + mB^2 \langle \cos^2(\Omega t + \beta) \rangle \ddot{\alpha} + k\dot{\alpha} \\ & - 2mB^2 \Omega \langle \cos(\Omega t + \beta) \sin(\Omega t + \beta) \rangle \dot{\alpha} + Sg \left(1 - \frac{1}{2} \langle \psi^2 \rangle \right) \sin \alpha + mBg \langle \psi \cos(\Omega t + \beta) \rangle \cos \alpha \\ & - SA\Omega^2 \langle \psi \cos \Omega t \rangle \cos \alpha - mBA\Omega^2 \langle \cos(\Omega t + \beta) \cos \Omega t \rangle \sin \alpha = 0. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Unter ähnlichen Vernachlässigungen wie im Abschnitt 3 ergibt sich für die schnelle Bewegung wieder die Gleichung (3.12) mit der stationären Lösung (3.14).

Nach Auswertung und Einsetzen der Mittelwerte folgt daraus

$$\begin{aligned} & \left(J + \frac{1}{2} mB^2 \right) \ddot{\alpha} + k\dot{\alpha} + S \left[g \left(1 - \frac{1}{4} \mu^2 \sin^2 \alpha \right) + \frac{1}{2} \mu A\Omega^2 \cos \alpha \right] \sin \alpha \\ & - \frac{1}{2} \cos \beta mB (\mu g \cos \alpha + A\Omega^2) \sin \alpha = 0. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Für im Mittel konstante Lösungen

$$\alpha = \alpha^* = \text{const.} \quad (5.6)$$

gehört die Variation ϑ jetzt der Gleichung

$$\begin{aligned} & \left(J + \frac{1}{2} mB^2 \right) \ddot{\vartheta} + k\dot{\vartheta} + S \left[g \cos \alpha^* \left(1 - \frac{3}{4} \mu^2 \sin^2 \alpha^* \right) + \frac{1}{2} \mu A\Omega^2 \cos 2\alpha^* \right] \vartheta \\ & - \frac{1}{2} \cos \beta mB (\mu g \cos 2\alpha^* + A\Omega^2 \cos \alpha^*) \vartheta = 0. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Beschränken wir die Untersuchung wieder auf die hauptsächlich interessierenden einfachen Lösungen

$$\alpha_1^* = 0, \quad \alpha_2^* = \pi \quad (5.8)$$

und führen wir wieder gemäß (4.14) die Kenngrößen $\sigma_1 = 1$ für das hängende Pendel und $\sigma_2 = -1$ für das stehende Pendel ein, so vereinfacht sich die Variationsgleichung zu

$$\left(J + \frac{1}{2}mB^2\right)\ddot{\vartheta} + k\dot{\vartheta} + S\left[\sigma g + \frac{1}{2}\mu A\Omega^2\right]\vartheta - \frac{1}{2}\cos\beta mB(\mu g + \sigma A\Omega^2)\vartheta = 0. \quad (5.9)$$

Setzen wir für die weitere Auswertung wieder Bedingung (4.16) als erfüllt voraus, so erhalten wir näherungsweise die notwendige und hinreichende Bedingung für asymptotische Stabilität

$$\sigma Sg + \frac{1}{2}\frac{(SA\Omega)^2}{J} - \frac{1}{2}\sigma mAB\Omega^2 \cos\beta > 0. \quad (5.10)$$

Mittels der Parameter ξ und λ entsprechend den Beziehungen (4.10) und (4.18) lässt sich diese Bedingung umformen zu

$$A^* > -\sigma\lambda, \quad A^* = 1 - \sigma\xi \frac{B \cos\beta}{A}. \quad (5.11)$$

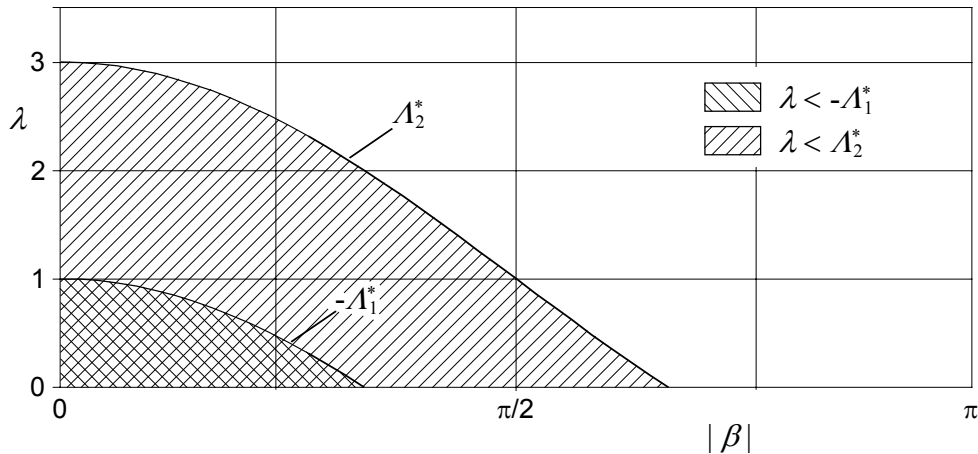


Bild 4: Instabilitätsbereich $\lambda < -A_1^*$ für das hängende und Stabilitätsbereich $\lambda < A_2^*$ für das stehende Pendel für $\xi B/A = 2$

Bild 4 zeigt in Abhängigkeit von $|\beta|$ hinsichtlich des stets positiven Parameters λ den Instabilitätsbereich $\lambda < -A_1^*$ für das hängende ($\sigma = \sigma_1 = 1$) und den Stabilitätsbereich $\lambda < A_2^*$ für das stehende Pendel ($\sigma = \sigma_2 = -1$) für den speziellen Parameterwert $\xi B/A = 2$. Ein Instabilitätsgebiet für das hängende Pendel existiert nur für hinreichend große Werte dieses Parameters.

Wie schon im Abschnitt 4.2 gestattet das Vorhandensein des zusätzlichen beweglichen Massenpunktes, den zur Gewährleistung der Stabilität des stehenden Pendels notwendigen Wert der Geschwindigkeitsamplitude der Lagerachsschwingungen $A\Omega$ wesentlich zu verringern. So erhalten wir unter den Bedingungen von Bild 4 bei

$$|\beta| = 0 \text{ und } \frac{\xi B}{A} = 2$$

$$q = \frac{(A\Omega)_{\min}^m}{(A\Omega)_{\min}} = \frac{1}{\sqrt{A_2^*}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,6. \quad (5.12)$$

6 Zusammenfassung

Es wurden erste grundsätzliche Ergebnisse zum Einfluss eines inneren Freiheitsgrades auf das Verhalten eines Pendels mit harmonisch vibrierender Aufhängung vorgelegt. Diese beschränken sich auf analytische Näherungsergebnisse für den Fall eines ebenen Pendels mit vertikal vibrierender Lagerachse und einen zusätzlichen Freiheitsgrad infolge eines über eine elastische Feder und einen viskosen Dämpfer mit dem Pendel verbundenen Massenpunktes mit radialer relativer Beweglichkeit. Als wichtigstes Ergebnis ist festzuhalten, dass der zusätzli-

che Freiheitsgrad für bestimmte Parameterwerte instabile Gleichgewichtslagen stabilisieren und stabile Gleichgewichtslagen destabilisieren kann und dass dieser Effekt auch aktiv durch eine entsprechende Steuerung der Bewegung der Zusatzmasse genutzt werden kann. Das Vorhandensein des zusätzlichen Freiheitsgrades gestattet die Stabilisierung des stehenden Pendels unter Umständen bei wesentlich kleineren Werten der Geschwindigkeitsamplitude der Achsschwingungen.

In weiteren Arbeiten sollen diese Ergebnisse durch Einbeziehung horizontaler Schwingungen der Lagerachse und einer tangentialen Beweglichkeit der Zusatzmasse verallgemeinert werden. Darüber hinaus sollen numerische und gegebenenfalls experimentelle Untersuchungen die analytischen Vernachlässigungen zusätzlich a posteriori rechtfertigen bzw. die Parameterbereiche für die Zulässigkeit dieser Vernachlässigungen eingrenzen.

Danksagung

Die Autoren danken der Alexander von Humboldt-Stiftung für die finanzielle Förderung der Wiedereinladung des erstgenannten Autors als Humboldt-Preisträger durch den zweiten Autor, durch die die gemeinsame Bearbeitung der Thematik der vorliegenden Veröffentlichung ermöglicht wurde.

Literatur

- Blekhman, I. I.: *Vibrational mechanics, nonlinear dynamic effects, general approach, applications*. World Scientific Singapore New Jersey London HongKong (2000), 509 p.
- Blekhman, I. I., Sperling, L.: Stabilization of the synphase postcritical regime of rotation of vibroexciters by means of internal degree of freedom. *3rd Polyakhov Readings*, February 4 – 6 (2003), St. Petersburg, 107-111.
- Blekhman, I. I., Sperling, L.: *The setting up of the self-synchronization problem of the dynamic objects with inner degrees of freedom and method of its solution*. Chapter 13 in *Selected Topics in Vibrational Mechanics*, Edited by I. I. Blekhman, World Scientific, New Jersey London Singapore Shanghai HongKong Taipei Chennai, (2004), 209 – 234.
- Hemp, G. W., Sethna, P. R.: On the dynamical systems with high-frequency parametrical excitation. *Int. J. of Mech.*, 3, (1968), 351 – 365.
- Kapitsa, P. L.: Dynamic stability of pendulum when the point of suspension is oscillating. *Journ. of Exper. and Theor. Physics*, 21, 5 (1951), 588 – 598.
- Kapitsa, P. L.: Pendulum with vibrating axis of suspension. *Uspekhi fizicheskikh nauk*, 44, 1, (1954), 7 – 20.
- Rimrott, F. P. J.: *Introductory attitude dynamics*. Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg London Paris Tokyo, (1989), 383 p.
- Rimrott, F. P. J., Semenov, G.: Attitude drift of a dissipative, torquefree, radially deformable gyro. *ZAMM* 74, 2, (1994), 97 – 103.
- Rimrott, F. P. J., Runau, B., Saitov, A.: Dynamik dissipativer Kreisel. *Technische Mechanik*, Sonderheft (1997), 15 – 20.
- Ryland, G., Meirowich, L.: Stability boundaries of swinging spring with oscillatory support. *Journ. of Sound and Vibration* 51, (1977), 547 – 560.
- Saitov, A., Rimrott, F. P. J.: Strukturelle Resonanzen und die Lagedrift drehmomentfreier Kreiselsatelliten. *Technische Mechanik*, 17, 3 (1997), 217 – 222.
- Schmidt, B. A.: The radially flexible pendulum subjected to high-frequency excitation. *Journ. of Appl. Mech.*, 50 (1983), 443 – 448.
- Sperling, L., Blekhman, I. I.: The Synchronization of Dynamic Objects with Inner Degrees of Freedom. In: D.A. Indeitsev, *Advanced Problems in Mechanics, APM 2001, Proceedings of the XXIX Summer School*, held in Repino, St. Petersburg, Russia June 21 - 30 (2001), 18 – 36.
- Stephenson, A.: On induced stability. *Philosophical Magazine* 15 (1908), 233 – 236.
- Stephenson, A.: On induced stability. *Philosophical Magazine* 17 (1909), 765 – 766.
-
- Anschriften:* Prof. Dr.-Ing. Iliya I. Blekhman, Russian Academy of Sciences, Mekhanobr-Tekhnika Corp., Institut of Mechanical Engineering, 22 Liniya V.O., 3, 199106 St. Petersburg, Russische Föderation, e-mail: blekhman@vibro.ipme.ru; Prof. Dr.-Ing. habil. Lutz Sperling, Institut für Mechanik, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Universitätsplatz 2, 39106 Magdeburg, e-mail: lutz.sperling@mb.uni-magdeburg.de