TECHNISCHE MECHANIK, Band 24, Heft 3-4, (2004), 236-241
Manuskripteingang: 13. April 2004

Anwendung des generalisierten Gaußschen Prinzips auf die Untersuchung der Bewegung eines Satelliten mit konstanter Beschleunigung

M.P. Juschkov, S.H. Soltachanov, S.A. Zegzhda

Es wird eine der neuen möglichen Aufgaben bezüglich der Bewegung eines Satelliten betrachtet, bei der seine Beschleunigung während seiner Umlaufbewegung um die Erde auf einem elliptischen Orbit zu einem bestimmten Zeitpunkt fixiert wird und bei der weiteren Bewegung unveränderlich erhalten bleibt. Für die Untersuchung der Bewegung wird das generalisierte Gaußsche Prinzip angewendet.

1 Formulierung der Aufgabe

F.P.J. Rimrott hat auf verschiedensten Gebieten der Mechanik aktiv gearbeitet. Ein grosser Anteil seiner Arbeiten, von denen viele in der Zeitschrift «Technische Mechanik» erschienen sind, war der Untersuchung der Bewegung von Kreiseln und Satelliten gewidmet (siehe z. B. Rimrott und Salustri (2001), Rimrott und Cleghorn (2002)). So wird in der Arbeit von Rimrott und Salustri (2001) der Übergang eines Sputniks von einem Kreisorbit zu einem anderen auf einer Hohmann-Ellipse betrachtet. Dabei wird das klassische Schema der zwei Impulse erweitert durch die Berücksichtigung der endlichen Zeit der Arbeit der Bordmotoren. Im Ergebnis läuft es darauf hinaus, neben der Tangentialkraft auch die Normalkraft zu berücksichtigen, was eine Neigung der Regelungskraft gegenüber dem klassischen Impuls zur Folge hat.

In der vorliegenden Arbeit wird eine der möglichen Bewegungen des Sputniks betrachtet, bei welchem bei seiner Bewegung auf einer Ellipse (wobei es sich auch um eine Hohmann-Ellipse handeln kann) zu einem bestimmten Zeitpunkt der Betrag der Beschleunigung fixiert wird. Zur Lösung dieser Aufgabe wird das generalisierte Prinzip von Gauß angewendet (Tschuev, 1974; Poljachov u.a., 1983).

Falls die Bewegung eines Punktes in Polarkoordinaten $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, $t \geq 0$, gegeben ist, kann man das Quadrat seiner Beschleunigung w^2 bekanntlich mittels der Formel

$$w^2 = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)^2 + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})^2$$

berechnen. Darum werden wir, wenn die Beschleunigung zur Zeit $t = t_0$ die Größe w_0 hat und wir im folgenden die Unveränderlichkeit des Quadrates dieser Größe fordern, verlangen, dass bei der Bewegung des Punktes die Bedingung

$$f_2(r, \dot{r}, \dot{\varphi}, \ddot{r}, \ddot{\varphi}) \equiv (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)^2 + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})^2 - w_0^2 = 0 \tag{1.1}$$

erfüllt wird. Die Bedingung (1.1) kann man als eine nichtlineare nichtholonome Bedingung zweiter Ordnung betrachten, die der untersuchten Bewegung des Sputniks auferlegt ist.

Differenzieren wir diesen Ausdruck nach der Zeit, so können wir anstelle (1.1) die lineare nichtholonome Bedingung dritter Ordnung

$$f_2(r, \dot{r}, \dot{\varphi}, \ddot{r}, \ddot{\varphi}, \dddot{r}, \dddot{\varphi}) \equiv c_{3r}(r, \ddot{r}, \dot{\varphi})\dddot{r} + c_{3\varphi}(r, \dot{r}, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi})\dddot{\varphi} + c_{30}(r, \dot{r}, \ddot{r}, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}) = 0 \tag{1.2}$$

schreiben, wo

$$\begin{aligned} c_{3r} &= \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \quad c_{3\varphi} = 2r\dot{r}\dot{\varphi} + r^2\ddot{\varphi}, \\ c_{30} &= 3\dot{r}\ddot{r}\dot{\varphi}^2 + 2r^2\dot{\varphi}^3\ddot{\varphi} + r\dot{r}\dot{\varphi}^4 + 6\dot{r}^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + 3r\dot{r}\ddot{\varphi}^2 \end{aligned} \tag{1.3}$$

gilt. Damit ist eine reale mechanische Aufgabe formuliert, in der eine nichtholonome Bindung höherer Ordnung vorkommt, die in der Form (1.1) oder (1.2) geschrieben ist. Die Erfüllung dieser Bindung wird gewährleistet durch Aufbringen einer zusätzlichen Kraft auf den Satelliten, die eine Reaktion dieser Bindung höherer Ordnung ist.

Beachten wir, dass diese Aufgabe Merkmale sowohl einer direkten als auch einer inversen Dynamikaufgabe aufweist. Tatsächlich wird einerseits die Bewegung des Systems entsprechend einer gegebenen Kraft (in unserem Falle entsprechend der Anziehungskraft der Erde auf den Sputnik) gesucht, und andererseits muss gleichzeitig nach den gegebenen Charakteristiken der Bewegung (in Form der Vorgabe einer nichtholonomen Bindung höherer Ordnung) eine zusätzliche Kraft gesucht werden, die eine Bewegung mit der erwähnten Eigenschaft gewährleistet. Deshalb hat Akademiemitglied S.S. Grigorjan vorgeschlagen, Aufgaben dieses Typs *gemischte Aufgaben der Dynamik* zu nennen (Zegzhda und Juschkov, 2000). Faktisch wird bei einem solchen Vorgehen eine bestimmte Regelungsaufgabe gelöst, bei der die Erfüllung des in Form einer zusätzlichen Differentialgleichung (im allgemeinen Falle eines Systems von Differentialgleichungen) gegebenen Programms durch Aufbringen einer Regelungskraft (von Regelungskräften) auf das System gewährleistet wird.

Für die Lösung der formulierten gemischten Dynamikaufgabe wurde früher der Apparat der nichtholonomen Mechanik angewendet, erweitert auf nichtholonome Bindungen höherer Ordnung (Juschkov und Zegzhda, 2001). Jetzt lösen wir dieselbe Aufgabe mit Hilfe des generalisierten Gaußschen Prinzips (Tschuev, 1974; Poljachov u.a., 1983).

2 Grundlegende Formeln des Polarkoordinatensystems

Für die Lösung der gestellten Aufgabe wird das Polarkoordinatensystem $q^1 \equiv r$, $q^2 \equiv \varphi$ benutzt. Wir stellen die grundlegenden Formeln dieses Polarkoordinatensystems zusammen (siehe z. B. Zegzhda u.a. (2002)).

Das Polarkoordinatensystem führt die natürliche Basis

$$\mathbf{e}_1 \equiv \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{e}_2 \equiv \mathbf{e}_\varphi, \quad |\mathbf{e}_1| = 1, \quad |\mathbf{e}_2| = r$$

und die duale Basis

$$\mathbf{e}^1 \equiv \mathbf{e}^r, \quad \mathbf{e}^2 \equiv \mathbf{e}^\varphi, \quad |\mathbf{e}^1| = 1, \quad |\mathbf{e}^2| = 1/r$$

ein.

Diesen entsprechen ein metrischer Tensor mit der Matrix $(g_{\rho\sigma})$

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = r^2, \quad g_{12} = g_{21} = 0$$

und dual dazu ein metrischer Tensor mit der Matrix $(g^{\rho\sigma})$

$$g^{11} = 1, \quad g^{22} = 1/r^2, \quad g^{12} = g^{21} = 0\,.$$

Nach den Formeln (hier und im folgenden gelte die Summationsvereinbarung von 1 bis 2)

$$\Gamma_{\rho,\sigma\tau} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial q^\tau} + \frac{\partial g_{\rho\tau}}{\partial q^\sigma} - \frac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial q^\rho}\right),$$

$$\Gamma^\rho_{\sigma\tau} = g^{\rho\pi}\Gamma_{\pi,\sigma\tau}, \quad \pi,\rho,\sigma,\tau = 1, 2,$$

kann man die Christoffelschen Symbole erster und zweiter Art

$$\Gamma_{2,21} = \Gamma_{2,12} = -\Gamma_{1,22} = -r, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = 1/r, \quad \Gamma^1_{22} = -r.$$

berechnen. Die übrigen Christoffelschen Symbole sind gleich Null.

Die kovarianten Komponenten des Beschleunigungsvektors werden nach den Formeln

$$w_1 \equiv w_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2,$$
$$w_2 \equiv w_\varphi = r^2\ddot{\varphi} + 2r\dot{r}\dot{\varphi}. \tag{2.1}$$

berechnet.

Verbleiben wir noch bei einer wichtigen Formel für die Differentiation der kovarianten Komponente eines Vektors. Wir betrachten einen Vektor $\mathbf{a} = a_\tau \mathbf{e}^\tau$. Dann gelten für einen Vektor $\mathbf{b} = b_\rho e^\rho = \dot{\mathbf{a}}$ die Formeln

$$b_\rho = \dot{a}_\rho - \Gamma^\tau_{\rho\alpha} a_\tau \dot{q}^\alpha. \tag{2.2}$$

3 Das generalisierte Gaußsche Prinzip und die Bewegungsgleichungen in der Form von Maggi für einen Massenpunkt mit einer nichtholonomen Bindung dritter Ordnung

Bei Vorhandensein einer Bindung hat die Bewegungsgleichung eines Massenpunktes der Masse m die Form

$$m\mathbf{w} = \mathbf{F} + \mathbf{R}, \tag{3.1}$$

wo $\mathbf{w}$ die Beschleunigung des Punktes ist, $\mathbf{F}$ eine aktive Kraft und $\mathbf{R}$ die Reaktion der Bindung. Wenn wir die Gleichung (3.1) nach der Zeit differenzieren, können wir

$$m\mathbf{U} = \mathbf{P} + \mathbf{G}$$

schreiben, wobei

$$\mathbf{U} = \dot{\mathbf{w}}, \quad \mathbf{P} = \dot{\mathbf{F}}, \quad \mathbf{G} = \dot{\mathbf{R}}$$

gilt. Nach dem generalisierten Gaußschen Prinzip (Poljachov u.a., 1983) haben wir bei Gültigkeit der nichtholonomen Bindung dritter Ordnung (1.2)

$$\delta'''(m\mathbf{U} - \mathbf{P})^2 = 0, \tag{3.2}$$

oder

$$\delta'''\mathbf{G}^2 = 0, \tag{3.3}$$

d. h., die Ableitung des Reaktionsvektors ist dem Betrage nach minimal im Vergleich zu allen Zuständen mit Vektoren $\dot{\mathbf{W}}$, welche der Bindungsgleichung (1.2) genügen. In den Formeln (3.2), (3.3) bedeutet das Symbol δ''', dass die Variation bei konstanten t, r, φ, $\dot{r}$, $\dot{\varphi}$, $\ddot{r}$, $\ddot{\varphi}$ berechnet wird.

Das Prinzip (3.2) können wir jetzt in der Form

$$(m\mathbf{U} - \mathbf{P}) \cdot \delta'''\mathbf{U} = 0$$

schreiben, oder, falls wir die skalare Multiplikation ausführen, wie folgt:

$$(mU_\rho - P_\rho)\delta''' U^\rho = 0, \quad \rho = 1, 2\,. \tag{3.4}$$

Weil nach der Formeln (2.2)

$$U_1 = \dot{w}_1 - \Gamma^\tau_{1\sigma} w_\tau \dot{q}^\sigma, \quad U_2 = \dot{w}_2 - \Gamma^\tau_{2\sigma} w_\tau \dot{q}^\sigma, \quad \sigma, \tau = 1, 2$$

gilt, bekommen wir unter Berücksichtigung der Formeln (2.1) und der Bindung zwischen den kontravarianten und den kovarianten Komponenten des Vektors:

$$\delta''' U^1 = \delta''' \dddot{r}, \quad \delta''' U^2 = \delta''' \dddot{\varphi}.$$

$\delta''' \dddot{r}$ und $\delta''' \dddot{\varphi}$ sind ihrerseits gemäß Gleichung (1.2) durch die Beziehung

$$\delta''' \dddot{\varphi} = -\frac{c_{3r}}{c_{3\varphi}} \delta''' \dddot{r}$$

miteinander verbunden, weshalb Gleichung (3.4) die folgende Gestalt annimmt:

$$\left(mU_1 - P_1 - \frac{c_{3r}}{c_{3\varphi}}(mU_2 - P_2)\right) \delta''' \dddot{r} = 0 .$$

Weil die Variation $\delta''' \dddot{r}$ willkürlich ist, erhalten wir daher für die ebene Bewegung des der Bindung (1.2) unterworfenen Massenpunktes die Gleichung in der Form von Maggi:

$$mU_1 - P_1 - \frac{c_{3r}}{c_{3\varphi}}(mU_2 - P_2) = 0 . \tag{3.5}$$

4 Die Bewegungsgleichungen des Satelliten mit konstanter Beschleunigung

Wir betrachten Gleichung (3.5), angewandt auf unsere Aufgabe. In diesem Falle haben c_{3r} und $c_{3\varphi}$ die Gestalt (1.3), und die Bewegung erfolgt unter der Wirkung der Anziehungskraft der Erde, weshalb für die generalisierten Kräfte

$$Q_1 = -\mu m / r^2, \quad Q_2 = 0, \tag{4.1}$$

gilt, wo μ die Gaußsche Konstante ist.

Unter Benutzung der Formel (2.2) erhalten wir

$$\begin{aligned} U_1 &= \dddot{r} - \dot{r}\dot{\varphi}^2 - 3r\dot{\varphi}\ddot{\varphi} - 3\dot{r}\dot{\varphi}^2, \quad P_1 = 2\mu m \dot{r} / r^3, \\ U_2 &= 3r\dot{r}\ddot{\varphi} + r^2\dddot{\varphi} + 3r\ddot{r}\dot{\varphi} - r^2\dot{\varphi}^3, \quad P_2 = -\mu m \dot{\varphi} / r. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Darum bekommt Gleichung (3.5) nach Einsetzen der Ausdrücke (4.1), (4.2) in diese Gleichung und nach Kürzen durch m die Gestalt

$$\dddot{r} - \dot{r}\dot{\varphi}^2 - 3r\dot{\varphi}\ddot{\varphi} - 3\dot{r}\dot{\varphi}^2 + (3r\dot{r}\ddot{\varphi} + r^2\dddot{\varphi} + 3r\ddot{r}\dot{\varphi} - r^2\dot{\varphi}^3)\frac{r\dot{\varphi}^2 - \ddot{r}}{2r\dot{r}\dot{\varphi} + r^2\ddot{\varphi}} = \frac{2\mu\dot{r}}{r^3} - \frac{\mu\dot{\varphi}}{r}\frac{r\dot{\varphi}^2 - \ddot{r}}{2r\dot{r}\dot{\varphi} + r^2\ddot{\varphi}}. \tag{4.3}$$

Diese Gleichung muss zusammen mit den Bindungsgleichungen (1.2), (1.3) integriert werden. Damit haben wir ein lineares algebraisches Gleichungssystem für die Unbekannten $\dddot{r}$ und $\dddot{\varphi}$. Für die numerische Integration ist es zweckmäßig, dieses System in der Normalform darzustellen:

$$\begin{aligned} \dddot{r} &= [(3r\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + 3\dot{r}\dot{\varphi}^2 + 2\mu\dot{r}/r^3)(2r\dot{r}\dot{\varphi} + r^2\ddot{\varphi})^2 \\ &+ (r^2\dot{\varphi}^3 - 3r\dot{r}\ddot{\varphi} - 3r\ddot{r}\dot{\varphi} - \mu\dot{\varphi}/r)(r\dot{\varphi}^2 - \ddot{r})(2r\dot{r}\dot{\varphi} + r^2\ddot{\varphi}) \\ &+ (3\dot{r}\ddot{r}\dot{\varphi}^2 + 2r^2\dot{\varphi}^3\ddot{\varphi} + r\dot{r}\dot{\varphi}^4 + 6\dot{r}^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + 3r\dot{r}\ddot{\varphi}^2)(r\dot{\varphi}^2 - \ddot{r})r^2] \\ &\cdot [(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})^2 + (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)^2]^{-1} r^{-2}, \\ \dddot{\varphi} &= [(3r\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + 3\dot{r}\dot{\varphi}^2 + 2\mu\dot{r}/r^3)(r\dot{\varphi}^2 - \ddot{r})(2r\dot{r}\dot{\varphi} + r^2\ddot{\varphi}) \\ &+ (r^2\dot{\varphi}^3 - 3r\dot{r}\ddot{\varphi} - 3r\ddot{r}\dot{\varphi} - \mu\dot{\varphi}/r)(r\dot{\varphi}^2 - \ddot{r})^2 \\ &- (3\dot{r}\ddot{r}\dot{\varphi}^2 + 2r^2\dot{\varphi}^3\ddot{\varphi} + r\dot{r}\dot{\varphi}^4 + 6\dot{r}^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + 3r\dot{r}\ddot{\varphi}^2)(2r\dot{r}\dot{\varphi} + r^2\ddot{\varphi})] \\ &\cdot [(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})^2 + (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)^2]^{-1} r^{-2}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

5 Ein numerisches Beispiel

Wir bezeichnen den Abstand vom Zentrum der Erde bis zum Perigäum mit r_π und bis zum Apogäum mit r_α. Dann kann man die Exzentrizität e, den Fokalradius p und die Flächenkonstante c nach den Formeln

$$e = \frac{r_\alpha - r_\pi}{r_\alpha + r_\pi}, \quad p = r_\pi(1+e), \quad c = \sqrt{p\mu}$$

berechnen. Wenn wir jetzt bei t_0 einen Wert $\varphi(t_0)$ annehmen, dann erhalten wir die anderen Anfangswerte für die numerische Integration des Systems (4.4) nach den Formeln:

$$r = \frac{p}{1+e\cos\varphi}, \quad \dot{\varphi} = \frac{c}{r^2}, \quad \dot{r} = \frac{pe\dot{\varphi}\sin\varphi}{(1+e\cos\varphi)^2}, \quad \ddot{\varphi} = -\frac{2\dot{r}\dot{\varphi}}{r}, \quad \ddot{r} = r\dot{\varphi}^2 - \frac{\mu}{r^2}.$$

Für die numerische Integration verwenden wir die Werte der Aufgabe der Bewegung des Satelliten auf der Hohmannschen Ellipse von Rimrott-Salustri (Rimrott und Salustri, 2001):

$$r_\pi = 6600 \text{ km}, \; r_\alpha = 7000 \text{ km}, \; \mu = 368601.19 \text{ km}^3/\text{sec}^2.$$

Bild 1 zeigt die Bewegung des Sputniks, welchen wir jetzt richtiger kosmischen Apparat nennen, berechnet nach den Gleichungen (4.4) bei Fixierung seiner Beschleunigung bei $\varphi(t_1) = 0$, $\varphi(t_2) = \pi/2$. Wir sehen, dass sich der Sputnik auf Spiralen vom Typ der Wardspirale (Rimrott und Cleghorn, 2002) bewegt, wobei er sich asymptotisch einer geradlinigen Bewegung mit konstanter Beschleunigung nähert.

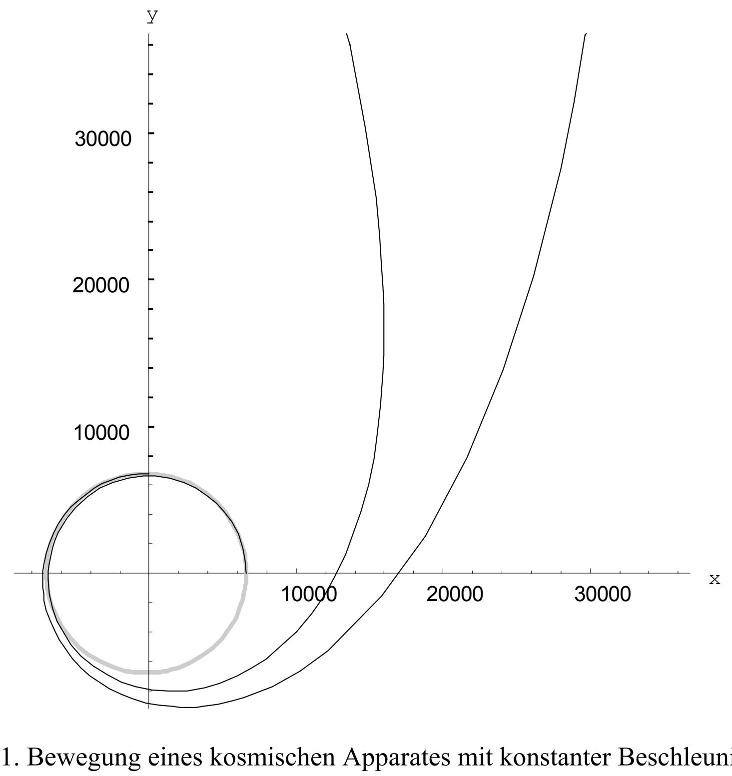

Bild 1. Bewegung eines kosmischen Apparates mit konstanter Beschleunigung

6 Zusammenfassung

In der Arbeit ist eine reale gemischte Aufgabe der Dynamik formuliert, welche eigentlich eine neue Regelungsaufgabe ist. In dieser Aufgabe ist die Regelung in Form einer zusätzlichen Differentialgleichung dritter Ordnung gegeben. Diese Gleichung kann man als eine reale nichtholonome Bedingung dritter Ordnung betrachten.
Die untersuchte konkrete Aufgabe entspricht der Bewegung eines Sputniks mit konstantem Betrag der Beschleunigung. Bei einer solchen Aufgabe kann man eine gleichmäßige Bewegung auf einem Kreis oder eine geradlinige gleichmäßig beschleunigte Bewegung erwarten. Früher war diese Aufgabe faktisch nach dem klassischen Gaußschen Prinzip gelöst worden (Juschkov und Zegzhda, 2001), wobei der Sputnik zwischen zwei konzentrischen Kreisen umlief. In der vorliegenden Arbeit ist dieselbe Aufgabe mit Hilfe des generalisierten Gaußschen Prinzips gelöst, wobei ein asymptotisches Streben des Sputniks zu einer geradlinigen gleichmäßig beschleunigten Bewegung erhalten wurde.

Literatur

Juschkov. M.P., Zegzhda, S.A.: Nichtholonome Mechanik und eine Klasse von Regelungsaufgaben. *5. Magdeburger Maschinenbau-Tage*. Tagungsband. Logos Verlag Berlin, (2001), 165-173.

Poljachov, N.N.; Zegzhda, S.A.; Juschkov. M.P.: Die Verallgemeinerung des Gaußschen Prinzips auf den Fall nichtholonomer Systeme höherer Ordnung. *Dokl. Ak. Nauk UdSSR*, 269, 6, (1983), 1328-1330 (russ.).

Rimrott, F.P.J.; Salustri, F.A.: A Note on Hohmann Transfer Velocity Kicks. *Technische Mechanik*, 21, 2, (2001), 135-143.

Rimrott, F.P.J.; Cleghorn, W.L.: Orbit Transfer by Means of a Ward Spiral. *Technische Mechanik*, 22, 4, (2002), 283-290.

Tschuev, M.A.: Zur Frage der analytischen Methode der Mechanismussynthese, Nachrichten der Hochschulen. *Maschinenbau*. Verl. MVTU N.E.Baumann, 8, (1974), 165-167 (russ.).

Zegzhda, S.A.; Juschkov. M.P.: Die gemischte Aufgabe der Dynamik. *Dokl. Ak. Nauk Ross. Fed.*, 376, 5, (2000), 628-630 (russ.).

Zegzhda, S.A.; Soltachanov, Sch.H.; Juschkov. M.P.: Die Bewegungsgleichungen nichtholonomer Systeme und die Variations-Prinzipe der Mechanik. Verlag der St. Petersburger Universität, (2002), 276 (russ.).

Anschrift: Professoren M.P.Juschkov und S.A.Zegzhda, Fakultaet fuer Mathematik und Mechanik, Staatsuniversitaet St. Petersburg, Universitetsky Prospekt 28, Stary Peterhof, RUS-198504 Sankt-Petersburg; Professor S.H.Soltachanov, Tschetschnja Staatsuniversitaet; E-mail: mpy@phoenix.math.spbu.ru