

## Zur Elastostatik des gebetteten Kreisringbalkens

O. Mahrenholtz

*Beim schlanken kreisförmig geschlossenen schubstarren Balken auf nachgiebiger, vorgespannter Bettung zeigt sich die bekannte Konzentration der Verschiebung in der Umgebung der radial eingeleiteten Einzelkraft. Hier wird zusätzlich die lastinvariante Länge des Kreisbalkens berücksichtigt und das physikalisch nahe liegende Phänomen, dass die Bettung auch eine tangentielle Steifigkeit haben kann. Dann ergeben sich ein deutlich verändertes Verschiebungsfeld und ein steiferes System.*

### In memoriam

Nach seinem Diplom an der Universität (TH) Karlsruhe im Jahr 1951 ging FPJR in die Neue Welt. FPJR: Unter diesem Akronym war Friedrich Paul Johannes Rimrott Kanada weit bekannt. Dem Alten Kontinent blieb er aber stets verbunden, man blicke nur auf seine Gastprofessuren in Wien (1969, 1986), Hannover (1970), Bochum (1971), Wuppertal (1978), Hamburg-Harburg (1987, 1989) und schließlich Magdeburg (1992 – 1997). FPJR hat wie kein anderer Brücken zwischen der kanadischen und der deutschen/europäischen Ingenieurgemeinde geschlagen. Die von ihm betriebene Gründung der Canadian Society for Mechanical Engineering (CSME) nahm Anleihen beim VDI, und die Struktur der Zwei-Jahrestreffen der kanadischen Mechaniker, CANCEM, hat er an die GAMM-Jahresversammlungen angelehnt. CSME und CANCEM werden die Erinnerung an FPJR wach halten.

Ich lernte FPJR 1969 bei dessen Wiener Aufenthalt kennen, und danach folgten die oben genannten Stationen in Hannover und Hamburg-Harburg. So wuchs über die Jahre die fachliche Zusammenarbeit, und aus dem kollegialen Verhältnis entwickelte sich Freundschaft. FPJR war immer gut für interessante Vorträge, bei denen es vielfach um Satellitentechnik ging, wie übrigens auch in seiner wohl letzten Arbeit in dieser Zeitschrift (Band 23, Heft 1, (2003)). Eine Begebenheit aus den 1970er Jahren verdient, erwähnt zu werden. Er versuchte, die Lageänderung von Gyrostaten über die EULER-Gleichung zu beschreiben, der er kurzerhand einen dissipativen Term hinzufügte. Wir haben über das EULER-RIMROTT- Axiom herzlich gelacht, und FPJR hat dann den weisen Schluss gezogen, den Gyrostaten nicht als Starrkörper zu sehen und es beim EULER-Axiom zu belassen. Er liebte die Ausdrucksfähigkeit seiner Muttersprache, er verachtete Denglisch – weshalb ich diesen Beitrag auch auf Deutsch verfasst habe. Er sprach einmal von geschrinkt statt geschrumpft, noch nach Jahren hat er sich über diesen Versprecher geärgert. Es gab zwischen uns kritische Debatten zu Variationsprinzipien und komplementärer Energie, an denen sein Schüler, Kollege und Freund Behrouz Tabarok wesentlichen Anteil nahm. Der frühe Tod von Bez ging ihm sehr nahe, er hat mir nach seinem Schlaganfall mehrfach gesagt „Warum Bez, warum nicht ich?!“ Die Deutschen Sprachschulen in Toronto, deren Direktor er über viele Jahre war, haben ihm sehr am Herzen gelegen. Im Jahr 1972 haben wir (FPJR und OM) ein Ferienlager für seine kanadischen Schüler an der Nordsee organisiert. Da konnte man FPJR von einer ganz anderen Seite kennen lernen: einfühlsam und verständnisvoll, so wie er auch in seinen letzten Jahren war. Aus seiner Direktheit, die einen schon mal verunsichern konnte, war Konzilianz geworden. Seine Frau Doreen hat ihm durch ihre unauffällige Fürsorge diese Jahre, die ja von großer geistiger Klarheit waren, sehr erleichtert. Wenn man ihn besuchte oder mit ihm telefonierte, wollte er vieles über Deutschland und über seine Kollegen wissen, vor allem, wie es in Magdeburg ginge. Fred war ein Eisenbahnfan. Die Deutsche Bahn der 1970/80er Jahre mit ihrer minutiösen Pünktlichkeit bewunderte er, „man könne danach die Uhr stellen“. Dies hat mich auch bewegt, hier einen Beitrag aus einem bahnnahe Gebiet zu wählen. Wann und wo immer es möglich war, fuhr er mit der Bahn. In der Gästewohnung seiner Farm ist das Telefon ein abnehmbares Oberteil einer Dampflok. An seiner Modelleisenbahn – die Anlage nimmt einen großen Raum in Anspruch – hat er bis zuletzt Freude gehabt.

Fred Rimrott wird mir in Erinnerung bleiben als ein Motor der Entwicklung unseres Faches, als ein Mentor des Nachwuchses, als ein Förderer der internationalen Zusammenarbeit und als ein Freund Deutschlands.

### 1 Einleitung

Dieser Beitrag hat zum Ziel, das Wissen über kreisringförmige elastische Reifen zu erweitern, die auf einer vorgespannten, relativ nachgiebigen Bettung ruhen und die einer äußeren radialen Punktlast unterworfen sind. Es liegt auf der Hand, dass die größten Verzerrungen in der Umgebung der Krafteinleitung zu erwarten sind,

solange der Ringbalken nicht zu steif ist. Dies gilt dann auch für die Spannungsspitzen. Das Modell eines geraden, abgewinkelten Balkens kann wie in der Untersuchung von Knothe und Böhmer (1998) näherungsweise herangezogen werden.

Hier wird - nach einer genaueren Untersuchung der Balkenbiegung – die (konstante) Bogenlänge des Ringbalkens berücksichtigt. Die Bettung kann radial und tangential reagieren. Dadurch wird der gesamte Umfang des Ringbalkens stärker zum Abtragen der Last herangezogen. Die Lösung zeigt, innerhalb welcher Grenzen das Modell gilt.

## 2 Der radial gebettete Ringbalken mit Normalkrafteinfluss

Das Modell ist wie folgt aufgebaut:

- Der linearelastische Ringbalken hat den Radius  $R$ , der die Lage der neutralen Linie in der vorgespannten Kreisform beschreibt. Der Balken ist schlank. Er hat die (auf die Länge  $l$  bezogene) Biegesteifigkeit  $EI$  für die Biegung in der Ringebene. Weitere Daten werden nicht benötigt, da nur das Verschiebungsfeld berechnet wird. Schiefe Biegung, Schubeinfluss (Timoshenko-Balken) und Torsion können außer acht bleiben.
- Die nichtlineare Bettung ist radial zwischen starrer Scheibe und Ringbalken vorgespannt. Da das Feld der Radialverschiebungen durch die äußere radiale Last  $F$  klein gegen die Verschiebung der Bettung durch Vorspannung ist, kann auch der Bettung – wie dem Balken - lineares Verhalten zugeordnet werden: Winkler – Bettung.

Es werden Zylinderkoordinaten zugrunde gelegt:  $\varphi$ ,  $y$ ,  $r$  mit der Bogenkoordinate  $s = R \varphi$ . Der Zentriwinkel  $\varphi$  zählt im Gegenuhrzeigersinn. Mit der Verschiebung  $w$  durch Biegung radial nach außen gilt für die neutrale Linie des Ringbalkens

$$r = R + w(s). \quad (1)$$

Die Schnittgrößen des Ringbalkens sind Querkraft  $Q_r = Q$ , Normalkraft  $N_s = N$ , Biegemoment  $M_\varphi = M$ . Die eingeprägte Kraft  $F$  greift bei  $s = \varphi = 0$  an, sie wirkt radial nach innen (Richtung  $-r$ ), drückt also den Ringbalken in die Bettung. Die Streckenlast ist  $q_r = q$ . Dann liefern die drei Gleichgewichtsbedingungen am Kreisbalkenelement die elementaren Beziehungen

$$dN/ds + Q/R = 0, \quad (2)$$

$$N/R - dQ/ds - q = 0, \quad (3)$$

$$dM/ds - Q = 0. \quad (4)$$

Die Bettung ist homogen, sie wird über den Verschiebungsbereich linearisiert: Winkler-Bettung mit der Bettungskonstanten  $\beta$ . Die Streckenlast, hervorgerufen durch die Rückstellwirkung der Bettung, ist dann

$$q = -\beta w. \quad (5)$$

Da der Ringbalken als schlank vorausgesetzt werden kann, gilt das Stoffgesetz des geraden Balkens:

$$M = -EI d^2w/ds^2. \quad (6)$$

Man erhält aus den Gln. (2) bis (6) die beiden gekoppelten DGLn.

$$EI d^4w/ds^4 + \beta w = -N/R, \quad (7)$$

$$d^2N/ds^2 + N/R^2 = -(\beta/R) w, \quad (8)$$

die in eine gewöhnliche DGL. 6ter Ordnung in der Normalkraft  $N(s)$  überführt werden können (Mahrenholtz, 2000):

$$d^6N/ds^6 + (d^4N/ds^4)/R^2 + \kappa^4 d^2N/ds^2 = 0. \quad (9)$$

Der für das Zusammenwirken von Balken und Bettung entscheidende Parameter ist, wie vom Winkler-Problem her bekannt,

$$\kappa^4 = \beta/(EI). \quad (10)$$

Die charakteristische Gleichung (Lösungsansatz  $N(s) = C \exp \lambda s$ ) hat die Wurzeln

$$\lambda_{1,2,3,4} = \pm \{(-1/(2R^2)) [1 \pm i ((\sqrt{2} \kappa R)^4 - 1)^{1/2}]\}^{1/2}, \quad \sqrt{2} \kappa R > 1, \quad (11)$$

und die Doppelwurzel

$$\lambda_{5,6} = 0. \quad (12)$$

Zu letzterer gehört zum einen eine konstante Umfangskraft (Vorspannkraft), zum anderen eine physikalisch nicht zulässige Lösung: Knick in der Biegelinie. Für die Biegung bleiben die vier Wurzeln (11), die sich in der Form

$$\lambda_{1,2,3,4} = \pm [\delta/L \pm i (1/L)] \quad (13)$$

arrangieren lassen. Der (symmetrische) Normalkraftverlauf ist mithin (hier für  $0 < s \leq R\pi$ )

$$N(s) = \exp(+\delta s) [N_1 \cos(s/L) + N_2 \sin(s/L)] + \exp(-\delta s) [N_3 \cos(s/L) + N_4 \sin(s/L)]. \quad (14)$$

Die Randbedingungen gewinnt man aus der Symmetrie des Problems (verschwindende Neigung bei  $s = 0$  und  $s = R\pi$ , verschwindende Querkraft bei  $s = R\pi$ ) und aus der Kräfteinleitung ( $Q(s = 0^+) = F/2$ ). Das Problem ist schlecht konditioniert, wie man dem aufklingenden Term in Gl. (14) entnimmt. Jedoch lässt es sich ohne weiteres numerisch behandeln, da die Lösung in geschlossener Form vorliegt. Aus dem Verlauf der Normalkraft folgen die Reihen für Querkraft, Biegemoment und Verschiebung. Man erkennt: Die Länge  $L$  in Gl. (14) gibt den Einfluss der Balkensteifigkeit im Verhältnis zur Bettungssteifigkeit wieder (Gl. 10). Mit  $L$  wächst der Biegeeinfluss. Es gilt  $s/L = (R/L) \varphi$ , woraus sich die Kennziffer

$$k = R/L \quad (15)$$

ableiten lässt, die das Geschehen kompakt beschreibt. Bild 1 zeigt als Lösungsbeispiel die radiale Verschiebung (ausgezogene Linie) über dem Umfang (Zentriwinkel) für eine Hälfte des Ringbalkens, und zwar – in Anlehnung an eine Versuchskonfiguration – für die Kennziffer  $k = 1,3$ . Der Größtwert der zunächst exponentiell abfallenden Normalkraft  $N(\varphi)$  liegt erwartungsgemäß an der Stelle der Kräfteinleitung  $\varphi = 0$ : Die radiale Streckenlast zieht an dem Ringbalken. Der Größtwert  $N_{\max} = N(\varphi = 0)$  beträgt etwa 20% der eingepprägten Kraft  $F$ . Die weiteren Daten des Beispiels sind hier unerheblich. Bild 1 zeigt anschaulich, wie sich der Ringbalken über dem Umfang radial verschiebt (verformt), und zwar bis  $100^\circ$  nach innen ( $w < 0$ ), wobei die wesentliche Durchsenkung auf ein Drittel des Umfanges beschränkt bleibt ( $0^\circ$  bis  $60^\circ$ ), und über  $100^\circ$  in geringerem Maße nach außen ( $w > 0$ ). Diese Verteilung – ermittelt für einen relativ steifen Ringbalken – ermutigt, einen Vergleich mit dem Ringbalken ohne Normalkrafteinfluss vorzunehmen.

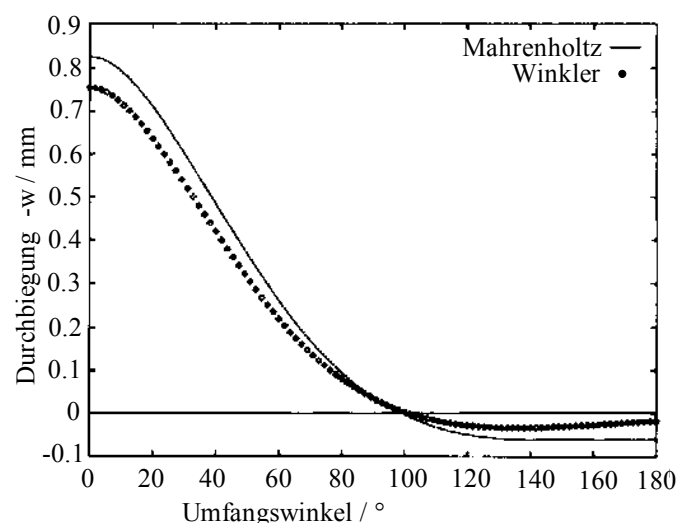


Bild 1. Radiale Verschiebung ( $-w$ ) des Kreisringbalkens als Funktion des Umfangswinkels  $\varphi$  für den Kennwert  $k = 1,3$ . Dargestellt ist eine abgewickelte Hälfte des Ringes ( $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$ ).

- Ausgezogene Kurve: Mit Normalkrafteinfluss (Mahrenholtz, 2000);  $\delta = 0,85$ .
- Gepunktete Kurve: Ohne Normalkrafteinfluss (Winkler-Lösung);  $\delta = 1$ .

### 3 Der radial gebettete Ringbalken ohne Normalkrafteinfluss

Die Normalkraft  $N$  entfällt, und damit auch die Kopplung zwischen Verschiebung und Normalkraft, Gl. (7, 8). DGL. (7) wird auf

$$EI d^4w/ds^4 + \beta w = 0 \quad (16)$$

reduziert. Dies ist auch die Gleichung für den linear gebetteten, geraden Balken, also für das klassische Winkler-Problem. Lösungshinweise findet man in einschlägigen Handbüchern, so im Abschnitt *Technische Mechanik* der HÜTTE (J. Wittenburg, 1989). Die Lösung wird hier, auf den Kreisring bezogen, kurz vorgestellt. Lösungsansatz  $w(s) = C \exp \lambda s$ , charakteristische Gleichung mit dem Parameter  $\kappa$  gemäß Gl.(10)

$$\lambda^4 + \kappa^4 = 0. \quad (17)$$

Die Wurzeln sind

$$\lambda_{1,2,3,4} = \pm [1/L \pm i (1/L)], \quad (18)$$

$$1/L = \kappa/\sqrt{2}. \quad (19)$$

Die Lösung ist symmetrisch,  $w(s) = w(-s)$ . Sie lautet für den Ast  $s > 0$  mit  $s/L = (R/L)\varphi = k \varphi$

$$w(\varphi) = -w_0 \exp(-k\varphi) (\cos k\varphi + \sin k\varphi), \quad (20)$$

$$w_0 = F/(64 EI \beta^3)^{1/4}. \quad (21)$$

Gl. (20) bildet die Kräfteinleitung und die horizontale Tangente bei  $\varphi = 0$  richtig ab, verletzt jedoch  $(dw/d\varphi)_{(\varphi = \pi)} = 0$ . Die Lösung ist vielmehr an  $w(s \Rightarrow \infty) = 0$  angepasst. Da der Wert der Bettungskonstanten  $\beta$  technisch unsicher ist, kann man eine Fehlerschranke bei  $\varphi = \pi$  vorgeben und mit der Lösung (20) als Näherungslösung arbeiten. Eine plausible Abweichung ist 2%: Dann deckt  $\exp(-k\pi) = 0,02$  die Abweichungen bei Verschiebung, Neigung, Krümmung und Querkraft ab. Es folgt  $k = k_{\min} = 1,25$ .

Gl.(20) ist für dieselben Daten wie beim Beispiel des Ringbalkens mit Normalkrafteinfluss ausgewertet: Gepunktete Kurve, Bild 1 (Winkler-Lösung). Die Kennziffer  $k = 1,3$  entspricht etwa der vorgenannten Schranke  $k_{\min} = 1,25$ . Mit größeren Abweichungen zwischen den beiden Lösungen als den hier dargestellten ist für den zulässigen Bereich  $k > k_{\min}$  also nicht zu rechnen. Die Differenzen zwischen den beiden Kurven sind ingenieurmäßig erträglich.

Interessant ist, wie sich die Kraftumlagerung (Querkraft/Normalkraft) auswirkt: Im Kopfbereich ( $180^\circ$ ) wird die Bettung gegenüber dem normalkraftfreien Modell deutlich stärker entlastet. Dies ist durch ein verstärktes Eindringen im Bereich der Kräfteinleitung zu kompensieren. Entsprechend ist die Systemsteifigkeit  $F/w_0$  im normalkraftfreien Modell (etwas) größer. Alles in allem: Die Winkler-Lösung ist für  $k > k_{\min}$  annehmbar. Sie lässt sich einfach handhaben, man kann die Ableitungen für Neigung, Krümmung (Spannung) und Querkraft einfach bestimmen. Ferner folgt für den geraden Balken die interessante Beziehung

$$F/2 = \beta w_0 L. \quad (22)$$

Die konstante Streckenlast  $q = -\beta w_0$ , aufgebracht auf der charakteristischen Länge  $L$  (vgl. Gl. (19)), ergibt die zugehörige (halbe) äußere Last.

Die Winkler-Bettung gehört zum selbstverständlichen Werkzeug des Ingenieurs, das keines Zitats bedarf. Man findet aber auch keine originäre Fundstelle, jedenfalls nicht ohne weiteres. Dem kann hier durch eine Mitteilung von Knothe (2004) abgeholfen werden, die wiederzugeben dem Verfasser im Zusammenhang mit diesem Gedächtnisband angemessen erscheint. Knothe führt aus: „*Man sieht an der Kürze, mit der Winkler die Angelegenheit abhandelt, das er ihr selbst nicht allzu großes Gewicht beimaß. .... Es ist für mich etwas sonderbar, dass ein mechanisches Modell, das inzwischen fast 140 Jahre überstanden hat, vom Urheber in seiner Relevanz nicht erkannt wurde.*“ In der Tat hat Winkler seinen Ansatz in seinem Elastizitäts- und Festigkeitsbuch (Winkler, 1867a) quasi versteckt, wo er im Anhang der Abhandlung über Biegebalken auf knapp drei Seiten in einem Paragraphen „*Stetige Belastung, welche proportional der Abweichung ist*“ sein Modell erläutert. Er stellt die DGL. (16) auf und löst sie für einige „*isolierte Lasten*“. Er bemerkt, dass die Lösung nicht mehr gilt, „*wenn der Stab mit der Unterlage nicht fest verbunden ist, will indessen auf diesen Fall nicht eingehen*“ und schließt lediglich mit einem Hinweis auf eine (mögliche) „*Anwendung beim Langschwellsystem der Eisenbahnen*“. In den Vorträgen (Winkler, 1867b) geht er speziell auf die Bettung von Eisenbahnschwellen ein: „*Für die vorstehende Theorie mangelt es vorzüglich noch an der empirischen Bestimmung der (Bettungs-) Coefficienten.*“ Diese Schwachstelle besteht noch heute. Insgesamt ist zu folgern: Winkler verdient deutlicher zitiert zu werden.

#### 4 Der Einfluss der Länge des Ringbalkens

Das Aufziehen von Stahlreifen auf hölzerne Wagenräder gehört zwar weitgehend der Vergangenheit an, ist aber gleichwohl ein spezieller Fall zur Winklerschen Bettung: Felge und Speichen reagieren linear. Die Besonderheit: Die Druckspannung zwischen Reifen und Felge ergibt sich aus dem Untermaß des Reifens. Beim Aufziehen gibt nur das hölzerne Rad nach, nicht der stählerne Reifen. Danach ist der Radsatz allerdings so steif, dass er sich unter Last kaum verformt. Der Reifenumfang bleibt bei der Prozedur erhalten.

Im Unterschied dazu liegt bei dem hier beschriebenen System die Nachgiebigkeit nicht in der starren Scheibe, sondern in der Bettung im Zusammenspiel mit dem biegesteifen Radreifen. Wie beim Wagenrad bleibt wegen der großen Längssteifigkeit des Radreifens der Radumfang erhalten, nur wird der Reifen unter Last wellig. Schneidet man den Reifen auf und behält dabei das Verschiebungsfeld bei, so ergibt sich – im Gegensatz zum Wagenrad – kein Untermaß, sondern ein Übermaß im verformten Zustand. Das Übermaß muss durch eine mittlere, über dem Umfang konstante radiale Verschiebung kompensiert werden, die homogen verteilte radiale Zugkräfte zur Folge hat, im Ringbalken Normalkräfte (Druck) hervorruft, aber die Biegung nicht verändert. Dies wird jetzt berechnet, und zwar für das Verschiebungsfeld nach Gl. (20).

Ein Bogenelement (neutrale Linie des Ringbalkens) hat in Anlehnung an Gl. (1) die Bogenlänge

$$ds = (R + w(\varphi)) d\varphi = R d\varphi - w_0 \exp(-k\varphi) (\cos k\varphi + \sin k\varphi) d\varphi, \quad (23)$$

und Integration von 0 bis  $\pi$  liefert

$$S = R \pi - (w_0/k) [1 - \exp(-k\pi) \cos k\pi] \approx R \pi - w_0/k \quad \text{für } k > k_{\min}. \quad (24)$$

Die Bogenlänge des halben Ringbalkens ist und bleibt  $R\pi$ . Also muss das Verschiebungsfeld  $w(\varphi)$  um den konstanten Wert

$$w_m = w_0/(k\pi) \quad (25)$$

angehoben werden, um das Bogendekrement ( $-w_0/k$ ) auszugleichen. Für das Beispiel von Bild 1 ergibt sich mit  $k = 1,3$   $w_m = 0,24$   $w_0 \approx 0,18$  mm. Für  $\varphi = 0^\circ$  und  $\varphi = 180^\circ$  sind die Verschiebungen dann  $(-0,75 + 0,18)$  mm =  $-0,57$  mm resp.  $(0,02 + 0,18)$  mm =  $0,20$  mm. Die Biegeform bleibt davon unberührt.

Die Korrektur ist von 1. Ordnung und daher mit der elementaren Balkentheorie verträglich. Sie hat einen nicht unbedeutenden Einfluss auf das Verschiebungsfeld und sollte daher berücksichtigt werden.

#### 5 Der Einfluss der Richtung der Bettungskräfte

Ausgangspunkt ist wiederum das Verschiebungsfeld gemäß Gl. (20). Beim geraden Balken wirkt die Streckenlast  $q = -\beta w$  auf der (abgewickelten) Länge  $S = R\pi$  parallel. Die zugehörige resultierende Kraft ergibt sich durch Integration:

$$F/2 = \int_S (-\beta w) ds. \quad (26)$$

Man erhält, analog (24),

$$F/2 = R\beta w_0 (1/k) [1 - \exp(-k\pi) \cos k\pi] \approx R\beta w_0 (1/k) \quad \text{für } k > k_{\min}. \quad (27)$$

Das Bild ändert sich, wenn die Wirkungsrichtung der Bettungskraft berücksichtigt wird. Dann tritt an die Stelle von Gl. (26)

$$F/2 = \int_0^\pi (-\beta w) \cos\varphi R d\varphi, \quad (28)$$

mit Gl.(20) also

$$F/2 = R\beta w_0 \int_0^\pi [\exp(-k\varphi) (\cos k\varphi + \sin k\varphi)] \cos\varphi d\varphi. \quad (29)$$

Die Gln. (27) und (29) sind in Bild 2 ausgewertet. Für  $k > 1,5$  ist die Näherung (Gl. 27) genügend genau, im Bereich  $1,5 > k > 1,25$  sind die Abweichungen noch erträglich. Folgerung: Auch hier ist  $k = k_{\min} = 1,25$  ein Grenzwert, der nicht unterschritten werden sollte, wenn man die Winkler-Lösung zur Berechnung des Kreisbalkens heranzieht.

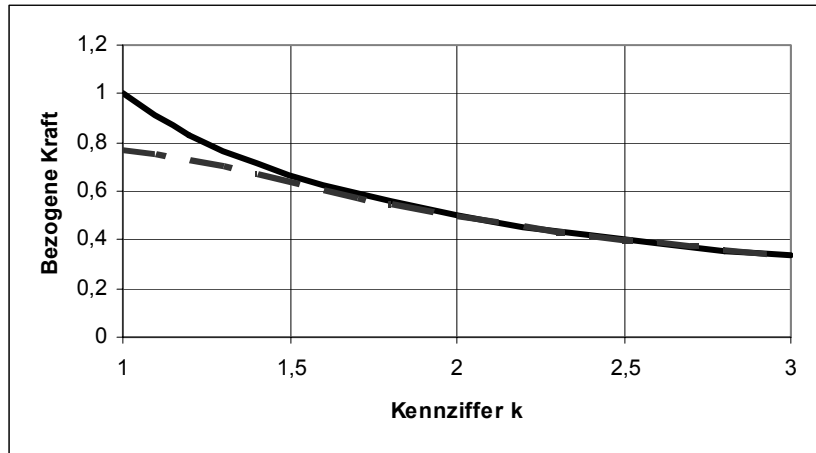


Bild 2. Bezogene Kraft  $f(k) = F/(2R\beta w_0)$ . Ausgezogene Linie: Gerader Balken, Gl. (27). Gestrichelte Linie: Ringbalken, Gl. (29),  $f_N(k)$ .

## 6 Der Einfluss der Schersteifigkeit der Bettung

Bei der Verformung des Reifens verschieben sich die Kontaktpunkte nicht nur radial, sondern auch tangential. Es kann vom Haften der Bettung an Radscheibe und Radreifen ausgegangen werden. Dann erfährt die Bettung eine Scherverformung, und wie bei der radialen Streckenlast  $q = -\beta w$  kann für die tangentialen Streckenlast

$$q_\varphi = -\beta_T u \quad (30)$$

angesetzt werden, mit  $u$  als Umfangsverschiebung und  $\beta_T$  als tangentialer Bettungskonstanten. Die Scherkräfte haben einen vernachlässigbar kleinen Hebelarm, weshalb sie nicht in das Biegemoment eingreifen. Die Winkler-Lösung für die Biegeverschiebung kann daher übernommen werden. Bei der Umfangsverschiebung  $u$  ist auch die Aufweitung  $w_m$  (Gl.(25)) zu berücksichtigen, so dass die Symmetriebedingung  $u(0^\circ) = 0 = u(180^\circ)$  erfüllt wird. Die zum Ermitteln von  $u$  notwendigen Schritte sind bereits vorbereitet: Tangentialverschiebung gemäß Gl. (24), dort Integration bis  $\pi$ , hier bis  $\varphi$ , Berücksichtigen der mittleren Aufweitung nach Gl. (25):

$$u(\varphi) = (w_0/k) \{ [1 - \exp(-k\varphi) \cos k\varphi] - \varphi/\pi \}. \quad (31)$$

Die Tangentialkraft trägt mit dem Anteil  $\sin\varphi$ , so dass durch Scherverformung die Last

$$F_T/2 = R\beta_T w_0 \int_0^\pi (1/k) \{ [1 - \exp(-k\varphi) \cos k\varphi] - \varphi/\pi \} \sin\varphi \, d\varphi \quad (32)$$

aufgenommen wird. Das Integral von Gl. (32) ist in Bild 3 ausgewertet. Für  $k > 1,25$  fällt

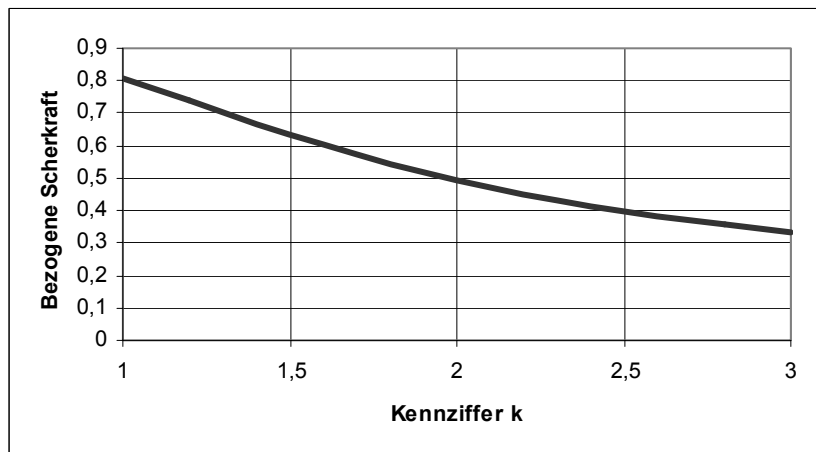


Bild 3. Bezogene Scherkraft  $f_T(k) = F_T/(2R\beta_T w_0)$

diese Kurve  $f_T(k)$  mit der in Bild 2 gestrichelt dargestellten Funktion  $f_N(k)$  für den Ringbalken mit radialer Bettung praktisch zusammen. Die Bettung trägt mithin durch Radialverformung und durch Scherverformung. Man erhält für die Gesamtlast die Beziehung (es gilt  $\beta = \beta_N$ )

$$F_{\text{ges}} = F_N + F_T = 2R w_0 f_T(k) [\beta_N + \beta_T]. \quad (33)$$

Bei einer Gummibettung kann etwa mit  $\beta_T = \beta_N/3$  gerechnet werden.

## Literatur

Knothe, K.; Böhmer, A.: Eschede – Bemerkungen zur Dauerfestigkeit von Eisenbahnradsätzen. *Internationales Verkehrswesen*, 50, (1998), 542-546.

Mahrenholtz, O.: Elastic Beam-like Ring on a Winkler Foundation. In: J.T. Katsikadelis; D.E. Beskos; E.E. Gdoutos, eds., *Recent Advances in Applied Mechanics*, NTU, Athens (2000), 214-219.

Wittenburg, J.: Mechanik fester Körper. In: H. Czichos, Hg., *HÜTTE – Die Grundlagen der Ingenieurwissenschaften (Abschnitt E)*, Springer, Berlin etc., (1989).

Knothe, K.: Persönliche Mitteilung vom 01.04.2004: *Hinweis auf zwei Buchpassagen zur „Winklerschen Bettung“*.

Winkler, E.: *Die Lehre von der Elasticitaet und Festigkeit mit besonderer Rücksicht auf ihre Anwendungen in der Technik, 1. Theil*. H. Dominicus, Prag, (1867a).

Winkler, E.: *Vorträge über Eisenbahnbau. Gehalten am königl. böhmischen polytechnischen Landesinstitute in Prag. Erstes Heft: Der Eisenbahn-Oberbau*. H. Dominicus, Prag, (1867b).

---

*Adresse:* Prof. em. Dr.-Ing. Oskar Mahrenholtz, Arbeitsbereich Mechanik und Merestechnik,  
Technische Universität Hamburg-Harburg, D-21071 Hamburg.  
e-mail: o.mahrenholtz@tu-harburg.de