

Beitrag zu den Festigkeitsverhältnissen von faserverstärkten Rollen beim reibungslosen Kontakt

J. Égert

In der Arbeit wird die reibungslose Kontaktaufgabe von faserverstärkten Rollen vorgestellt. Die gleich aufgebauten Rollen werden mit Einzelkräften zusammengepresst. Beide elastischen Rollen bestehen aus zwei Teilen: aus einem Metall- oder Laminat-Kern und einem Kunststoff-Ring, der mit zirkular verlaufenden Fasern verstärkt ist. In dem Artikel werden die mechanische und die Finite-Element (FE) Modellierung des Problems, des Weiteren der Lösungsalgorithmus der reibungslosen Kontaktaufgabe dargestellt. Die FE Berechnungen werden für unterschiedliche Kern-Materialien sowie für unterschiedliche radiale Dicken des Ringes vorgenommen. Die numerischen Ergebnisse für die Kontaktverhältnisse werden ausgewertet.

1 Einleitung

Beim Entwurf von Maschinenbauteilen ist die Masseinsparung eine der wichtigsten Aufgaben des Ingenieurs. Die Masse ist aus zwei Gesichtspunkten wichtig. Sie bestimmt die beiden Volumenkräfte - das Eigengewicht und die Trägheitskraft des Bauteiles:

$$\vec{G} = \int_{(V)} \vec{g} \rho dV, \quad \vec{F}_I = - \int_{(V)} \vec{a} \rho dV,$$

wobei V das Volumen des Bauteiles, ρ die Massendichte des Materials, \vec{g} die Gravitationsbeschleunigung und \vec{a} die Beschleunigung des Volumenelementes dV ist. Das Eigengewicht ist besonders bei Fahrzeugkonstruktionen von Bedeutung, wo man zur Bewegung von Mehrgewicht zusätzliche Energie (Kraftstoff) benötigt. Bedeutende Trägheitskräfte treten dort auf, wo das Bauteil großen Beschleunigungen unterworfen ist. In mechanischer Hinsicht können die beiden oben genannten Volumenkräfte auch zu erhöhten Beanspruchungen führen.

Heutzutage ist es üblich, die schweren metallischen Materialien durch solche faserverstärkten Kunststoffe zu ersetzen, die sehr gute Steifigkeits- und Festigkeitseigenschaften haben. In den meisten Fällen sind die Bauteile jedoch über eine Oberflächenberührung miteinander verbunden. Bei der Berührung können sehr große Spannungsspitzen an der Kontaktzone auftreten. Deshalb ist es notwendig zu untersuchen, wie die Anwendung von faserverstärkten Materialien die Kontaktverhältnisse dieser dadurch leichteren Bauteile beeinflusst. Die folgenden Untersuchungen sind ein Vorstudium zur Konstruktion leichter Zahnräder, wobei die Berührungsverhältnisse im normalen Betrieb eine bedeutende Rolle spielen.

Die Arbeit beinhaltet die Kontaktaufgabe zweier elastischer Kreisscheiben (Rollen), die aus einem inneren isotropen Kern und einem äusseren faserverstärkten Ring bestehen. Die Rollen werden durch Einzelkräfte zusammengepresst. Der Einfluss der oben erwähnten Volumenkräfte wird hier nicht untersucht. Untersucht wird aber, wie die Anwendung des faserverstärkten Materials die Kontaktverhältnisse beeinflusst. Die Kontaktverhältnisse werden für unterschiedliche Kern-Materialien sowie für unterschiedliche radiale Ringdicken analysiert. Dabei wird der äußere Durchmesser konstant gehalten. Bei zahlreichen Varianten werden die Masseinsparung, die Änderung der radialen Steifigkeit (die Annäherung der Mittelpunkte), die Spannungsverhältnisse in der Kontaktzone und das Versagenskriterium nach Huber - von Mises - Hencky, bzw. nach Tsai - Wu berechnet, verglichen und ausgewertet.

2 Aufgabenstellung

Das untersuchte Problem wird im Bild 1 dargestellt. Zwei Kreisscheiben mit gleichen Dimensionen und Materialeigenschaften werden durch Kräfte von $F = 100$ kN zusammengepresst. Die Reibung an den sich berührenden Oberflächen wird vernachlässigt.

Die Dicke der beiden Kreisscheiben ist $t = 16$ mm, der äußere Durchmesser der Scheiben ist konstant $D_a = 240$ mm und der Durchmesser des inneren Kerns ändert sich in sieben Stufen: $D_i = 240, 220, 200, 180, 160, 140, 120$ mm. Beide Scheiben enthalten zwei Teile: einen isotropen Kern und einen faserverstärkten orthotropen Ring.

Für das Kernmaterial wurden drei Varianten gewählt: Stahl, Aluminium und ein 8-schichtiges kohlenstofffaser-verstärktes Laminat, in dem die Schichten parallel zur Ebene der Scheiben liegen.

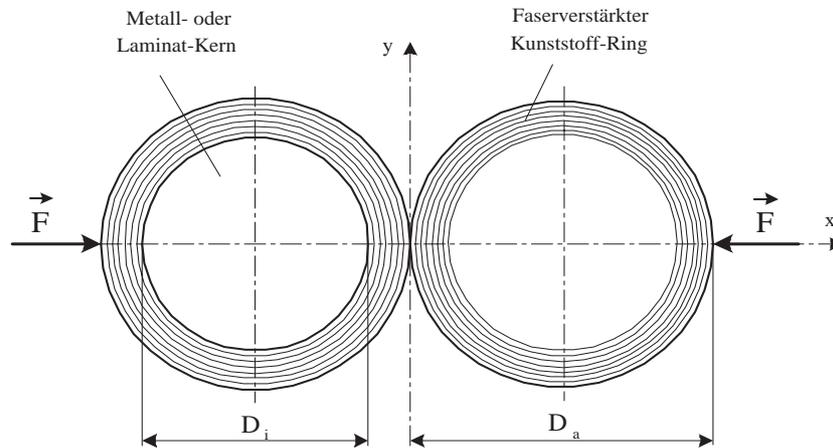


Bild 1. Die zusammengesetzten faserverstärkten Rollen

Der Aufbau des Laminats ist $[0^\circ/90^\circ/+45^\circ/-45^\circ]_S$, wobei die Ziffern die Richtung der Faser angeben und S bedeutet, dass der Aufbau symmetrisch ist. Die radiale Dicke des Ringes lässt sich mit dem Zusammenhang $d_R = (D_a - D_i)/2$ definieren. Der mit den Durchmessern D_i und D_a gebildete Ring besteht aus zirkular verlaufendem kohlenstofffaserverstärktem Kunststoff (CFK). Diese Art von Faserverstärkung kann mit einer Wicklungstechnik hergestellt werden. Die oben genannte Auslegungsvariante des CFK wurden deshalb angewendet und untersucht, weil die für die FE Berechnungen erforderlichen Material- und Festigkeitskonstanten nur für diese Auslegungsvariante zur Verfügung standen und weil deren Herstellungstechnologie verhältnismäßig einfach und naheliegend ist.

3 Die mechanische Modellierung

Da die Dicke t der Rollen wesentlich kleiner ist als der äußere Durchmesser, können die Bauteile (die gestellte Aufgabe) als verallgemeinerter ebener Spannungszustand modelliert werden.

Die Aufgabe weist in Hinsicht der Geometrie und auch der Belastung eine doppelte Symmetrie zu den Achsen x und y (Bild 1) auf. Durch die Ausnutzung der Symmetrie erhält man das im Bild 2 dargestellte Berechnungsmodell: eine halbe Kreisscheibe, die durch die Kraft $F/2$ gegen eine starre Ebene gedrückt wird. Um die Spannungsspitzen am Angriffspunkt der Einzelkraft $F/2$ zu vermeiden, die die reale Spannungsverteilung der Kontaktzone stören können, wurde die Einzelkraft durch eine äquivalente Linienlast von $f = F/2a$ mit $a = 27,5$ mm ersetzt.

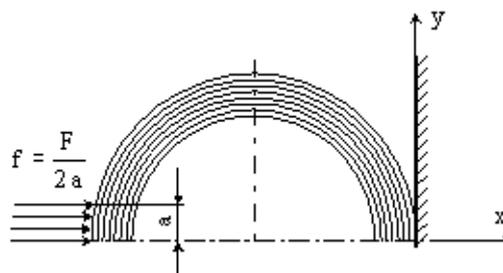


Bild 2. Das mechanische Modell der Kontaktaufgabe

Bei diesem Modell im Bild 2 muss unbedingt gewährleistet werden, dass die Punkte der halben Rolle auf der x -Achse auch nach der Deformation auf dieser Achse bleiben.

Das Kernmaterial wird in jedem Fall mit einem isotropen Stoffgesetz modelliert. Diese Annahme ist für Stahl und für Aluminium selbstverständlich. Das 8-schichtige “in-plane“ Laminat kann aber bei dem obigen Aufbau ebenfalls in makroskopischem Sinn in guter Näherung als isotrop betrachtet werden. Für den ebenen Spannungszustand kann das isotrope Stoffgesetz in folgender Form geschrieben werden:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}\sigma_y, \quad (1)$$

$$\varepsilon_y = -\frac{\nu}{E}\sigma_x + \frac{1}{E}\sigma_y, \quad (2)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}. \quad (3)$$

Im ebenen Spannungszustand gibt es auch eine zur Ebene senkrechte Dehnung ε_z . Sie kann aber mit den ebenen Spannungs- bzw. Dehnungskomponenten für den isotropen Fall folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y). \quad (4)$$

Für das Versagen von isotropen Bauteilen wird meistens das Kriterium nach Huber - von Mises - Hencky angewendet:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_F}\right)^2[(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_I - \sigma_{III})^2] \leq 1, \quad (5)$$

wobei σ_F die Fließgrenze des Materials und $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$ die Hauptspannungen sind.

Die erforderlichen Materialkoeffizienten sind in der Tabelle 1 zusammengestellt. In der Tabelle ist ϱ die Massendichte, E der Elastizitätsmodul, ν der Poissonsche Koeffizient, σ_F die Fließgrenze und σ_B die Zugfestigkeit.

Material	ϱ [kg/m ³]	E [GPa]	ν [-]	σ_F [GPa]	σ_B [GPa]
Stahl	7860	200	0,32	1180	1400
Aluminium	2800	75	0,33	260	530
Laminat	1600	20	0,30	-	1260

Tabelle 1. Materialeigenschaften der isotropen Materialien

Die zirkular verlaufende Faserverstärkung im CFK Ring kann als “unidirectional“ (UD) Verstärkung betrachtet werden, wenn man die sehr geringe Gewindesteigung der Wicklung vernachlässigt. Entsprechend Altenbach et al. (1996), Matthews et al. (2000) und Hyer (1998) kann ein UD verstärktes Material im makroskopischen Sinn mit einem orthotropen Materialgesetz modelliert werden. Für den ebenen Spannungszustand kann das Gesetz in folgender Form geschrieben werden:

$$\varepsilon_{\parallel} = \frac{1}{E_{\parallel}}\sigma_{\parallel} - \frac{\nu_{\parallel\perp}}{E_{\perp}}\sigma_{\perp}, \quad (6)$$

$$\varepsilon_{\perp} = -\frac{\nu_{\perp\parallel}}{E_{\parallel}}\sigma_{\parallel} + \frac{1}{E_{\perp}}\sigma_{\perp}, \quad (7)$$

$$\gamma_{\parallel\perp} = \frac{1}{G_{\parallel\perp}}\tau_{\parallel\perp}. \quad (8)$$

In den obigen konstitutiven Gleichungen bedeutet das Zeichen \parallel die zur Faserrichtung parallele Richtung und das Zeichen \perp die Richtung, die zur Faserrichtung senkrecht ist. Im orthotropen Materialgesetz (6) - (8) sind ε, γ die Komponenten des Verzerrungstensors, σ, τ die Komponenten des Spannungstensors, E_{\parallel}, E_{\perp} die Elastizitätsmoduli, $\nu_{\parallel\perp}, \nu_{\perp\parallel}$ die Poissonschen Koeffizienten und $G_{\parallel\perp}$ der Schubmodul in der Ebene.

Die zur Ebene senkrechte Dehnung ε_n kann hier ebenfalls mit den ebenen Spannungs- bzw. Dehnungskomponenten ausgedrückt werden:

$$\varepsilon_n = -\frac{\nu_{\parallel n}}{E_{\parallel}}\sigma_{\parallel} - \frac{\nu_{\perp n}}{E_{\perp}}\sigma_{\perp} = -\frac{\nu_{\parallel n} + \nu_{\perp n}\nu_{\perp\parallel}}{1 - \nu_{\parallel\perp}\nu_{\perp\parallel}}\varepsilon_{\parallel} - \frac{\nu_{\perp n} + \nu_{\parallel n}\nu_{\perp\parallel}}{1 - \nu_{\parallel\perp}\nu_{\perp\parallel}}\varepsilon_{\perp}. \quad (9)$$

Die Poissonschen Koeffizienten $\nu_{\parallel\perp}$, $\nu_{\perp\parallel}$ sind nicht unabhängig voneinander. Aus Energiebetrachtungen heraus besteht der Zusammenhang:

$$\frac{\nu_{\perp\parallel}}{E_{\parallel}} = \frac{\nu_{\parallel\perp}}{E_{\perp}}. \quad (10)$$

Das Versagen bei Faserverbunden ist komplizierter als bei isotropen Materialien. In den meisten Fällen liefert das Kriterium von Tsai-Wu sehr gute Ergebnisse. Für den ebenen Spannungszustand kann das Kriterium in der folgenden Form geschrieben werden:

$$\frac{\sigma_{\parallel}^2}{\sigma_{Z\parallel}\sigma_{D\parallel}} + \frac{\sigma_{\perp}^2}{\sigma_{Z\perp}\sigma_{D\perp}} - \frac{\sigma_{\parallel}\sigma_{\perp}}{\sqrt{\sigma_{Z\parallel}\sigma_{D\parallel}\sigma_{Z\perp}\sigma_{D\perp}}} + \frac{\tau_{S\parallel\perp}^2}{\tau_{S\parallel\perp}^2} + \left(\frac{1}{\sigma_{Z\parallel}} - \frac{1}{\sigma_{D\parallel}}\right)\sigma_{\parallel} + \left(\frac{1}{\sigma_{Z\perp}} - \frac{1}{\sigma_{D\perp}}\right)\sigma_{\perp} \leq 1, \quad (11)$$

wobei $\sigma_{Z\parallel}$ und $\sigma_{Z\perp}$ die Zugfestigkeiten, $\sigma_{D\parallel}$ und $\sigma_{D\perp}$ die Druckfestigkeiten und $\tau_{S\parallel\perp}$ die Schubfestigkeit des Materials sind.

Die Tabelle 2 enthält die Massendichte ρ , die zum orthotropen Materialgesetz erforderlichen Materialkoeffizienten E_{\parallel} , E_{\perp} , $\nu_{\perp\parallel}$, $G_{\parallel\perp}$, den Faservolumengehalt V_f in % des CFK Ringes und die zu dem Versagenskriterium nötigen Festigkeitswerte $\sigma_{Z\parallel}$, $\sigma_{Z\perp}$, $\sigma_{D\parallel}$, $\sigma_{D\perp}$, $\tau_{S\parallel\perp}$:

ρ [kg/m ³]	E_{\parallel} [GPa]	E_{\perp} [GPa]	$\nu_{\perp\parallel}$ [-]	$G_{\parallel\perp}$ [GPa]	V_f [%]	$\sigma_{Z\parallel}$ [MPa]	$\sigma_{Z\perp}$ [MPa]	$\sigma_{D\parallel}$ [MPa]	$\sigma_{D\perp}$ [MPa]	$\tau_{S\parallel\perp}$ [MPa]
1640	138	9	0,28	7	66	1600	50	1260	260	120

Tabelle 2. Materialeigenschaften des kohlenstofffaserverstärkten Materials

Der makroskopische Sinn bedeutet bei der Anwendung des orthotropen Materialgesetzes, dass die Verzerrungen und Spannungen in den Gleichungen (6) - (9) nicht den Zustand der Fasern oder des Matrixmaterials charakterisieren, sondern die Festigkeitseigenschaften eines bestimmten Gebietes des Verbundwerkstoffes angeben, das genügend viele Fasern enthält.

4 Die FE Modellierung und Diskretisierung

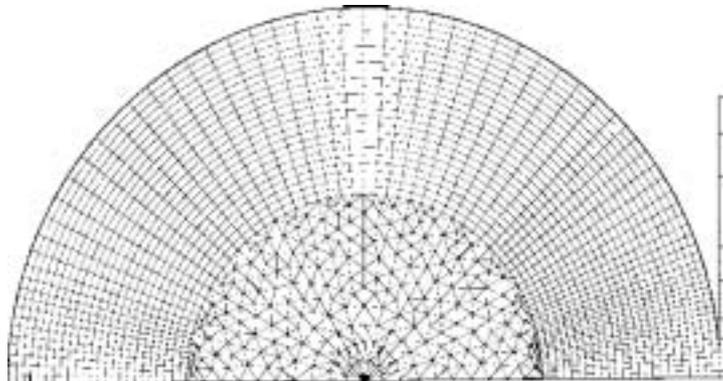


Bild 3. Die FE Unterteilung der Aufgabe

Die FE Berechnungen wurden mit dem Programmsystem SYSWORLD 2000 (SYSWORLD, 2000) durchgeführt. Die halbe Rolle und die starre Abstützung wurden in drei- und viereckige isoparametrische 2D Elemente unterteilt (Bild 3). Die Kontaktzone der Unterteilung ist im Bild 4a zu sehen. Der Elementstreifen für die Modellierung der

starrten Abstützung ist nur ein Hilfsmittel für die FE Berechnung. Deshalb reicht es aus, in Querrichtung nur ein Element zu wählen. Für alle Berechnungsversionen wurde dieselbe FE Unterteilung genutzt, die alle möglichen inneren Durchmesser D_i enthält. So musste man bei den Berechnungsversionen nur die Materialeigenschaften der betreffenden Teilringe modifizieren.



Bild 4. Die FE Unterteilungsvarianten der Kontaktzone

Für die Befriedigung der Symmetrie-Randbedingungen wurde $u_y = 0$ in jedem Knotenpunkt auf der x -Achse vorgeschrieben. Die Starrheit der ebenen Unterstüzung kann ebenfalls mit kinematischen Randbedingungen gewährleistet werden. Dazu wird in jedem Knotenpunkt an der linken Randlinie des Elementstreifens, die die starre Unterstüzung modelliert, $u_x = u_y = 0$ gesetzt.

Für die Modellierung des orthotropen Ringes wurden ausschließlich viereckige Elemente angewendet. Die Material-Hauptachsen der Orthotropie \parallel, \perp wurden im lokalen Koordinatensystem der Elemente angegeben. In der Kontaktzone und an der Angriffslinie der Belastung erwartet man höhere Spannungs- und Verzerrungsgradienten, deshalb ist es notwendig, das FE-Netz in diesen Gebieten wesentlich zu verfeinern.

Zur Kontrolle der Genauigkeit der FE Lösung haben wir die Kontaktaufgabe Stahlrolle-starre Unterstüzung auch mit einem feinerem Netz gelöst (Bild 4.b). Die Verfeinerung beschränkte sich aber nur auf die potenzielle Kontaktzone. Dieses feinere Netz haben wir aus dem ursprünglichen Netz (Bilder 3 und 4a) erzeugt, sodass statt 15 Elementen 25 Elemente in tangentialer Richtung in der potenziellen Kontaktzone verwendet wurden (Bild 4b). Die Berechnungsergebnisse für die maximalen Spannungswerte sind in Tabelle 3 zusammengefasst. Die Richtungen x und y sind im Bild 2 zu sehen und σ_{vmax} ist die Vergleichsspannung nach Huber - von Mises - Hencky.

Netz	σ_{xmax} [MPa]	σ_{ymax} [MPa]	τ_{xymax} [MPa]	σ_{vmax} [MPa]
Bild 4a	-1134	-666	-316	1127
Bild 4b	-1173	-715	-347	1164

Tabelle 3. Maximale Spannungswerte mit unterschiedlich feinem FE Netz.

Da der Unterschied bei den maximalen Spannungswerten in der Tabelle 3 unter 10% liegt, wurde die Genauigkeit der FE Berechnungen mit dem Netz im Bild 4a für die weiteren Berechnungen als ausreichend gut beurteilt.

5 Die Lösung der Kontaktaufgabe unter Anwendung von Kontaktelementen

Für die Simulation der Kontaktbedingungen wurden spezielle Linien-Kontaktelemente angewendet, die sich der 2D FE Verteilung anpassen. Die Erfüllung der Kontaktbedingungen und die Lösung der Kontaktaufgabe sind durch einen entsprechenden inkrementellen iterativen Algorithmus erfolgt.

Eine ausführliche Beschreibung von Kontaktelementen und inkrementellen iterativen Kontaktalgorithmen ist u.a. bei Égert (1991, 2000) zu finden. Hier werden nur die wichtigsten Merkmale dieser Elemente und Algorithmen kurz zusammengefasst.

Die reibungslose Kontaktaufgabe zweier linear elastischer Körper (Bild 5) ist ein nichtlineares Problem. Die Nichtlinearität folgt daraus, dass die Kontaktfläche nicht von vornherein bekannt ist. Bei nichtlinearen Aufgaben bildet die inkrementelle Form des Prinzips der virtuellen Verrückungen die Grundlage der FE Lösung. Für den Körper A (und auch für B) gilt das Prinzip in der Form

$$\int_{(V^A)} \Delta \mathbf{T} \cdot \cdot \delta(\Delta \mathbf{A}) dV + \int_{(A_c)} \Delta \mathbf{p} \cdot \delta(\Delta \mathbf{u}) dA = \int_{(V^A)} \Delta \mathbf{q} \cdot \delta(\Delta \mathbf{u}) dV + \int_{(A_f^A)} \Delta \mathbf{f} \cdot \delta(\Delta \mathbf{u}) dA, \quad (12)$$

wobei \mathbf{T} der Spannungstensor, \mathbf{A} der Verzerrungstensor, \mathbf{p} der Kontakt-Flächenlastvektor, \mathbf{q} der Volumenlastvektor, \mathbf{f} der Flächenlastvektor, \mathbf{u} der Verschiebungsvektor, die Bezeichnung \cdot das Skalarprodukt, $\cdot \cdot$ das doppelte Skalarprodukt bedeuten. δ kennzeichnet die Variation und Δ die inkrementellen Größen.

Das zweite Glied auf der linken Seite der Gleichung (12) erscheint nur bei reibungslosem Kontakt an der realen Kontaktfläche A_c der Körper. In dem Prinzip (12) sind neben den Verschiebungen $\Delta \mathbf{u}$ auch noch die reale Kontaktfläche A_c und die Kontakt-Flächenlasten $\Delta \mathbf{p}$ unbekannt.

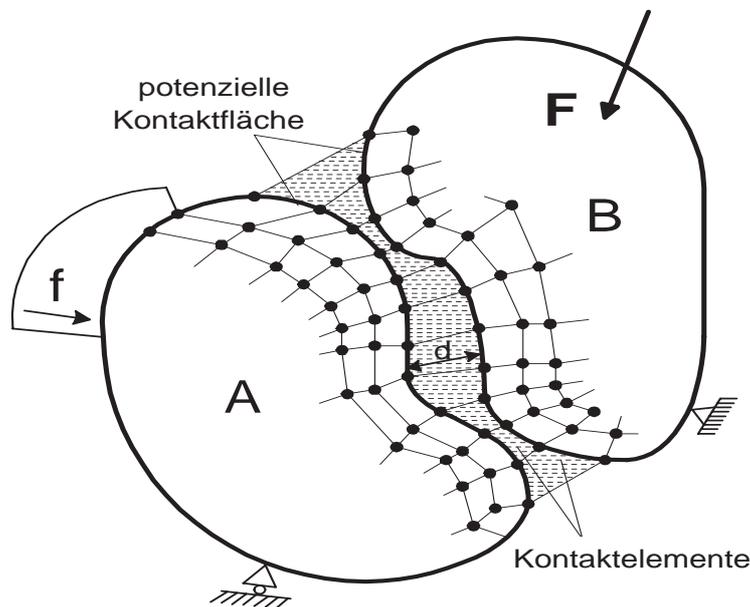


Bild 5. Kontaktaufgabe zweier elastischer Körper

Unter Kontaktelementen versteht man fiktive finite Elemente mit besonderen Materialeigenschaften, die die Kontaktbedingungen zwischen den sich berührenden Körpern simulieren müssen. Die Kontaktelemente müssen auf dem möglichen Kontaktgebiet der zu untersuchenden Konstruktion angenommen werden (Bild 5). Diese speziellen Elemente dürfen die Festigkeitsverhältnisse der Körper nicht beeinflussen. Sie sollen lediglich die mathematische Behandlung des Problems fördern.

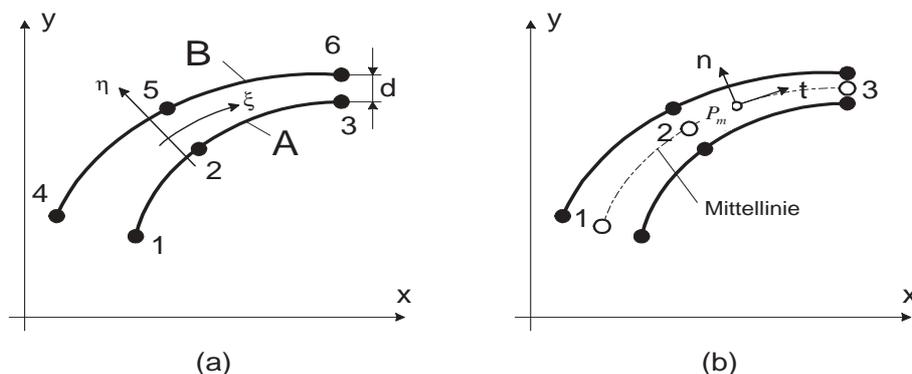


Bild 6. Das Linien-Kontaktelement für 2D Untersuchungen

Die Linien-Kontaktelemente bestehen aus zwei Linien (Bild 6), deren Abstand $d(\xi)$ ist. Die Größe d ist das Anfangsspiel zwischen den sich berührenden Körpern. Wenn d während der Deformation verschwindet, wird das Element als geschlossen (der Fall der Berührung), und wenn d unter der Belastung größer als Null ist, als geöffnet (keine Berührung) bezeichnet.

Im geöffneten Fall gibt es keine Verbindung zwischen den Oberflächen A und B . Im geschlossenen Fall wird aber vorausgesetzt, dass die inneren Kräfte des Elementes zu den relativen Verschiebungen zwischen den Oberflächen A und B proportional sind. Die Proportionalitätskoeffizienten werden Normalsteifigkeit k_n und Tangentialsteifigkeit k_t genannt. Aus diesen Steifigkeiten kann die "Matrix der Werkstoffkoeffizienten" des Kontaktelementes aufgebaut werden. Der i, j -te Block dieser Matrix lautet:

$$\mathbf{C}_{ij} = \begin{bmatrix} k_t & 0 \\ 0 & k_n \end{bmatrix}_{ij}. \quad (13)$$

Während der Kontakt-Iteration werden die Steifigkeiten k_n und k_t so lange modifiziert, bis die Kontaktbedingung erfüllt ist. Im reibungslosen Fall ist natürlich k_t immer Null. Die Steifigkeitsmatrix des Kontaktelementes \mathbf{K}_c^e kann in der üblichen Weise, z.B. nach der isoparametrischen Konzeption, aufgebaut werden.

Die leistungsfähige Anwendbarkeit der Kontakt-Iterationsmethoden erfordert die Benutzung der Substrukturtechnik. Die FE Grundgleichung für das aus den Körpern A und B (Bild 5) bestehende System kann für das i -te Lastinkrement $\Delta \mathbf{f}^i$ in der folgenden Form geschrieben werden:

$$(\mathbf{K}_{AB} + \mathbf{K}_c) \Delta \mathbf{q}^i = \Delta \mathbf{f}^i \quad (14)$$

wobei \mathbf{K}_{AB} die kondensierte Steifigkeitsmatrix der Körper A und B , \mathbf{K}_c die Steifigkeitsmatrix der Kontaktelemente und $\Delta \mathbf{q}^i$ das i -te Knotenverschiebungsinkrement der Hyperstruktur sind.

Im ersten Iterationsschritt kann man die Steifigkeiten k_n der Kontaktelemente theoretisch beliebig annehmen.

$$(\mathbf{K}_{AB} + \mathbf{K}_{c_0}) \Delta \mathbf{q}_0^i = \Delta \mathbf{f}^i \quad (15)$$

wobei \mathbf{K}_{c_0} die Anfangssteifigkeitsmatrix der Kontaktelemente ist.

Mit Hilfe der aus dem Gleichungssystem (15) berechneten Größe \mathbf{q}_0^i wird die Erfüllung der Kontaktbedingungen kontrolliert. Dem Kontrollergebnis entsprechend werden die Steifigkeitsmatrizen der Kontaktelemente modifiziert:

$$(\mathbf{K}_{AB} + \mathbf{K}_{c_0} + \mathbf{K}_{c_1}) \Delta \mathbf{q}_1^i = \Delta \mathbf{f}^i \quad (16)$$

wobei mit \mathbf{K}_{c_1} das Modifikationsglied bezeichnet wird.

Im $j + 1$ -ten Iterationsschritt lässt sich das Knotenverschiebungsinkrement in der Form

$$\Delta \mathbf{q}_j^i = (\mathbf{K}_{AB} + \mathbf{K}_{c_0} + \mathbf{K}_{c_1} + \dots + \mathbf{K}_{c_j})^{-1} \Delta \mathbf{f}^i \quad (17)$$

berechnen.

6 Berechnungsvarianten und numerische Ergebnisse

Die gestellte Aufgabe wurde in 21 FE Berechnungsvarianten für drei unterschiedliche Kernmaterialien: Stahl, Aluminium, Laminat und für jedes Kernmaterial in sieben radialen Dickenvarianten des faserverstärkten Ringes gelöst.

Tabelle 4 veranschaulicht die Gewichtseinsparung für die untersuchten 21 Berechnungsvarianten. Zum Beispiel ist aus der Tabelle ersichtlich, dass das Gewicht einer Rolle mit Aluminiumkern und mit einem faserverstärkten Ring von $D_i = 200$ mm nur 31 % der vollständigen Stahlrolle beträgt. Durch die Anwendung des faserverstärkten Ringes mit wachsender radialer Dicke erhält man bei dem Stahl-Kern infolge des großen Unterschiedes der Massendichte ρ von Stahl und CFK eine wesentliche Masseverminderung. Mit der Anwendung eines Laminatkernes kann man unabhängig von der radialen Dicke des Ringes ungefähr 80 % Gewichtseinsparung (Masseneinsparung) erreichen. Die Massendichte des Laminats und CFK sind näherungsweise gleich. Deshalb ändert sich die Einsparung mit der Erhöhung der radialen Dicke des CFK Ringes beim Laminat-Kern nicht.

Durchmesser des Kernes D_i [mm]	Stahlkern [-]	Aluminiumkern [-]	Laminatkern [-]
240	1,00	0,36	0,20
220	0,87	0,33	0,20
200	0,76	0,31	0,21
180	0,65	0,29	0,21
160	0,56	0,27	0,21
140	0,48	0,26	0,21
120	0,40	0,25	0,21

Tabelle 4. Das auf die Stahlrolle bezogene spezifische Gewicht der faserverstärkten Rolle

Bild 7 charakterisiert die Änderung der radialen Steifigkeit der Rolle. Die wachsende radiale Dicke des Ringes beeinflusst die Annäherung der Rollen-Mittelpunkte, besonders bei einem Stahl- und einem Aluminiumkern, die in radialer Richtung bedeutend steifer sind als der CFK Ring, in wesentlichem Maße. Bei einem Laminatkern ist der Einfluss nicht so groß, weil dieser Aufbau schon im Anfangszustand viel weicher ist als die Konstruktionen mit Metallkern. Im Bild 7 kann man allgemein feststellen, dass sich bei einem Ersatz von Metallteilen durch CFK in der oben beschriebenen Art und Weise (Gewichtseinsparung) eine bemerkenswerte radiale Steifigkeitsänderung ergibt.

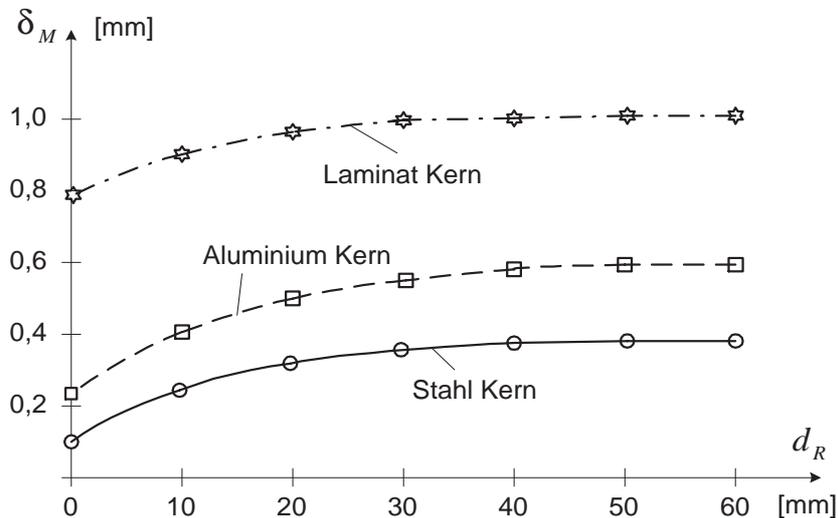


Bild 7. Die Verschiebungen des Rollen-Mittelpunktes δ_M in Abhängigkeit von der radialen Dicke des CFK Ringes

Die Bilder 8-10 veranschaulichen den Einfluss der radialen Ringdicke auf den Spannungszustand in der Kontaktzone. Die Spannungskomponentenmaxima sind negativ. Deshalb wurden in den Bildern die Absolutwerte dargestellt. Das Spannungskomponentenmaximum $|\sigma_{x \max}|$ entspricht in diesem Fall dem größten Kontaktdruck p_{\max} , der bei isotropem Material ($d_R = 0$) immer die dominierende Rolle spielt. Die dominierende Rolle bedeutet, dass der Kontaktdruck p_{\max} sowohl die Größe der Vergleichsspannung $\sigma_{v \max}$ als auch die Verteilung der Vergleichsspannungen eindeutig bestimmt. Das Spannungskomponentenmaximum $|\sigma_{y \max}|$ entspricht dem tangentiellen Normalspannungsmaximum $|\sigma_{\varphi \max}|$ in der Kontaktzone. Die großen negativen tangentiellen Normalspannungen $\sigma_{\varphi \max}$ sind im UD CFK Ring besonders ungünstig, weil sie dort in den Fasern eine große Druckbeanspruchung erregen. Diese große Druckbeanspruchung kann zur Ausbeulung der Fasern in senkrechter Richtung zur Scheibenebene führen. In radialer Richtung kann die Ausbeulung mit Sicherheit nicht erfolgen, weil sie durch die am Kontaktgebiet entstehenden großen radialen Druck-Normalspannungen blockiert wird. In der Kontaktzone entstehen aber große positive Dehnungen ε_n senkrecht zur Ebene nach Gleichung (9), die die Ausbeulung senkrecht zur Ebene fördern. Die Knickgefahr kann man mit Hilfe der Herstellungstechnologie (der Wickeltechnik) vermindern, weil man dabei in den Fasern Zugvorspannungen herstellen kann.

Das Schubspannungsmaximum $\tau_{xy \max}$ ist immer wesentlich kleiner als das Maximum der Normalspannungskomponenten $|\sigma_{x \max}|$ und $|\sigma_{y \max}|$. Bei jedem Kernmaterial (Bild 8-10) vermindert sich der maximale Kontaktdruck $p_{\max} = |\sigma_{x \max}|$ mit der wachsenden radialen Ringdicke am Anfang bedeutend und später bleibt er bei einem kleineren Wert praktisch konstant.

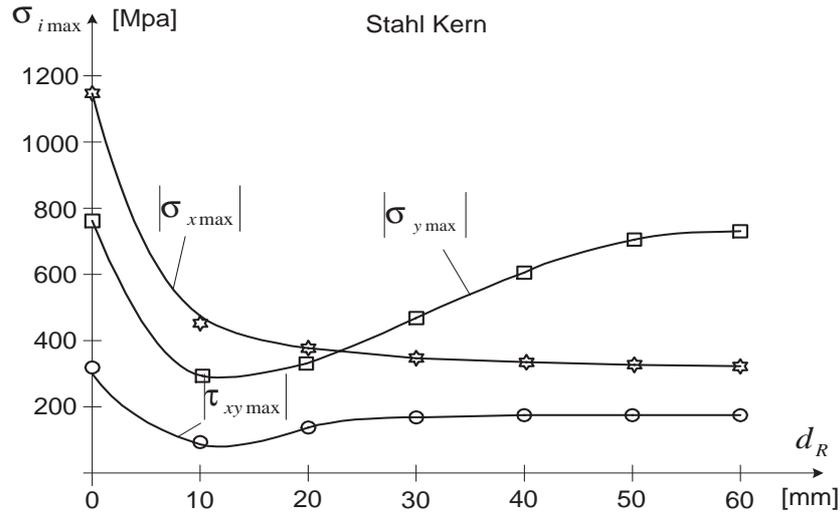


Bild 8 Die Änderung der maximalen Spannungswerte für den Stahlkern in Abhängigkeit von der radialen Ringdicke

Bei einem Stahlkern (Bild 8) erhöht sich die Normalspannung $|\sigma_{y \max}|$ - nach einem kurzen starken Abfall - mit der radialen Ringdicke monoton. Bei größeren Ringdicken ist die Normalspannung $|\sigma_{y \max}|$ die größte Spannungskomponente in der Kontaktzone. Aus Bild 8 ist zu entnehmen, dass der Spannungszustand für kleinere radiale Ringdicken günstiger ist als für größere.

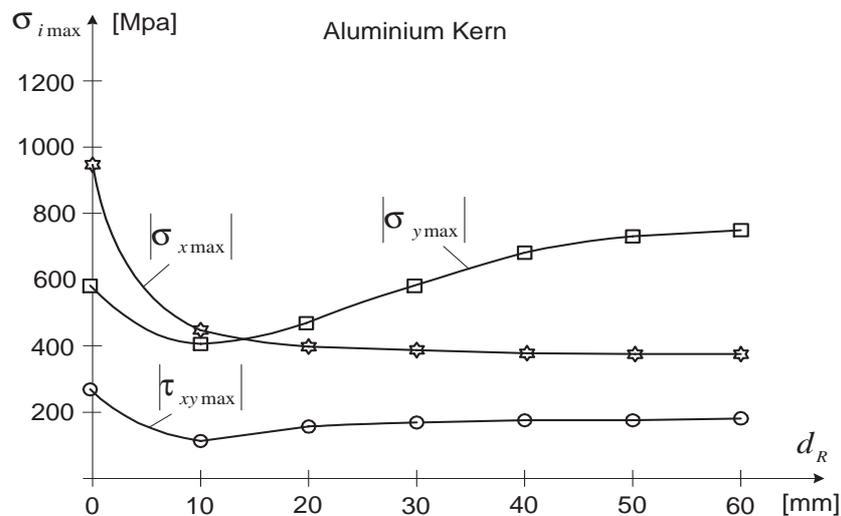


Bild 9. Die Änderung der maximalen Spannungswerte für den Aluminiumkern in Abhängigkeit von der radialen Ringdicke

Bei einem Aluminiumkern (Bild 9) ergibt sich für die Abhängigkeit der Spannungskomponenten von der radialen Ringdicke ein ähnlicher Verlauf wie bei dem Stahlkern. Der maximale Kontaktdruck $p_{\max} = |\sigma_{x \max}|$ vermindert sich mit wachsender radialer Ringdicke am Anfang bedeutend und bleibt später praktisch konstant. Die tangentielle Normalspannung $|\sigma_{y \max}|$ vermindert sich am Anfang; aber später überschreitet sie in bedeutendem Maße ihren Anfangswert und wird zur größten dominierenden Spannungskomponente. Auch hier kann man feststellen, dass der Spannungszustand für kleinere radiale Ringdicken günstiger erscheint, als für größere.

Bei einem Laminatkern (Bild 10) vermindert sich zwar der maximale Kontaktdruck $p_{\max} = |\sigma_{x \max}|$, die Verminderung ist aber nicht so ausgeprägt wie bei den beiden früheren Fällen. Die Normalspannung $|\sigma_{y \max}|$ erhöht sich mit wachsender radialer Ringdicke am Anfang bedeutend und bleibt später bei einem größeren Wert praktisch konstant. Für diesen Fall kann man zusammenfassend feststellen, dass die Maxima der Spannungskomponenten von den Ringdicken praktisch nicht abhängen.

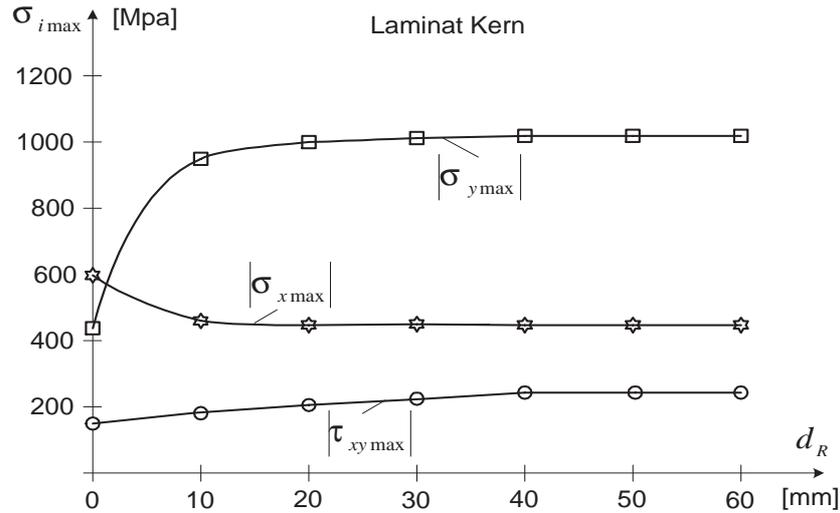


Bild 10. Die Änderung der maximalen Spannungswerte für den Laminatkern in Abhängigkeit von der radialen Ringdicke

Tabelle 5 fasst die Versagenskriterienmaxima in der Kontaktzone (den maximalen Wert der linken Seite der Kriterien (5) und (11)) für die untersuchten Kernmaterial- und Ringdickenvarianten zusammen. Für den isotropen Fall ($D_i = 240$ mm) wurde das Kriterium nach Huber - von Mises - Hencky (5) mit den Festigkeitswerten der Tabelle 1 und für die faserverstärkten Fälle ($D_i = 220, 200, 180, 160, 140, 120$ mm) das Kriterium nach Tsai - Wu (11) mit den Festigkeitswerten der Tabelle 2 benutzt. Im Falle des Laminats wurde die Zugfestigkeit σ_B statt der Fließgrenze σ_F im Kriterium von Huber - von Mises - Hencky verwendet.

Durchmesser des Kernes D_i [mm]	Stahlkern [-]	Aluminiumkern [-]	Laminatkern [-]
240	0,947	3,238	0,428
220	-0,429	0,136	7,234
200	-0,116	0,339	7,351
180	0,996	0,627	7,486
160	1,926	1,735	7,603
140	2,553	2,841	7,782
120	2,880	3,682	7,831

Tabelle 5. Die Versagenskriterienmaxima in der Rolle

Für die faserverstärkten Fälle ($D_i = 220 - 120$ mm) tritt der maximale Kriteriumswert immer im Ring auf. Der Einfluss des Kontaktes bleibt also immer im faserverstärkten Ring.

In der Tabelle 5 sieht man eindeutig, dass die zirkuläre Faserverstärkung für den Laminatkern ungünstig ist. Bei den Metall-Kernen ergibt sich eine ganz andere Situation. Die reine Stahlrolle kann die Belastung ertragen und das ändert sich auch für die kleineren Ringdicken ($D_i = 220 - 180$ mm) nicht. Bei größeren Ringdicken verliert aber die Rolle ihre Tragfähigkeit. Bei einer reinen Aluminiumrolle tritt dann der Versagensfall ein. Für kleinere Ringdicken ($D_i = 220 - 180$ mm) erhält aber die Rolle mit dem Aluminiumkern die Tragfähigkeit zurück. Für größere Ringdicken ergeben sich ähnliche Verhältnisse wie bei der Rolle mit dem Stahlkern.

Zusammenfassend kann man feststellen, dass die zirkuläre Faserverstärkung bei den Kernen aus Stahl und Aluminium bis zu einer bestimmten Ringdicke eine günstige Wirkung hat, d.h. sie verbessert oder erhält zumindest die Tragfähigkeit der Rolle.

Der untersuchte Fall ist nicht die einzig mögliche Lösung für die Auslegung der Faserverstärkung an der Rolle. Z.B. die Anordnung von Fasern in radialer Richtung im Ring (neben den zirkular verlaufenden) kann die Kontaktverhältnisse voraussichtlich günstig modifizieren. Die Klärung des Einflusses von anderen Faseranordnungen erfordert aber weitere ausführliche Untersuchungen.

7 Schlussfolgerungen

Es wird die Kontaktaufgabe zweier Rollen, die an der Oberfläche aus Gewichtseinsparungsgründen einen in zirkularer Richtung faserverstärkten Ring mit variabler radialer Dicke haben, gelöst. Es wurde gezeigt, dass die Anwendung des faserverstärkten Ringes mit variabler radialer Dicke zwar eine wesentliche Masseeinsparung ermöglicht, aber sie führt zu einer bemerkenswerten Änderung der Festigkeitsverhältnisse in der Kontaktzone. Die zirkular verlaufende Anordnung der Fasern im Ring ist bei dem Laminatkern eindeutig ungünstig. Bei einem Stahl- und einem Aluminiumkern wurde aber je ein "optimaler" radialer Dickenbereich für den Ring gefunden, bei dem die Tragfähigkeit der Rolle besser wird.

Literatur

- Altenbach, H.; Altenbach, J.; Rikards, R.: *Einführung in die Mechanik der Laminat- und Sandwichtragwerke*. Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Stuttgart (1996).
- Égert, J.: *Lösung von ebenen und räumlichen Kontaktproblemen mit Hilfe spezieller finiter Kontaktelemente*. Dissertation, Otto von Guericke Universität Magdeburg (1991).
- Égert, J.: Comparison of some contact elements and iterative algorithms for the solution of frictionless contact problems. *Journal of Computational and Applied Mechanics*, 1, 1, (2000), 23 – 36.
- Hyer, M. W.: *Stress analysis of fiber reinforced composite materials*. McGraw-Hill, Boston (1998).
- Matthews, F. L.; Davies, G. A.; Hitchings, D.; Soutis, C.: *Finite element modelling of composite materials and structures*. Woodhead Publ. Ltd., Cambridge, England (2000).
- SYSWORLD: *Users's Guide of SYSWORLD 2000 Finite Analysis System*. ESI Group, Frankreich (2000).

Address: Dr. habil. János Égert, Lehrstuhl für Allgemeinen Maschinenbau, Széchenyi István Universität Győr, Egyetem tér 1., H-9026 Győr, Ungarn.
e-mail: egert@rs1.sze.hu