TECHNISCHE MECHANIK, Band 23, Heft 2-4, (2003), 83-91
Manuskripteingang: 08. Mai 2003

Die Bewegungsgesetze Newtons und Lorentz-Einsteins als Konsequenz eines Materialgleichungs-Ansatzes

R. Trostel

Als eine Reverenz an das allseits bekannte Engagement für die Materialtheorie, das den leider zu früh verstorbenen Jürgen Olschewski (1946-2002) auszeichnete, soll der folgende Beitrag verstanden werden, mit dem der Verfasser die These vertritt, dass letztlich auch das Newtonsche Bewegungsgesetz und Dasjenige von Lorentz-Einstein Materialgesetze seien. Und dass dergestalt der Erhalt von „Bewegungsgleichungen" als Resultat der Gleichsetzung jeweils zweier (in den Kräften expliziten) Materialgleichungen aufzufassen wäre[1], also die üblicherweise vorgenommene Unterscheidung zwischen „universellen Bilanzgleichungen" (etwa des Impulses) und den Gleichungen der „eigentlichen Materialtheorie" entfiele, weil eben auch die Ersteren „materialtheorietechnisch" zu fundieren und daher letztlich nur insofern als „universell" zu bezeichnen sind, als jeder Struktur die Entität „Masse" zugeordnet werden muss.

Die These des Materialgleichungscharakters der o. g. Bewegungsgesetze ist schon in Trostel (1981, 1982) erwogen worden und stellte sich dort als Folge einer Materialgleichungs-Annahme für die sog. kinetische bzw. Körperenergie dar[2], indem ein Inertialrahmenbeobachter (B_K) die Körperenergie ($\overset{(K)}{K}$ (P, t)) einer punktuellen Struktur (P) in der Form

$$\overset{(K)}{K}(P,t) = \mathcal{K}^{**}\,\overset{(\mathbf{K})}{\mathbf{v}}(P,t) \equiv \mathcal{K}^{*}\langle\, |\overset{(\mathbf{K})}{\mathbf{v}}(P,t)| \;\equiv \mathcal{K}\langle\, \overset{(\mathbf{K})}{\mathbf{v}}{}^{2}(P,t)\;, \tag{1}$$

d.h. als universelle (isotrope) Zustandsfunktion ($\mathcal{K}^{**}$, $\mathcal{K}^{*}$ bzw. $\mathcal{K}$) der von ihm registrierten Struktur-Geschwindigkeit ($\overset{(\mathbf{K})}{\mathbf{v}}$ (P, t)) identifizieren können soll. Dabei wird betreffend die Universalität mit dem (Einsteinschen) Forminvarianzprinzip, und betreffend die Isotropie mit der Inertialrahmen-Definition argumentiert, wonach ein diesbezüglicher Beobachter keine ausgezeichneten (etwa Gravitations-) Richtungen wahrnehmen dürfe.

Obwohl die in Trostel (1981, 1982) und Trostel (in Vorbereitung) dargestellten Analysen zeigen, dass sich die Konkretisierung von (1) zuzüglich die Frage nach den Inertialrahmen-Transformationen strenggenommen nur als Gesamtkomplex behandeln lassen, soll nachfolgend eine vereinfachte Reduktionsweise auf die bekannten Beziehungen

$$\overset{(K)}{K}(P,t) = m_P\, \overset{(\mathbf{K})}{\mathbf{v}}{}^{2}(P,t)/2 \;\text{ bzw. }\; \overset{(K)}{K}(P,t) = m_P\, c^2\, \overset{(K)}{\varsigma}(P,t) \;\text{ mit }\; \overset{(K)}{\varsigma}(P,t) = \{1-(\overset{(\mathbf{K})}{\mathbf{v}}(P,t)/c)^2\}^{-1/2} \tag{2a-c}$$

mit der Vakuum-Lichtgeschwindigkeit (c) referiert werden, indem man die Inertialrahmen-Transformationen von Galilei bzw. Lorentz als bekannt voraussetzt, was dann übrigens den Vorteil hat, die Körperenergie-Formeln „als transformationstheoretische Konsequenzen" verdeutlichen zu können.

Der einprägsamste Nachweis der Formel (2a) für die kinetische Energie der klassischen Punktmechanik als Lösung einer Funktionalgleichung findet sich schon in Trostel (1981) und soll hier seiner Einfachheit wegen kurz referiert werden. Er gründet auf die Forderung, die sog. Prozessenergie eines Vorgangs rahmeninvariant registrieren zu können, wobei man unter der (während einer Dauer $t_{II} \geq t \geq t_I$) anfallenden Prozessenergie diejenige Grösse versteht, die (während $t_{II} \geq t \geq t_I$) in einem Punktmassensystem im Zusammenhang mit den (per Geschwindigkeitsänderungen) zu konstatierenden Änderungen dessen kinetischer Energie summarisch anfällt[3].

[1] Man setzt etwa die „Materialgleichung" $K = m\,\ddot{x}$ mit der Materialgleichung $K = -\,c\,x$ der an einer Punktmasse (m) angreifenden Federkraft (Federkonstante c) gleich, um mittels $m\,\ddot{x} + c\,x = 0$ die „Bewegungsgleichung des Feder-Masse-Systems" extrahieren zu können.

[2] Insofern nach Kenntnis des jeweiligen „Körperenergie-Gesetzes" auf Basis eines Energieerhaltungstheorems unter Benutzung eines zusätzlichen „masselosen Energiespeichers" (etwa einer Normfeder) die genannten Bewegungsgesetze zuzüglich einer (auf Längenänderungen basierenden) Messvorschrift für „Kraftgrößen" zu erschließen waren.

[3] und im Sinne eines Energieerhaltungstheorems als in entsprechenden (in der klassischen Mechanik als masselos angesehenen) Interaktionsspeichern akkumuliert angenommen werden (Trostel, 1981, 1982 und Trostel, in Vorbereitung)

Diese Forderung nach Rahmeninvarianz der Prozessenergie wird auf den in Bild1 skizzierten Fall des im K-Rahmen als „gerader zentraler Stoss zweier (energetisch) gleicher Punktmassen“ registrierten Vorgangs angewendet, ergibt dort als Prozessenergie mit der Setzung $\mathcal{K}^*(v)$ für die kinetische Energie einer der Punktmassen

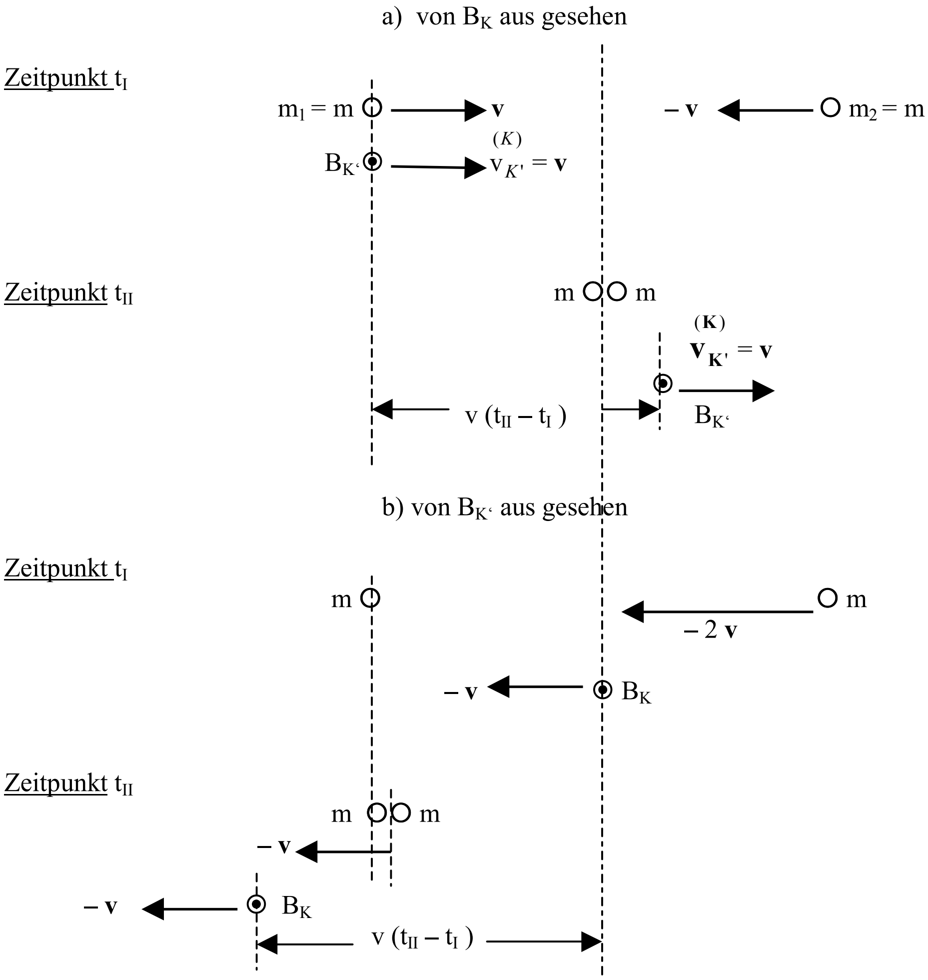

Bild 1: Bewegungsbilder des geraden zentralen Stoßes

$$\Delta \overset{(\mathcal{K})}{\mathcal{P}}_{I\to II} = -\left\{(\Sigma \overset{(K)}{K})_{tII} - (\Sigma \overset{(K)}{K})_{tI}\right. = 2\,\mathcal{K}^*(v) - 2\,\mathcal{K}^*(0) \to^{4} 2\,\mathcal{K}^*(v), \tag{3a}$$

weil vor dem Stoß beide Punktmassen gleiche Geschwindigkeit und damit gleiche kinetische Energien haben und beim Stoß (zur Zeit t_{II}) im K-Rahmen (im Stoßpunkt) ruhen[5]. Für die Notation desselben Vorganges ergibt sich hingegen für einen Beobachter $B_{K'}$, der sich mit der Geschwindigkeit der linken Masse von Bild 1 bewegt, als Prozessenergie

$$\Delta \overset{(\mathcal{K}')}{\mathcal{P}}_{I\to II} = -\left\{(\Sigma \overset{(K')}{K})_{tII} - (\Sigma \overset{(K')}{K})_{tI}\right. = \mathcal{K}^*(2\,v) - 2\,\mathcal{K}^*(v), \tag{3b}$$

---

[4] indem man noch $\mathcal{K}^*(0) = 0$ voraussetzt, da eine allfällige Ruheenergie im Rahmen der klassischen Punktmechanik durch mechanische Manipulationen nicht freigesetzt werden kann.
[5] und etwa an einen dort installierten (z.B. Stoßdämpfer-) Speicher ihre kinetischen Energien abgegeben haben.

weil vor dem Stoß allein für die rechte Punktmasse eine Geschwindigkeit – nämlich 2v – registriert wird, während zur Zeit t_{II} von $B_{K'}$ beide Massen als „sich mit der Geschwindigkeit v wegbewegend" wahrgenommen werden[6]. Gleichsetzen von (3a) mit (3b) ergibt dann die Funktionalgleichung

$$2\,\mathcal{K}^*(v) = \mathcal{K}^*(2\,v) - 2\,\mathcal{K}^*(v), \quad \text{d.h.} \quad \mathcal{K}^*(2\,v) = 4\,\mathcal{K}^*(v),$$

die mit der Setzung $\mathcal{K}^*(v) = v^2\, g(v)$ und daher weiters wegen $\mathcal{K}^*(2\,v) = (2\,v)^2\, g(2\,v) = 4v^2\, g(2\,v)$ auf

$$g(v) = g(2\,v) \tag{3c}$$

führt, weswegen g eine (vom Argument unabhängige) Konstante (m_P / 2) und demgemäß in der Tat

$$\mathcal{K}^*(v) = v^2\, g(v) = (m_P / 2)\, v^2 \tag{3d}$$

(vgl.(2a)) sein muss.
Die Schwäche dieser Herleitung liegt in der Vorabannahme rahmeninvarianter Prozessenergie, was zwar für die klassische Punktmechanik, nicht aber für die spezielle Relativitätstheorie zutrifft und nötigt, in eine zur vorangegangenen Vorgehensweise analoge Prozedur noch eine weitere Freiheit einbauen zu müssen, die auch den (zunächst durchaus als von 1 verschieden vorzusehenden) sog. Prozessenergie-Transformator

$$\varepsilon_{K,K'} = \Delta \overset{(\mathcal{K}')}{\mathcal{P}}_{I\to II} \,/\, \Delta \overset{(\mathcal{K})}{\mathcal{P}}_{I\to II} \tag{4}$$

festzulegen gestattet. Wie das Folgende zeigen wird, ist die Lösung dieser Problem-Verallgemeinerung dadurch möglich, dass man für den zweiten Beobachterrahmen (K') nunmehr zwei Versionen vorsieht, nämlich weiters – zusätzlich zu dem in Bild 1 vorgestellten Fall – eine (von B_K aus registrierte) gegenüber der Stoßnormalen senkrechte Beobachterbewegung im Sinne von Bild 2 in Betracht nimmt, wobei Letztere insbesondere für die spezielle Relativitätstheorie noch den Vorteil bedeutet, der in beiden Rahmen zu konstatierenden Symmetrie der (Zentral-) Bewegungen wegen, jeweils „Gleichzeitigkeit" bei der Notation von Bilanzen in Anspruch nehmen zu können.[7]

---

[6] man bedenke, dass sich $B_{K'}$ – als Inertialrahmenbeobachter – gegenüber B_K mit konstanter Geschwindigkeit bewegen muss.

[7] Bekanntlich werden (in einem Beobachterrahmen K) registrierte zeitartige Differenzen ($\delta \overset{(K)}{t}$) zweier (punktueller) Ereignisse in einem zweiten Beobachterrahmen (K') durch

$$\delta \overset{(K')}{t} = \zeta_{KK'}\,(c\,\delta \overset{(K)}{t} - \overset{(K)}{\boldsymbol{\eta}_{K'}} \,.\, \delta \overset{(K)}{\mathbf{r}}) \quad \text{mit} \quad \overset{(K)}{\boldsymbol{\eta}_{K'}} = \overset{(K)}{\mathbf{v}_{K'}} / c \quad \text{und} \quad \zeta_{KK'} = \{1 - \overset{(K)}{\boldsymbol{\eta}_{K'}}{}^2\}^{-1/2}$$

repräsentiert mit dem im (K)-Rahmen registrierten (vektoriellen) räumlichen Abstand ($\delta \overset{(K)}{\mathbf{r}}$) der Ereignispunkte und der im (K)-Rahmen registrierten Geschwindigkeit ($\overset{(K)}{\mathbf{v}_{K'}}$) des Beobachters $B_{K'}$ (Trostel, 1981 und Trostel, in Vorbereitung). Wenn sich nun, wie hier vorgesehen, der Beobachter $B_{K'}$ senkrecht zur Stoßnormalen ($\overset{(K)}{\mathbf{e}}$) und damit zu $\delta \overset{(K)}{\mathbf{r}}$ bewegt, ist $\overset{(K)}{\boldsymbol{\eta}_{K'}} \,.\, \delta \overset{(K)}{\mathbf{r}} = 0$, also $\delta \overset{(K')}{t} = \zeta_{KK'}\, \delta \overset{(K)}{t}$ und mithin insbesondere $\delta \overset{(K')}{t} = 0$ für $\delta \overset{(K)}{t} = 0$, was bedeutet, dass beide Punktmassen sowohl im (K)- als auch im (K')-Rahmen generell gleichzeitig wahrgenommen werden.

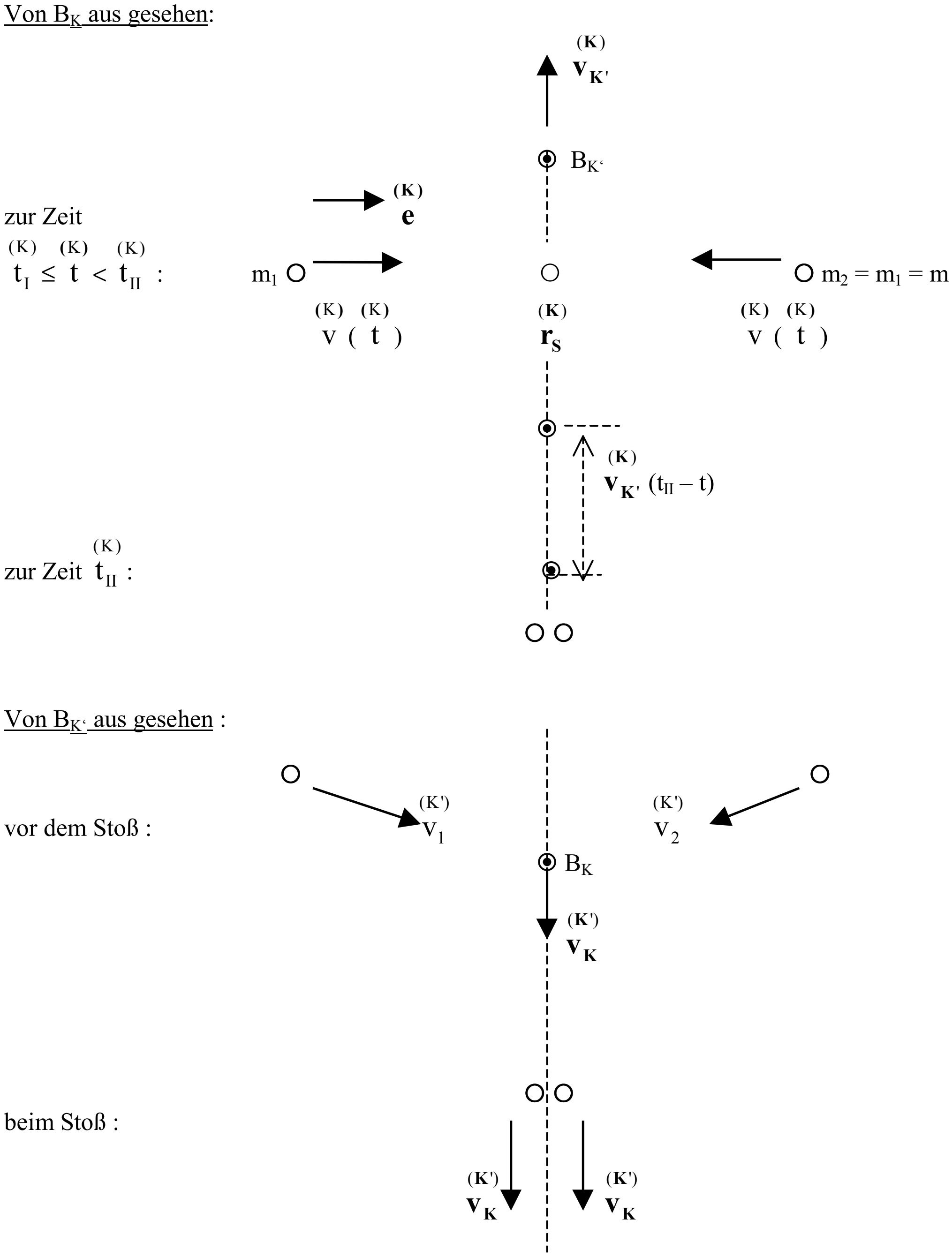

Bild 2: Bewegungsbilder des geraden zentralen Stoßes

Die Untersuchung wird getrennt für den klassischen und den relativistischen Fall vorgenommen, in beiden Fällen unter der Voraussetzung, dass der Prozessenergie-Transformator isotrop nur von $\overset{(K')}{\mathbf{v}}_{K}$ bzw. $\overset{(K)}{\mathbf{v}}_{K'}$, also von den relativen Bewegungsdaten der Beobachterrahmen abhänge. Für den **klassischen Fall** ergibt sich entsprechend (3b) mit der Notation nach (1) für die im (K)-Rahmen registrierte Prozessenergie mit der anfänglichen Geschwindigkeit $\overset{(K)}{\mathbf{v}}(P, t_I)$ einer der beiden zum Stoß zu bringenden (energetisch-) gleichen Punktmassen

$$\Delta \overset{(\mathcal{K})}{\mathcal{P}}_{I\to II} = 2\,K\,(v) \equiv 2\,\mathcal{K}\langle \overset{(K)}{\mathbf{v}}{}^{2}(P, t_I)\rangle, \tag{5a}$$

für den entsprechenden im (K‘)- Rahmen registrierten Wert im Falle dessen Bewegung senkrecht zur Stoßnormalen nach Bild 2

$$\Delta \overset{(\mathcal{K}')}{\mathcal{P}}_{\mathrm{I}\to\mathrm{II}} = 2\,\mathcal{K}\langle \overset{(\mathrm{K}')}{\mathbf{v}}{}^{2}(\mathrm{P}, t_{\mathrm{I}})\,\rangle - 2\,\mathcal{K}\langle \overset{(\mathrm{K}')}{\mathbf{v}}{}^{2}(\mathrm{P}, t_{\mathrm{II}})\,\rangle = 2\,\mathcal{K}\langle(\, \overset{(\mathrm{K})}{\mathbf{v}}\,(\mathrm{P}, t_{\mathrm{I}}) - \overset{(\mathrm{K})}{\mathbf{v}}_{\mathbf{K}'}\,)^{2}\rangle - 2\,\mathcal{K}\langle \overset{(\mathrm{K})}{\mathbf{v}}_{\mathbf{K}'}{}^{2}\rangle \to$$

$$\to 2\,\{\mathcal{K}\langle\, \overset{(\mathrm{K})}{\mathbf{v}}{}^{2}(\mathrm{P}, t_{\mathrm{I}}) + \overset{(\mathrm{K})}{\mathbf{v}}_{\mathbf{K}'}{}^{2}\,\rangle - \mathcal{K}\langle \overset{(\mathrm{K})}{\mathbf{v}}_{\mathbf{K}'}{}^{2}\rangle\ , \qquad (5b)$$

nachdem man hierin sogleich die mit der **Galilei-Transformation** festgelegte Geschwindigkeits-Transformation

$$\overset{(\mathrm{K}')}{\mathbf{v}}{}^{2}(\mathrm{P}, t_{\mathrm{I}}) = (\, \overset{(\mathrm{K})}{\mathbf{v}}\,(\mathrm{P}, t_{\mathrm{I}}) - \overset{(\mathrm{K})}{\mathbf{v}}_{\mathbf{K}'}\,)^{2} \qquad (5c)$$

sowie den hier vorgesehenen Spezialfall

$$\overset{(\mathrm{K})}{\mathbf{v}}\,(\mathrm{P}, t_{\mathrm{I}})\,.\, \overset{(\mathrm{K})}{\mathbf{v}}_{\mathbf{K}'} = 0 \qquad (5d)$$

in Betracht gezogen hat, und solchermaßen für den Prozessenergie-Transformator nach (4), wenn nun vereinfachend $\overset{(\mathrm{K})}{\mathbf{v}}{}^{2}(\mathrm{P}, t_{\mathrm{I}}) = y$ und $\overset{(\mathrm{K})}{\mathbf{v}}_{\mathbf{K}'}{}^{2} = x$ gesetzt werden,

$$\varepsilon_{\mathrm{K,K'}} = \{\mathcal{K}\langle y + x\rangle - \mathcal{K}\langle x\rangle \ \ / \mathcal{K}\langle y\rangle\,, \qquad (5e)$$

so dass schließlich mit der Voraussetzung, dass $\varepsilon_{\mathrm{K,K'}}$ im Sinne von $\varepsilon_{\mathrm{K,K'}} \equiv \varepsilon\,\langle x\rangle$ isotrop von der Relativgeschwindigkeit abhängen solle, die Funktionalgleichung

$$\{\mathcal{K}\langle y + x\rangle - \mathcal{K}\langle x\rangle \ \ / \mathcal{K}\langle y\rangle = \varepsilon\,\langle x\rangle \qquad (6a)$$

erhalten wird. Weil für beliebige Werte y geltend, muss dann (6a) auch für $y = x$ bestehen und ergibt demgemäß speziell

$$\varepsilon\,\langle x\rangle = \{\mathcal{K}\langle 2\,x\rangle - \mathcal{K}\langle x\rangle \ \ / \mathcal{K}\langle x\rangle = \{\mathcal{K}\langle 2\,x\rangle / \mathcal{K}\langle x\rangle \ \ - 1 \qquad (6b)$$

als erste Basisgleichung für die weitere Problemreduktion. Eine zweite Funktionalgleichung erhält man bei Betrachtnahme eines parallel zur Stoßnormalen (gegenüber dem (K)-Rahmen) bewegten zweiten Beobachterrahmens (K‘) nach Bild1, wofür jetzt mit den Bezeichnungen von (6) anstelle von (3a,b) und mit $y = x$

$$\Delta \overset{(\mathcal{K})}{\mathcal{P}}_{\mathrm{I}\to\mathrm{II}} = 2\,\mathcal{K}\langle x\rangle\,, \quad \Delta \overset{(\mathcal{K}')}{\mathcal{P}}_{\mathrm{I}\to\mathrm{II}} = \mathcal{K}\langle 4\,x\rangle - 2\,\mathcal{K}\langle x\rangle$$

und folglich für den (jetzt nicht a‘ priori mit 1 vorausgesetzten) Energietransformator

$$\varepsilon\,\langle x\rangle = \{\mathcal{K}\langle 4\,x\rangle - 2\,\mathcal{K}\langle x\rangle \ \ / (2\mathcal{K}\langle x\rangle) = (1/2)\,\{\mathcal{K}\langle 4\,x\rangle / \mathcal{K}\langle x\rangle \ \ - 1 \qquad (6c)$$

zu erreichen ist. Und Gleichsetzen von (6b) mit (6c) liefert dann

$$\mathcal{K}\langle 2\,x\rangle / \mathcal{K}\langle x\rangle = (1/2)\,\mathcal{K}\langle 4\,x\rangle / \mathcal{K}\langle x\rangle, \quad \text{d.h.} \quad \mathcal{K}\langle 2\,x\rangle = (1/2)\,\mathcal{K}\langle 4\,x\rangle\,, \qquad (7a)$$

was sich mit den Setzungen

$$\mathcal{K}\langle x\rangle = x\,g\,(x) \quad \text{und daher} \quad \mathcal{K}\langle 2\,x\rangle = 2x\,g\,(2x), \quad \mathcal{K}\langle 4\,x\rangle = 4x\,g\,(4x) \qquad (7b\text{-}d)$$

auf

$$g\,(2x) = g\,(4x)$$

reduzieren und solchermaßen die Funktion $g\,(x)$ als vom Argument unabhängig, d.h. als

$$g\,(x) = \text{const.} = m_{\mathrm{P}}/2 \qquad (8a)$$

erkennen lässt. Also sind mit $x = \mathbf{v}^{2}$

$$\mathcal{K}\langle x\rangle = x\,g(x) \overset{(8\mathbf{a})}{=} m_P\,x/2, \quad \text{d.h.} \quad \mathcal{K}\langle \mathbf{v}^2\rangle \overset{(7\mathbf{b})}{=} \mathbf{v}^2\,g(\mathbf{v}^2) = (1/2)\,m_P\,\mathbf{v}^2, \tag{8b,c}$$

womit dann etwa aus (6a)

$$\varepsilon\langle x\rangle = \{(y + x) - x \;\; / \, y = 1\,, \tag{8d}$$

also in der Tat Galilei-invariante Prozessenergie-Wahrnehmung festgestellt wird. Im **relativistischen Falle** geht man zweckmäßig von einer der Lorentz-Transformation angepassten (isotropen!) Version

$$\overset{(K)}{K}\langle \overset{(\mathbf{K})}{\mathbf{v}}(P, t)\rangle = \mathcal{K}\langle \overset{(K)}{\varsigma_P}\rangle \quad \text{mit} \quad \overset{(K)}{\varsigma_P} = \{1 - \overset{(\mathbf{K})}{\eta_{\mathbf{P}}}{}^{2} \;\, {}^{-1/2} \quad \text{und} \quad \overset{(\mathbf{K})}{\eta_{\mathbf{P}}} = \overset{(\mathbf{K})}{\mathbf{v}}(P, t)/c \tag{9a-c}$$

für die in einem Beobachterrahmen (K) als Zustandsfunktion der Geschwindigkeit ($\overset{(\mathbf{K})}{\mathbf{v}}$ (P, t)) registrierbare Körperenergie ($\overset{(K)}{K}$) aus, wobei mit $\mathcal{K}$ im Sinne des Forminvarianzprinzips eine rahmeninvariante (universelle) Funktion bezeichnet wird. Während der (etwa im Stoßpunkt $\overset{(\mathbf{K})}{\mathbf{r}_{\mathbf{S}}}$ situierte) Beobachter B_K die im Zusammenhang mit dem Stoßvorgang registrierten Körperenergien als

$$\overset{(K)}{K}_{\Sigma}(\overset{(K)}{t_I}) = 2\,\mathcal{K}\langle \overset{(K)}{\varsigma_P}(\overset{(K)}{t_I})\rangle, \quad \overset{(K)}{K}_{\Sigma}(\overset{(K)}{t_{II}}) = 2\,\mathcal{K}\langle 1\rangle,$$

also die während des Stoßes angefallene Prozessenergie als

$$\Delta \overset{(\mathcal{K})}{\mathcal{P}}_{I\to II} = 2\,\{\mathcal{K}\langle \overset{(K)}{\varsigma_P}(\overset{(K)}{t_I})\rangle - \mathcal{K}\langle 1\rangle \tag{10}$$

einschätzt, liegt für den Beobachter $B_{K'}$ im Falle nach Bild 2 mit

$$\overset{(K')}{K}_{\Sigma}(\overset{(K')}{t_I}) = 2\,\mathcal{K}\langle \overset{(K')}{\varsigma_P}(\overset{(K')}{t_I})\rangle, \quad \overset{(K')}{K}_{\Sigma}(\overset{(K')}{t_{II}}) = 2\,\mathcal{K}\langle \varsigma_{K,K'}\rangle$$ [8]

die Einschätzung

$$\Delta \overset{(\mathcal{K}')}{\mathcal{P}}_{I\to II} = 2\,\{\mathcal{K}\langle \overset{(K')}{\varsigma_P}(\overset{(K')}{t_I})\rangle - \mathcal{K}\langle \varsigma_{K,K'}\rangle \tag{11a}$$

vor, die sich auf Basis der **Lorentzschen** Geschwindigkeits-Transformationsformel (Trostel, 1982 und Trostel, in Vorbereitung)

$$\overset{(K')}{\varsigma_P} = (1 - \overset{(\mathbf{K})}{\eta_{\mathbf{P}}} \cdot \overset{(\mathbf{K})}{\eta_{\mathbf{K'}}})\,\varsigma_{K,K'}\,\overset{(K)}{\varsigma_P} \tag{11b}$$

mit der Spezialisierung

$$\overset{(K')}{\varsigma_P} \to^{9} \varsigma_{K,K'}\,\overset{(K)}{\varsigma_P} \tag{11c}$$

zu

$$\Delta \overset{(\mathcal{K}')}{\mathcal{P}}_{I\to II} = 2\,\{\mathcal{K}\langle \varsigma_{K,K'}\,\overset{(K)}{\varsigma_P}\rangle - \mathcal{K}\langle \varsigma_{K,K'}\rangle \tag{11d}$$

---

[8] mit $\varsigma_{K,K'} = \{1 - \overset{(\mathbf{K})}{\eta_{\mathbf{K'}}}{}^{2} \;\, {}^{-(1/2)} \equiv \varsigma_{K',K} = \{1 - \overset{(\mathbf{K'})}{\eta_{\mathbf{K}}}{}^{2} \;\, {}^{-(1/2)}$ und $\overset{(\mathbf{K})}{\eta_{\mathbf{K'}}} = \overset{(\mathbf{K})}{\mathbf{v}_{\mathbf{K'}}}/c$ (vgl. a. Fussn. 7).

[9] Für einen senkrecht zur Stoßnormale gegenüber dem Beobachter B_K bewegten Beobachterrahmen (K') gilt $\overset{(\mathbf{K})}{\eta_{\mathbf{P}}} \cdot \overset{(\mathbf{K})}{\eta_{\mathbf{K'}}} = 0$.

vereinfachen lässt. Mit den Setzungen $\varsigma_{K,K'} = x$ und $\overset{(K)}{\varsigma}_{P} = y$ und $\varepsilon_{K,K'} \equiv \varepsilon\,(x)$ entsteht dann die Funktionalgleichung

$$\varepsilon_{K,K'} \equiv \varepsilon\,\langle x\rangle = \Delta\,\overset{(\mathcal{K}')}{\mathcal{P}}_{I\to II} / \Delta\,\overset{(\mathcal{K})}{\mathcal{P}}_{I\to II} = \{\mathcal{K}\langle xy\rangle - \mathcal{K}\langle x\rangle \;\; / \{\mathcal{K}\langle y\rangle - \mathcal{K}\langle 1\rangle\;, \quad 1\le x, y \le \infty \qquad (12a)$$

für beliebige y und damit auch für y = x, womit

$$\varepsilon\,\langle x\rangle\, \{\mathcal{K}\langle x\rangle - \mathcal{K}\langle 1\rangle \;\; = \mathcal{K}\langle x^2\rangle - \mathcal{K}\langle x\rangle \qquad (12b)$$

als erste Basisgleichung aufgefunden wird. Die Entwicklung einer weiteren Funktionalgleichung unter Heranziehung eines zur Stoßnormalen parallel bewegten Beobachters $B_{K'}$ ist komplizierter, und zwar sowohl begrifflich als auch formal. Begrifflich insofern, als nun die für (in jeweiligen Beobachterrahmen erhobene) Energiebilanzierungen unerlässliche Gleichzeitigkeit bei der Energiestatus-Feststellung der beiden bewegten Massen (in ihren, in den jeweiligen Beobachterrahmen registrierten „Momentanplazierungen“) bekanntlich nichtmehr gesichert ist. Will man etwa im Beobachterrahmen (K‘) „momentan“ die Körperenergien der beiden Punktmassen bilanzieren, so bedeutet dies, im Beobachterrahmen (K) die entsprechenden Energie-Teilbeträge zu verschiedenen Zeiten bilanzieren zu müssen. Legitimiert ist eine solche Vorgehensweise, sofern dem eigentlichen Stoßvorgang eine geeignet-endliche Vorlauf-Phase mit konstanten Punktmassen-Geschwindigkeiten zugebilligt werden kann, ein Vorbehalt, der übrigens entfiele, sofern man a priori den Stoß zweier zuvor infinitesimal benachbarter Punktmassen in Betracht zöge. Wie auch immer, benutzt man für die im (vor dem Stoß die linke Masse begleitenden) (K‘)-Rahmen zwecks Körperenergie-Feststellung zu erhebenden Geschwindigkeiten Formel (11b) und hat

für die <u>linke</u> Masse ($m_1 = m$) mit Geschwindigkeit $\{\,\overset{(\mathbf{K})}{\mathbf{v}}\,(P_1)\;_{I} = \overset{(\mathbf{K})}{\mathbf{v}}_{\mathbf{K}'}$ und damit $\{\,\overset{(\mathbf{K})}{\boldsymbol{\varsigma}}_{\mathbf{P1}}\;_{I} = \varsigma_{K,K}$ vor dem Stoß

$$\{\,\overset{(K')}{\varsigma}_{P1}\;_{I} = (1 - \overset{(\mathbf{K}')}{\eta}_{\mathbf{K}}{}^{2})\,\varsigma_{K,K'}\,\varsigma_{K,K'} = 1, \qquad (13a)$$

beim Stoß mit $\{\,\overset{(\mathbf{K})}{\mathbf{v}}\,(P_1)\;_{II} = \mathbf{0}$ und damit $\{\,\overset{(\mathbf{K})}{\boldsymbol{\varsigma}}_{\mathbf{P1}}\;_{II} = 1$

$$\{\,\overset{(K')}{\varsigma}_{P1}\;_{II} = 1 \times \varsigma_{K,K'} \times 1 = \varsigma_{K,K'}, \qquad (13b)$$

für die <u>rechte</u> Masse ($m_2 = m$) mit der Geschwindigkeit $\{\,\overset{(\mathbf{K})}{\mathbf{v}}\,(P_2)\;_{I} = -\overset{(\mathbf{K})}{\mathbf{v}}_{\mathbf{K}'}$, d.h. $\{\,\overset{(K)}{\varsigma}_{P2}\;_{I} = \varsigma_{K,K'}$ vor dem Stoß

$$\{\,\overset{(K')}{\varsigma}_{P2}\;_{I} = (1 + \overset{(\mathbf{K}')}{\eta}_{\mathbf{K}}{}^{2})\,\varsigma_{K,K'}{}^{2} \equiv 2\,\varsigma_{K,K'}{}^{2} - 1 \qquad (13c)$$

und schließlich beim Stoß entsprechend (13b)

$$\{\,\overset{(K')}{\varsigma}_{P2}\;_{II} = \varsigma_{K,K'} \qquad (13d)$$

und daher mit der Setzung $\varsigma_{K,K'} = x$ für die im (K‘)-Rahmen registrierte Gesamt-Körperenergie vor dem Stoß bzw. beim Stoß

$$\{\Sigma\,\overset{(K')}{K}\;_{I} = \mathcal{K}\langle 1\rangle + \mathcal{K}\langle 2\,x^2 - 1\rangle \quad \text{bzw.} \quad \{\Sigma\,\overset{(K')}{K}\;_{II} = \mathcal{K}\langle x\rangle + \mathcal{K}\langle x\rangle \;= 2\,\mathcal{K}\langle x\rangle,$$

also für im Zusammenhang mit dem Stoßvorgang von $B_{K'}$ als

$$\Delta\,\overset{(\mathcal{K}')}{\mathcal{P}}_{I\to II} = \{\Sigma\,\overset{(K')}{K}\;_{I} - \{\Sigma\,\overset{(K')}{K}\;_{II} = \mathcal{K}\langle 1\rangle + \mathcal{K}\langle 2\,x^2 - 1\rangle - 2\,\mathcal{K}\langle x\rangle \qquad (14a)$$

eingeschätzten Prozessenergiewert. Und da im (K)-Rahmen die während des Stoßes umgesetzte Prozessenergie im Sinne von (10) mit $\overset{(\mathbf{K})}{\mathbf{v}}(P_1, t_I) = - \overset{(\mathbf{K})}{\mathbf{v}}(P_2, t_I) = \overset{(\mathbf{K})}{\mathbf{v}}_{\mathbf{K}'}$, d.h. $\overset{(K)}{\varsigma_P}(\overset{(K)}{t_I}) = \varsigma_{K,K'} = x$ (wieder) als

$$\Delta \overset{(\mathcal{K})}{\mathcal{P}}_{I\to II} = 2\{\mathcal{K}\langle x\rangle - \mathcal{K}\langle 1\rangle\}$$

eingeschätzt wird, ist

$$\varepsilon\langle x\rangle = \Delta \overset{(\mathcal{K}')}{\mathcal{P}}_{I\to II} / \Delta \overset{(\mathcal{K})}{\mathcal{P}}_{I\to II} = \{(1/2)\,[\mathcal{K}\langle 1\rangle + \mathcal{K}\langle 2x^2-1\rangle] - \mathcal{K}\langle x\rangle\} / \{\mathcal{K}\langle x\rangle - \mathcal{K}\langle 1\rangle\}$$

bzw.

$$\varepsilon\langle x\rangle\{\mathcal{K}\langle x\rangle - \mathcal{K}\langle 1\rangle\} = (1/2)\{\mathcal{K}\langle 1\rangle + \mathcal{K}\langle 2x^2-1\rangle\} - \mathcal{K}\langle x\rangle \tag{14b}$$

die neben (12b) noch erforderliche zweite Funktionalgleichung. Gleichsetzen mit (12b) ergibt

$$(1/2)\{\mathcal{K}\langle 1\rangle + \mathcal{K}\langle 2x^2-1\rangle\} - \mathcal{K}\langle x\rangle = \mathcal{K}\langle x^2\rangle - \mathcal{K}\langle x\rangle, \quad \text{d.h.} \quad (1/2)\{\mathcal{K}\langle 1\rangle + \mathcal{K}\langle 2x^2-1\rangle\} = \mathcal{K}\langle x^2\rangle,$$

was nach Differentiation hinsichtlich $z = x^2$ zu

$$\{d\mathcal{K}/dz\}_{zA} = \{d\mathcal{K}/dz\}_{zB} \quad \text{mit} \quad z_A = 2x^2 - 1, \quad z_B = x^2$$

führt, wonach $d\mathcal{K}/dz$ eine Konstante (K_0) sein muss. Danach hat man bis auf eine unwesentliche Konstante

$$\mathcal{K}\langle z\rangle = K_0\, z, \quad \text{d.h. in der Tat} \quad \overset{(K)}{K}\langle \overset{(\mathbf{K})}{\mathbf{v}}(P, t)\rangle \overset{(9a)}{=} \mathcal{K}\langle \overset{(K)}{\varsigma_P}\rangle = K_0 \overset{(K)}{\varsigma_P} \quad \text{mit} \quad K_0 = m_P c^2$$

(vgl.(2b)), während man für den Prozessenergie-Transformator etwa aus (12a) mit $\mathcal{K}\langle 1\rangle = K_0$ und $x = \varsigma_{K,K'}$

$$\varepsilon\langle \varsigma_{K,K'}\rangle = \varepsilon\langle x\rangle = x = \varsigma_{K,K'} = \{1 - \overset{(\mathbf{K}')}{\eta}_{\mathbf{K}}{}^2\}^{-1/2}$$

auffindet.

Zusammenfassend lässt sich also in der Tat feststellen, dass die gesamte klassische bzw. relativistische (Punkt-) Mechanik auf der Materialgleichungsannahme (1) basieren. Konkrete Ausformungen, etwa in Form von (2) liefern die von den jeweiligen Transformationstheorien herrührenden Restriktionen, die letztlich den konkreten Formeln für Körperenergie bzw. Prozessenergie-Transformator den Charakter transformationstheoretischer Größen verleihen.

In Trostel (1981, 1982) und Trostel (in Vorbereitung) wird die Punktmechanik axiomatisch von der Sicht energetischer Interaktionen zwischen (primär als Energiespeicher angesehener) „punktueller Strukturen" her entwickelt, wobei solcherart Ensemble (vorerst) als „Inertialrahmen-invariant[10] gegenüber dem Rest-Kosmos energetisch abgeschlossen" angenommen werden. Als Konsequenz davon muss dann generell für ein aus Punktmassen (P_j, j = 1..n, Körperenergien $\overset{(K)}{K}_j$) und „sonstigen Energiespeichern" (P_i, i = 1...m, Speicherenergie-Inhalte $\overset{(K)}{Q}_i$) bestehendes Ensemble die Erhaltungsversion

$$\overset{(K)}{\Pi}_\Sigma \equiv \Sigma \overset{(K)}{K}_j + \Sigma \overset{(K)}{Q}_i = \text{const.},$$

d.h. selbstverständlich

$$\Sigma(\Delta \overset{(K)}{Q}_i)_{I\to II} = -\Sigma(\Delta \overset{(K)}{K}_j)_{I\to II} \equiv \Delta \overset{(\mathcal{K})}{\mathcal{P}}_{I\to II} \tag{15}$$

[10] d.h. Galilei-invariant bzw. Lorentz-invariant

gelten, wonach die in „sonstigen Speichern“ akkumulierten Energieinhalte mit der für ein Ensemble (in Form von Punktmassen-Körperenergie-Änderungen) erschließbaren Prozessenergie identisch sein müssen. Entscheidend für die gesamte Physik ist nun, dass man mittels (15) einen Zusammenhang zwischen (Teil-) Energien verschiedensten (z.B. thermischen) Ursprungs und Punktmassen-Körperenergie-Änderungen herstellen kann, wobei (allein!) Letztere als Geschwindigkeits-Zustandsfunktionen angesehen werden können und solchermaßen eine „Kinematisierung“ des Energiebegriffs ermöglichen[11]. Und, dass es demgemäß generell möglich ist, die Transformationseigenschaften beliebiger anderer Energieformen in gleicher Weise prognostizieren zu können, wie dies uns für Punktmassen-Körperenergien gelungen ist. Daraus folgt, dass in *klassischen* Theorien Speicheenergie-Inhalte (etwa Wärmemengen), weil hierfür der Prozessenergie-Transformator mit 1 festgestellt wurde, Galilei-invariant registriert werden, wohingegen im relativistischen Falle als Folge einer etwa im jeweiligen Speicher-Eigenrahmen registrierten Energieänderung ΔQ_i mit der im (K)-Rahmen registrierten Speichergeschwindigkeit $\overset{(\mathbf{K})}{\mathbf{v}_\mathbf{i}}$ im Sinne Einsteins bekanntlich

$$\Delta \overset{(K)}{Q_i} = \Delta Q_i \, \overset{(K)}{\varsigma_i} \quad \text{mit} \quad \overset{(K)}{\varsigma_i} = \left\{1 - \overset{(\mathbf{K})}{\eta_\mathbf{i}}{}^2\right\}^{-1/2} \quad \text{und} \quad \overset{(\mathbf{K})}{\eta_\mathbf{i}} = \overset{(\mathbf{K})}{\mathbf{v}_\mathbf{i}}/c$$

identifiziert wird.
Es erscheint mir immer wieder faszinierend, in welch glückhafter Weise der forschenden Menschheit die Lösung der Energietransformationsfrage und im Verfolg davon letztlich auch die Identifizierung der wesentlichen (Newtonschen bzw. Lorentz-Einsteinschen) „dynamischen Bewegungsgesetze“ dadurch möglich war, dass sie die Kinematisierung wenigstens <u>einer</u> Energieform, nämlich der Punktmassen-Körperenergie plausibel verfügen konnte.

Literatur

Trostel, R.: Gedanken zur klassischen Punktmechanik. *Humanismus u. Technik*, Jahrbuch (1981), Berlin, S. 63 ff.

Trostel, R.: Ein Verifizierungsschema für die Grundgleichungen der relativistischen Punktmechanik. *Humanismus u. Technik*, Jahrbuch (1982), 86ff.

Trostel, R.: Theoriekonstruktionen in der Mechanik. In Vorbereitung.

Adresse: Prof. Dr.-Ing. Rudolf Trostel, Laurinsteig 27, 13465 Berlin

[11] weswegen naheliegt, die Mechanik als (vorwiegend) kinematisch definierte Wissenschaft zu deklarieren. Dass daher das energetische Transformationsverhalten von Punktmassen-Körperenergien wie auch insbesondere deren formale Darstellungen Folge des (mit den Rahmen-Transformationen festgelegten) Geschwindigkeits-Transformationsverhaltens sein müssen, liegt somit auf der Hand.