# UNIVERSELLER ZUSAMMENHANG: WIE DAS ELEKTROMAGNETISCHE FELD DIE WELT VERBINDET

*Frank Gronwald, Jürgen Nitsch*

*Die heutzutage bekannten vier fundamentalen Wechselwirkungen teilen eine faszinierende Eigenschaft: Sie ermöglichen es, Veränderungen von physikalischen Objekten zu beschreiben. Ohne Wechselwirkungen ist eine solche Beschreibung nicht möglich. Wechselwirkungen werden daher auch Zusammenhänge genannt, denn sie übertragen innerhalb von Raum und Zeit die Information über Veränderungen von Punkt zu Punkt. Dieser Sachverhalt wird am Beispiel der elektromagnetischen Wechselwirkung verdeutlicht.*

Am Anfang war das Licht. Die Menschen hat das Licht in ihrem Werdegang stets begleitet, und so sind Überlegungen über das Licht bereits im frühen wissenschaftlichen Denken enthalten. Dieses begann etwa mit den Anfängen der griechischen Philosophie /1/. Die Lehre des Lichtes, auch *Optik* genannt, befaßte sich damals hauptsächlich mit geometrischen Fragen über das Reflektions- und Brechungsverhalten von Lichtstrahlen, vergleiche Abbildung 1, sowie mit dem Vorgang des menschlichen Sehens. Zu dieser Zeit wurden auch erste systematische Beobachtungen von *Elektrizität* und *Magnetismus* gemacht. Diese Beobachtungen bezogen sich auf die weniger offensichtlichen elektrostatischen und magnetischen Kräfte, die an zwei Mineralien, dem Bernstein und dem Magnetstein, studiert wurden.


*Abb. 1*
*Euklid (ca. 325-265 v. Chr.), hier ein Porträt als Motiv einer Briefmarke der Malediven, gehörte zu den ersten Wissenschaftlern, die sich intensive Gedanken um die Natur des Lichtes machten. Seine Erkenntnisse hierzu legte er in dem Buch* Optik *nieder.*

Mit dem Einzug der modernen Physik im 17. Jahrhundert wurden die als bis dahin getrennt betrachteten Gebiete der Optik, Elektrizität und des Magnetismus mathematisiert und mit Hilfe experimenteller Beobachtungen durch theoretische Modelle beschrieben. Bemerkenswerte Fortschritte hierzu wurden insbesondere im 19. Jahrhundert erzielt, die zu einer Synthese von Optik, Elektrizität und Magnetismus führten. Damit konnten optische, elektrische und magnetische Erscheinungen als Eigenschaften einer einzigen physikalischen Größe formuliert werden, die als das *elektromagnetische Feld* bezeichnet wird und die *elektromagnetische Wechselwirkung* vermittelt.

Heutzutage kennen wir vier fundamentale Wechselwirkungen. Neben der elektromagnetischen Wechselwirkung sind dies die *gravitative*, die *schwache* und die *starke* Wechselwirkung. Die durch die Gravitation vermittelte gravitative Wechselwirkung ist uns wohlbekannt. Sie hält uns nicht nur auf dem Erdboden, sie ist insbesondere auch für die Struktur von Planetensystemen und Galaxien, also für die Strukturen kosmischer Längenskalen verantwortlich. Im Gegensatz hierzu sind die schwache und starke Wechselwirkung bei der Strukturbildung im Bereich sehr kleiner Längenskalen dominant. Durch sie gebildete oder zerfallende Strukturen umfassen die aus Quarks zusammengesetzten Elementarteilchen oder auch die Atomkerne. Schließlich sind die im Bereich menschlicher Längenskalen hervorgerufenen Strukturen hauptsächlich auf die elektromagnetische Wechselwirkung zurückzuführen. Die elektromagnetische Wechselwirkung bildet die Grundlage der Chemie und Biologie und ist letztendlich für die Vielfältigkeit natürlicher Systeme verantwortlich, wie sie etwa durch einen Kristall, eine Pflanze oder einen menschlichen Organismus zum Ausdruck kommt. Auch in der auf menschliche Dimensionen zugeschnittenen technischen Anwendung spielt das elektromagnetische Feld eine überragende Rolle. Von der Glühbirne über das Mobiltelefon und den Fernseher bis hin zum Kernspintomographen und Laser reicht die Palette elektrischer, magnetischer und optischer Anwendungen.

So wie damals im 19. Jahrhundert die Optik mit der Elektrizität und dem Magnetismus zur Theorie des elektromagnetischen Feldes verschmolzen wurden, so sollten sich auch die vier fundamentalen Wechselwirkungen innerhalb der Theorie eines einzigen Feldes vereinigen lassen. Zumindest in den Träumen vieler Physiker[1)], die schon seit Jahrzehnten mit viel geistigem Aufwand nach der

*Abb. 2*
*James Clerk Maxwell (1831-1879) komplettierte die Grundgleichungen der Elektrodynamik, durch welche elektrische, magnetische und optische Phänomene beschrieben werden können. Ihm zu Ehren werden diese Gleichungen auch die* Maxwellschen Gleichungen *genannt.*

1) Mit „Physiker“ sind selbstverständlich weibliche wie männliche Personen gemeint.

*Grand Unified Theory*, der großen vereinheitlichten Theorie, suchen. Doch bisher sperrt sich vor allem die Gravitation gegen eine einheitliche Formulierung. Zwar können wir beschreiben, wie die Gravitation zwischen makroskopischen Objekten (Erde, Mond, Mensch ...) agiert, aber der Mechanismus der gravitativen Wechselwirkung zwischen mikroskopischen Teilchen (Elektron, Neutrino, Quark ...) liegt noch weitestgehend im Dunkeln.

Warum aber ist nach all den Jahrzehnten vergeblicher und erheblicher Anstrengung die Suche nach der großen Vereinheitlichung nicht schon längst aufgegeben worden? Eine Erklärung ist die folgende:

*Trotz subtiler und hartnäckiger Unterschiede lassen sich die vier Wechselwirkungen innerhalb eines gewissen Rahmens auf sehr einheitliche Weise formulieren. Dieser Rahmen wird aufgespannt von einer Leitidee, welche wir das Eichprinzip nennen. Und das Eichprinzip ist von solch einer gedanklichen Ästhetik, daß es die Möglichkeit einer vereinheitlichten Theorie verführerisch nahe legt.*

Abb. 3
Hermann Weyl (1885-1955) suchte nach einer Theorie, welche die Elektrodynamik und Allgemeine Relativitätstheorie vereinheitlichen sollte. Dabei entdeckte er das Eichprinzip /2, 3/.

Innerhalb des Eichprinzips werden Wechselwirkungen als sogenannte *Zusammenhänge* aufgefaßt. Diese Sichtweise ist ergänzend zu solchen Modellvorstellungen, die Wechselwirkungen als Kraftwirkungen von Feldern oder durch den Austausch von Teilchen beschreiben. Ein Zusammenhang, im Sinne des Eichprinzips, enthält Information über die Veränderung physikalischer Objekte, die sich an verschiedenen Punkten von Raum oder Zeit befinden. Dies klingt recht formal und abstrakt, was es tatsächlich auch ist!

Im folgenden werden wir das Eichprinzip erklären. Das elektromagnetische Feld wird uns dabei als illustratives Beispiel dienen. Unsere Vorgehensweise ist recht übersichtlich:

- Im nächsten Abschnitt erläutern wir die fundamentale Bedeutung von Differenzen zur Beschreibung von Naturvorgängen. Dabei werden wir feststellen, daß Differenzen physikalischer Größen nicht ohne weiteres definiert werden können. Hierzu fehlt Information, welche die Natur in den Wechselwirkungsfeldern kodiert hat. Dieser Sachverhalt ist durchaus überraschend!
- Als Beispiel betrachten wir nachfolgend Differenzen, die sich aus der Veränderung mikroskopischer Teilchen ergeben. Solche Teilchen werden quantenmechanisch korrekt durch sogenannte *Wellenfunktionen* beschrieben. Die Differenzbildung dieser Wellenfunktionen kann nur durch Verwendung zusätzlicher Felder physikalisch sinnvoll erfolgen. Diese Felder beinhalten notwendige Informationen über die Differenzbildung, ihre Einführung entspricht einer gegenseitigen Eichung von Maßstäben bzw. Referenzsystemen. Die Prozedur der notwendigen Einführung solcher Felder zur Eichung von Referenzsystemen nennen wir das Eichprinzip.
- Den zusätzlich eingeführten Feldern werden wir anschließend physikalisches Leben einhauchen. Dabei werden wir erkennen: Diese Felder entsprechen dem elektromagnetischen Feld!
- Wir geben abschließend einen kurzen Ausblick auf die Bedeutung des Eichprinzips für die anderen fundamentalen Wechselwirkungsfelder.

Das Thema dieses Beitrages ist nicht nur im Sinne der Vereinheitlichung der physikalischen Wechselwirkungen wichtig, sondern es erklärt auch in originärer Form die Bedeutung der Phasen und Phasendifferenzen von Materiewellen für Elektronen in der Elektrodynamik. Hierbei handelt es sich um eine sehr grundlegende Frage der Physik und der Elektrotechnik. Sie gehört somit in das Forschungsgebiet des Institutes für Grundlagen der Elektrotechnik und Elektromagnetische Verträglichkeit in der Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik.

## VERÄNDERUNGEN UND IHRE BESCHREIBUNG DURCH ZUSAMMENHÄNGE – ODER: WAS IST EIGENTLICH EINE DIFFERENZ?

Die Welt, wir mögen es mit gemischten Gefühlen betrachten, befindet sich in stetem Wandel. Wandel bedeutet Veränderung, und damit ist letztendlich die räumliche und zeitliche Veränderung physikalischer Objekte gemeint. Eine Welt ohne Veränderung wäre allerdings auch ziemlich langweilig, würde sie sich doch in einem andauernden und homogenen Ruhezustand befinden.

### *Differenzen und Naturgesetze*

Mathematisch werden Veränderungen durch *Differenzen* beschrieben. Gemeint sind damit Differenzen von Zahlenwerten, die bestimmte physikalische Eigenschaften eines Objektes kennzeichnen. Ein solcher Zahlenwert kann beispielsweise die durch einen festen Maßstab bestimmte Position eines Objektes repräsentieren. Verändert sich bei festem Maßstab dieser Zahlenwert mit der Zeit, so verändert sich auch die Position des Objektes mit der Zeit, und wir würden von einer Bewegung mit einer bestimmten Geschwindigkeit sprechen. Eine Bewegung wird demnach durch die Differenz der Position des Objektes, bezogen auf eine bestimmte Zeiteinheit, charakterisiert. Diesen beispielhaften Sachverhalt können wir durch die Beziehung

$$\text{Geschwindigkeit} = \frac{\text{Positionsdifferenz}}{\text{Zeitdifferenz}} \tag{1}$$

charakterisieren. Wird kürzer die Geschwindigkeit mit $v$, die Position mit $s$, die Zeit mit $t$ und eine Differenz mit $\Delta$ bezeichnet, so schreibt sich dies auch in der kompakten Form

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}\,. \tag{2}$$

Genau genommen ist $v$ in dieser Gleichung eine Durchschnittsgeschwindigkeit, bezogen auf den Zeitraum $\Delta t$. Üblicherweise wird das Symbol $\Delta$ durch $d$ ersetzt, wenn idealisiert kleine Differenzen, sogenannte *Differentiale*, verwendet werden. Für solche Differenzen wird (2) zu

$$v = \frac{ds}{dt} \quad (3)$$

und $v$ nimmt die Bedeutung einer Momentangeschwindigkeit an. Weil die Gleichung (3) zwei Differentiale enthält, gehört sie zur Klasse der *Differentialgleichungen*. Von diesem Beispiel leiten wir die folgende, allgemeine Aussage ab:

*Alle Naturgesetze, welche Veränderungen festlegen, können als Differentialgleichungen formuliert werden. Differenzen und damit auch Differentiale sind zur Beschreibung von Naturvorgängen unabdingbar!*

***Physikalische Differenzen und ihre Abhängigkeit von Referenzsystemen***

Beunruhigend ist nun, daß bei näherer Betrachtung gar nicht klar ist, wie eine physikalische Differenz eigentlich definiert ist. Denn physikalische Größen bestehen in der Regel aus *zwei* Anteilen, einem Zahlenwert und einem Maßstab. Mathematiker nennen solch einen Zahlenwert oft eine *Komponente*, und für einen Maßstab benutzen sie die Vokabel *Basis*. Wir werden im folgenden den Zahlenwert auch als Komponente bezeichnen, den Maßstab nennen wir aber lieber ein *Referenzsystem*.

Ein Mensch, zum Beispiel, mag 1,82 Meter groß sein. Hier ist 1,82 die Komponente und der Meter stellt das Referenzsystem dar. Offenbar macht die Komponente 1,82 für sich allein genommen noch keine vernünftige Längenangabe. 1,82 Meter scheint uns aber vernünftig, denn wir haben eine ungefähre Vorstellung, welcher Länge ein Meter entspricht. Um diese Vorstellung zu präzisieren, können wir ein tatsächliches Referenzsystem zur Hilfe nehmen, etwa ein Lineal oder einen Zollstock. In der Hoffnung, daß dieses Referenzsystem eine Meterskala enthält und zudem richtig geeicht ist, können wir damit die Längeneinheit Meter und damit auch 1,82 Meter abmessen.

Führen wir jetzt Messungen an zwei verschiedenen Orten oder zu zwei verschiedenen Zeiten durch, so können wir auch Längendifferenzen bilden. Angenommen, eine erste Messung ergibt eine Länge von 1,82 Meter, eine zweite, spätere, Messung ergibt 1,84 Meter. Etwas voreilig bilden wir daraus eine Längendifferenz $\Delta L_{\text{Komponente}}$ von

$$\Delta L_{\text{Komponente}} = 1{,}84\ \text{m} - 1{,}82\ \text{m} = (1{,}84 - 1{,}82)\ \text{m}$$
$$= 0{,}02\ \text{m} \quad (4)$$

und folgern daraus einen Längenzuwachs von 0,02 Meter. Warum aber ist diese plausible, einfache Rechnung voreilig? Sie ist voreilig, da wir stillschweigend angenommen haben, daß sich das Referenzsystem, welches uns den Meter festlegt, zwischen beiden Messungen nicht verändert hat! Zwar sagt uns unsere alltägliche Erfahrung, daß eine Veränderung des Referenzsystems recht unwahrscheinlich ist, prinzipiell ist sie aber durch nichts auszuschließen.

Wir bezeichnen nun etwas formaler eine physikalische Größe mit $\phi$, eine Komponente mit $\phi^a$ und ein Referenzsystem mit $e_a$, also

$$\phi = \phi^a e_a . \quad (5)$$

Die obige Gleichung (4), welche eine mögliche Veränderung des Referenzsystems nicht berücksichtigt, ist dann von der Form

$$\Delta\phi_{\text{Komponente}} = (\phi^a + \Delta\phi^a)e_a - \phi^a e_a$$
$$= \Delta\phi^a e_a . \quad (6)$$

Beziehen wir nun eine mögliche Änderung $\Delta e_a$ des Referenzsystems in die Differenzbildung mit ein, so erhalten wir als gesamte Differenz der physikalischen Größe $\phi$ den Ausdruck

$$\Delta\phi = (\phi^a + \Delta\phi^a)\,(e_a + \Delta e_a) - \phi^a e_a$$
$$= \Delta\phi^a e_a + \phi^a \Delta e_a + \Delta\phi^a \Delta e_a$$
$$= \Delta\phi_{\text{Komponente}} + \phi^a \Delta e_a + \Delta\phi^a \Delta e_a . \quad (7)$$

Für kleine Differenzen, d. h. beim Übergang $\Delta \to d$ zu Differentialen, ist der rechte Term $\Delta\phi^a \Delta e_a \to d\phi^a de_a$ als Produkt zweier infinitesimaler Größen zu vernachlässigen. Es ergibt sich dann

$$d\phi = d\phi^a e_a + \phi^a de_a . \quad (8)$$

In jedem Fall, ob durch $\Delta e_a$ in (7) oder durch $de_a$ in (8), beeinflußt eine Veränderung des Referenzsystems die Differenz $d\phi$ der physikalischen Größe $\phi$.

In dieser Feststellung liegt eine gewisse Tragik: Wir können durch möglichst genaues Ablesen versuchen, eine Komponente $\phi^a$, und damit eine Differenz $d\phi^a$, möglichst genau zu bestimmen. Aber wie können wir eine Veränderung $de_a$ des Referenzsystems feststellen? Etwa durch weitere Referenzsysteme, die sich womöglich auch verändern?

*Die Bestimmung der Differenz $de_a$ eines Referenzsystems ist ein Problem, welches sich nicht ohne weiteres lösen läßt. Denn es gibt keine absoluten Referenzsysteme, an denen wir uns orientieren können. Veränderungen $de_a$ von Referenzsystemen sind a priori nicht festgelegt!*

***Das Eichprinzip als Naturprinzip: Wie Wechselwirkungsfelder Referenzsysteme miteinander verbinden***

An dieser Stelle kommen die Wechselwirkungen ins Spiel. Denn sollte nicht für die Veränderung einer physikalischen Größe im Raum oder in der Zeit eine Wechselwirkung verantwortlich sein? Das Eichprinzip geht nun davon aus, daß die Information über die Veränderung von Referenzsystemen in den Wechselwirkungsfeldern enthalten ist. Und dies funktioniert folgendermaßen: Die Veränderung $de_a$ eines Referenzsystems $e_a$ wird dem Wert eines Wechselwirkungsfeldes $A_a$ einfach gleichgesetzt:

$$de_a = A_a . \quad (9)$$

Damit sorgen Wechselwirkungen für eine gegenseitige Eichung von Referenzsystemen, die, zumindest gedanklich, in Raum und Zeit verteilt sind. Sie werden daher auch *Eichfelder* genannt.

*Abb. 4*
*Zu Zeiten der Physik von Sir Isaac Newton (1642-1727, oben) galt die Vorstellung von absoluten Referenzsystemen, mit denen sich Raum und Zeit vermessen lassen. Nachdem Albert Einstein (1879-1955, Nobelpreis 1921, unten) die Relativitätstheorie entwickelt hatte, mußte diese Vorstellung aufgegeben werden. Denn „alles ist relativ", insbesondere gilt dies für Referenzsysteme.*

In diesem Sinne hängen alle räumlich oder zeitlich getrennten Referenzsysteme über die Wechselwirkungsfelder zusammen. Dies motiviert die in der Einleitung schon erwähnte Bezeichnung *Zusammenhang* für ein Wechselwirkungsfeld.

Mit der Festsetzung (9) wird die Differenz $d\phi$ durch

$$d\phi = d\phi^a e_a + \phi^a A_a \qquad (10)$$

*definiert.* Daß diese Definition Sinn macht, also die Realität darstellt, ist von vorneherein nicht klar. Es stellt sich aber heraus, daß diese Definitionsgleichung für die Differenz $d\phi$ die Wechselwirkungen in der Natur korrekt beschreibt!

## PHASENDIFFERENZEN VON MATERIEWELLEN UND IHRE EICHUNG

Wir werden nun das Eichprinzip am Beispiel des elektromagnetischen Feldes illustrieren. In einem ersten Schritt müssen wir dazu überlegen, von welchen physikalischen Größen eine Differenzbildung die Eichung von Referenzsystemen durch ein Eichfeld erfordert. ***Die Antwort, welche zum elektromagnetischen Feld als Eichfeld führt, lautet, daß diese physikalischen Größen durch Phasen von Wellenfunktionen für mikroskopische Materieteilchen gegeben sind.*** Um dies gut verstehen zu können, werden wir zuerst einige elementare Tatsachen zur quantenmechanischen Beschreibung mikroskopischer Teilchen besprechen /4, 5/.

*Abb. 5*
*Louis-Victor de Broglie (1892-1987) experimentierte mit Elektronenstrahlen und demonstrierte die Welleneigenschaften von Materieteilchen. Hierfür bekam er 1929 den Nobelpreis verliehen.*

### *Ein kleiner Exkurs in den Mikrokosmos: Die Beschreibung mikroskopischer Teilchen durch Materiewellen*

Woraus besteht die Materie? Sicher ist dies eine sehr fundamentale Frage. Wer schon einmal Steine oder Kaffeebohnen zermahlen hat, kann ungefähr nachvollziehen, warum die Bestandteile fester Materie in früherer Zeit als kleine, feste Kügelchen symbolisiert wurden. Die Wissenschaft hat diese Kügelchen zu Atomen reduziert, welche wiederum aus Elementarteilchen zusammengesetzt sind. Diese Elementarteilchen, wie etwa das Elektron, verhalten sich bei genauer Betrachtung nicht wie reine Punktteilchen, sondern weisen auch Welleneigenschaften auf. Das Studium dieser Welleneigenschaften hat bei der Entwicklung der Quantenmechanik, die heutzutage zur realistischen Beschreibung mikroskopischer Teilchen verwendet wird, eine entscheidende Rolle gespielt.

Ein klassisches Experiment zum Nachweis von Welleneigenschaften ist das in Abbildung 6 allgemein skizzierte Doppelspaltexperiment /6/. Dabei fällt eine ebene Welle auf einen Doppelspalt, hinter dem ein Beobachtungsschirm positioniert wird. Durch den Doppelspalt wird die Struktur der ebenen Welle modifiziert, das heißt, hinter dem Doppelspalt bildet sich keine weitere ebene Welle, sondern ein charakteristisches Interferenzmuster aus. Dieses Muster kommt durch eine für Wellen typische Überlagerung zustande und läßt sich am Beobachtungsschirm ablesen. Es stellt ein Maß für die Amplitude der sich hinter dem Doppelspalt überlagernden Wellenanteile dar. Generell gilt, daß bei dem Doppelspaltexperiment der Abstand der zwei Spalte in der Größenordnung der Wellenlänge der einfallenden Welle liegen sollte.

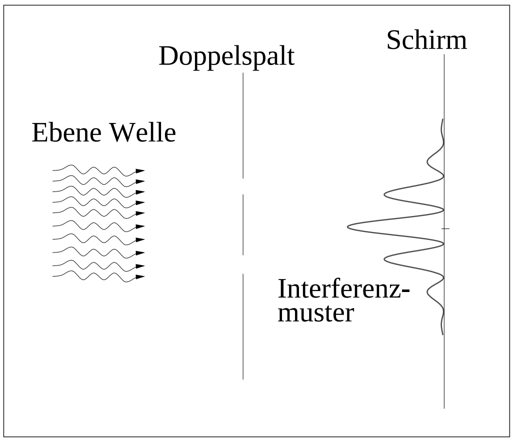


*Abb. 6*
*Beim Doppelspaltexperiment fällt eine ebene Welle auf einen Doppelspalt. Die durch den Doppelspalt dringenden Wellenanteile überlagern sich zu einem charakteristischen Interferenzmuster, dessen Form und Intensität sich auf einem Beobachtungsschirm ablesen lassen.*

Das Doppelspaltexperiment kann zum Beispiel mit Wasserwellen in einem kleinen Wasserbecken und einem Spaltabstand im Zentimeterbereich, also im Bereich von $10^{-2}$ Metern, durchgeführt werden. Das Interferenzmuster ergibt sich dann aus der Schwingungsamplitude der Wasseroberfläche an den jeweiligen Punkten am Beobachtungsschirm. Wird das Doppelspaltexperiment mit Laserlicht als einfallender Wellenform durchgeführt, sollte der Spaltabstand etwa $10^{-6}$ Meter betragen. Dann läßt sich das Interferenzmuster als Intensität des auf den Beobachtungsschirm fallenden Lichtes ablesen.

Nun kann das Spaltexperiment auch mit Materieteilchen durchgeführt werden. Dazu wird ein Strahl von Materieteilchen, zum Beispiel ein Elektronenstrahl, auf ein Gitter mit einem Spaltabstand der Größenordnung $10^{-10}$ Meter gelenkt. Derartig kleine Spaltabstände können durch Kristallgitter realisiert werden. Auf dem Beobachtungsschirm läßt sich dann auch ein Interferenzmuster erkennen, welches analog zu dem von Wasser- oder Lichtwellen aussieht. Das Muster auf dem Beobachtungsschirm ist in diesem Fall aber ein Maß für die Wahrscheinlichkeit, daß ein Materieteilchen an einer bestimmten Position auf den Schirm trifft. Diese Aufenthaltswahrscheinlichkeit entspricht damit der Intensität einer auf den Schirm treffenden Welle.

Das Doppelspaltexperiment mit Materieteilchen sowie ergänzende Experimente führten zu dem Schluß, daß mikroskopische Materieteilchen, wie etwa ein Elektron, im Rahmen der Quantenmechanik vollständig durch *Wellenfunktionen* $\Psi(\boldsymbol{r},t)$ beschrieben werden können[2)].

2) Hier und im folgenden werden innerhalb mathematischer Ausdrücke auftretende dreikomponentige Größen, wie etwa der Ortsvektor $\boldsymbol{r}$ oder der Impuls $\boldsymbol{p}$, durch fettgedruckte Symbole gekennzeichnet.

Eine Wellenfunktion ist eine Funktion, die vom Ort $\boldsymbol{r}$ und der Zeit $t$ abhängt und komplexe Werte annimmt. Für ein mikroskopisches Teilchen mit *festgelegtem* Impuls $\boldsymbol{p}$ und *festgelegter* Energie $E$ ist die Wellenfunktion $\Psi(\boldsymbol{r},t)$ von der idealisierten Form

$$\Psi(\boldsymbol{r},t) = \Psi_0 \exp\left(\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r} - Et)\right) \tag{11}$$

mit $\hbar$ einer Naturkonstanten der Dimension einer Wirkung, $\hbar = h/2\pi \approx 1.0546 \times 10^{-34} Js$ und $i$ der imaginären Einheit.

Die Form (11) einer ebenen Welle für die Wellenfunktion $\Psi(\boldsymbol{r},t)$ ist idealisiert, da Impuls und Energie eines mikroskopischen Teilchens in der Regel eine gewisse „Unschärfe" besitzen und daher nicht genau festgelegt sind. Dementsprechend werden mikroskopische Teilchen allgemeiner durch sogenannte Wellenpakete beschrieben, die sich aus einer Überlagerung ebener Wellen mit jeweils verschiedenen Impulsen und Energien ergeben. Ein Wert $\Psi(\boldsymbol{r},t)$ hat keine *direkte* physikalische Bedeutung, sein Betragsquadrat entspricht aber der Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines mikroskopischen Teilchens. Konkret bedeutet nämlich

$$P(\boldsymbol{r},t) = |\Psi(\boldsymbol{r},t)|^2 d^3r \tag{12}$$

die Wahrscheinlichkeit, ein durch $\Psi(\boldsymbol{r},t)$ charakterisiertes Teilchen zur Zeit $t$ im Volumen $d^3r$ zu finden.

Die Wellenfunktion $\Psi(\boldsymbol{r},t)$ der Gleichung (11) hat die Struktur

$$\Psi(\boldsymbol{r},t) = \Psi_0 \exp(i\theta) \tag{13}$$

mit

$$\theta(\boldsymbol{r},t) = (\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r} - Et)/\hbar. \tag{14}$$

Damit ist $\Psi_0$ die *Amplitude* und $\theta(\boldsymbol{r},t)$ die *Phase* der Wellenfunktion. Die physikalische Information liegt folglich in der Phase $\theta(\boldsymbol{r},t)$, welche die charakterisierenden Größen $\boldsymbol{p}$ und $E$ enthält. Beide Größen können nach (14) durch Differenzbildung aus der Phase erhalten werden.

An dieser Stelle führen wir zur Bezeichnung eines Differentials bzw. einer Differenz neben dem Symbol $d$ noch das Symbol $\partial$ ein. Dieses wird immer dann eingesetzt, wenn eine physikalische Größe von mehr als einer Variablen abhängt, aber die Differenz in Bezug auf genau *eine* Variable beschrieben werden soll. So hängt die Phase $\theta$ sowohl vom Ort $\boldsymbol{r}$ wie auch von der Zeit $t$ ab. Die Differenzbildung in Bezug auf jeweils den Ort oder die Zeit ergibt sich dann aus (14) gemäß

$$\boldsymbol{p} = \hbar\frac{\partial\theta}{\partial\boldsymbol{r}}, \qquad E = -\hbar\frac{\partial\theta}{\partial t}. \tag{15}$$

Die physikalische Beschreibung eines mikroskopischen Teilchens erfordert daher die Definition der Phasendifferenz $\partial\theta$. Und diese ist, wir ahnen es bereits nach den Bemerkungen des letzten Kapitels, nicht ganz einfach zu definieren.

### *Das Referenzsystem einer Wellenphase – und wie Phasendifferenzen an einem Punkt definiert werden*

Nehmen wir für den Anfang an, daß wir einer Wellenfunktion $\Psi$ an *einem* Ort $r$ zu *einer* Zeit $t$ eine bestimmte Phase $\theta$ zuweisen möchten. Die Phase ist charakterisiert durch einen Winkel innerhalb des Intervalls $[0, 2\pi[$, also $0 \leq \theta < 2\pi$. Zwar sind prinzipiell beliebige Werte möglich, aber Werte, die sich um ein Vielfaches von $2\pi$ unterscheiden, sind zu identifizieren, so daß die Beschränkung auf das Intervall $[0, 2\pi[$ ausreicht.

Um nun der Phase $\theta$ einen festen Wert zuzuweisen, benötigen wir ein Referenzsystem, welches einen Referenzwinkel festlegt. Diesen Referenzwinkel bezeichnen wir mit $\beta_a$. Wie die Zuweisung nun genau funktioniert, ist in Abbildung 8 verdeutlicht. Dort ist eine Wellenfunktion als geschwungene Linie dargestellt. Die Pfeilspitze soll symbolisieren, daß die Wellenfunktion durch eine bestimmte Richtung und daher durch einen Phasenwinkel $\theta$ innerhalb des Intervalls $[0, 2\pi[$ charakterisiert ist. Diesen Phasenwinkel bestimmen wir mittels eines Referenzsystems, welches auch durch einen Pfeil symbolisiert und folglich auch durch eine bestimmte Richtung und einen bestimmten Phasenwinkel charakterisiert ist. Als Referenzwinkel wird nun diesem Referenzsytem ein Winkel $\beta_a$ zugeordnet. Die Wahl von $\beta_a$ ist a priori willkürlich. Eine spezielle und praktische Wahl wäre zum Beispiel $\beta_a = 0$.

Welchen Wert hat nun die Phase $\theta$ der Wellenfunktion? Hierzu wird der Winkel zwischen der Wellenfunktion und dem Referenzsystem abgelesen. Diesen Winkel bezeichnen wir mit $\theta^a$. Der Winkel $\theta^a$ ist bezogen auf das Referenzsystem bzw. den Referenzwinkel $\beta_a$. Somit ist $\theta^a$ als Komponente zur Basis $\beta_a$ zu verstehen. Komponente $\theta^a$ und Basis $\beta_a$ ergeben die Phase $\theta$ gemäß

$$\theta = \theta^a + \beta_a. \tag{16}$$

Bezogen auf die Wellenfunktion $\Psi$ bedeutet dies

$$\Psi = \Psi_0 \exp(i\theta) = \Psi_0 \exp\big(i(\theta^a + \beta_a)\big)$$
$$= \Psi_0 \exp(i\theta^a)\exp(i\beta_a). \tag{17}$$

Die Wellenfunktion ist daher von der Form (5)

$$\Psi = \Psi^a e_a, \tag{18}$$

mit den Entsprechungen

$$\Psi^a = \Psi_0 \exp(i\theta^a) \quad \text{(Komponente)} \tag{19}$$

und

$$e_a = \exp(i\beta_a) \quad \text{(Referenzsystem).} \tag{20}$$

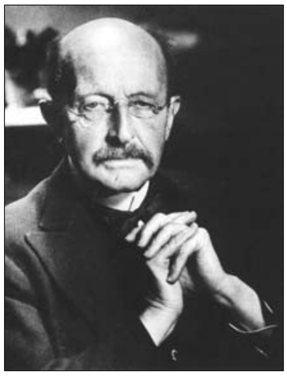

*Abb. 7*
*Max Planck (1858-1947, Nobelpreis 1918, oben) wird gemeinhin als Urvater der Quantentheorie angesehen. Nach ihm ist das Plancksche Wirkungsquantum h benannt. Diese Naturkonstante charakterisiert die Größe der im Mikrokosmos auftretenden diskreten Energiepakete. Die für die Quantentheorie wesentliche Dynamik von quantenmechanischen Wellenfunktionen wird durch die von Erwin Schrödinger (1887-1961, Nobelpreis 1933, unten) aufgestellte und nach ihm benannte Schrödingergleichung geregelt.*

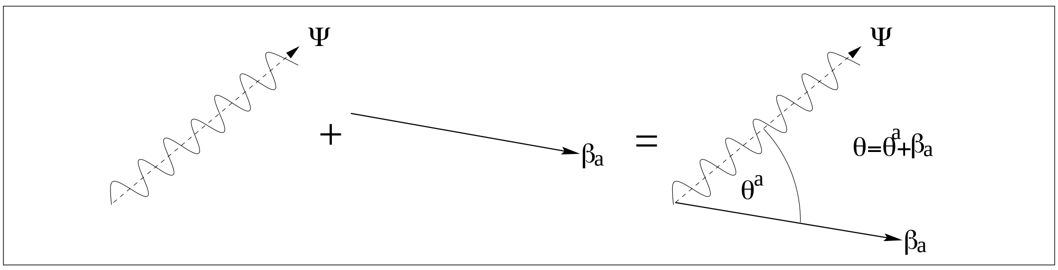


*Abb. 8*
*Mit Hilfe eines Referenzsystems, welches einen Referenzwinkel $\beta_a$ festlegt, kann die Phase einer Wellenfunktion zu $\theta = \theta^a + \beta_a$ bestimmt werden.*

Die Wahl eines Referenzsystems für eine Phase ist allerdings nicht eindeutig. Dies wird in Abbildung 9 verdeutlicht. Es besteht nämlich die *Eichfreiheit*, verschiedene Referenzsysteme zu wählen, die sich jeweils durch eine Drehung unterscheiden. Die Wahl eines bestimmten Referenzsystems wird auch als die Wahl einer *Eichung* bezeichnet. In dieser Sprache können wir festhalten, daß der Wert $\theta^a$ eine *eichabhängige* Größe darstellt, da er von der Eichung (= der Wahl eines Referenzsystems) abhängt.

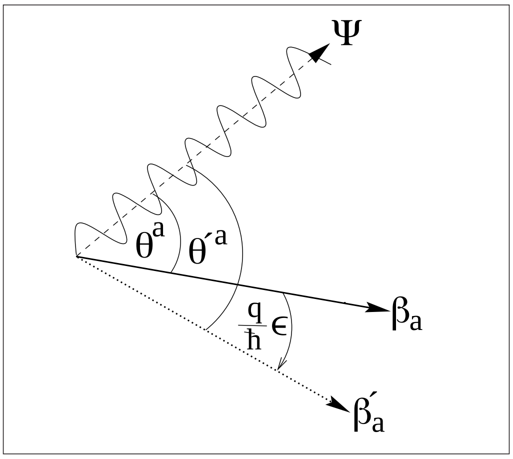


Abb. 9
Die Komponente $\theta^a$ der Wellenfunktion $\Psi$ hängt von der Wahl eines Referenzsystems ab. Eine Eichtransformation entspricht dem Übergang zwischen zwei gleichberechtigten Referenzsystemen. Dieser Übergang wird durch eine ebene Rotation um den Winkel $(q/\hbar)\epsilon$ vermittelt.

Eine mit $\delta\epsilon$ bezeichnete Eichtransformation, d. h. der Wechsel von einem Referenzsystem $\beta_a$ zu einem anderen Referenzsystem $\beta'_a$, wirkt sich auf die Komponente $\theta^a$ des Phasenwinkels folgendermaßen aus:

$$\delta_\epsilon\theta^a := \theta'^a - \theta^a = \frac{q}{\hbar}\epsilon. \qquad (21)$$

Die dimensionslose Winkeldifferenz $\theta'^a - \theta^a$ ist hier, etwas willkürlich erscheinend, als $q\epsilon/\hbar$ bezeichnet worden. Diese Bezeichnungsweise entspricht den in der Quantenelektrodynamik üblichen Konventionen. Darin ist $q$ eine Konstante der Dimension einer elektrischen Ladung (Coulomb). Folglich hat $\epsilon$ die Dimension einer Wirkung pro Ladung (Joule • Sekunde/Ladung). Die Bedeutung einer Eichtransformation (21) mag ziemlich trivial erscheinen: Wird zwischen zwei Referenzsystemen, die sich um einen Winkel $(q/\hbar)\epsilon$ unterscheiden, gewechselt, so ändert sich die Komponente $\theta^a$ des Phasenwinkels gerade um den Wert $(q/\hbar)\epsilon$.

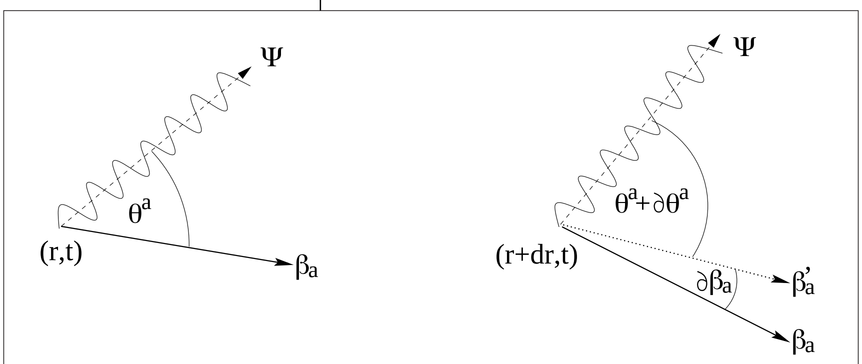


Abb. 10
Festlegung paralleler Referenzsysteme an räumlich getrennten Punkten (**r**,t) und (**r**+d**r**,t). Links, am Punkt (**r**,t) ergibt sich der Phasenwinkel zu $\theta = \theta_a + \beta_a$. Rechts, für den Punkt (**r**+d**r**,t) ergibt sich $\theta = \theta^a + \partial\theta^a + \beta_a + \partial\beta_a$. Vergleiche hierzu auch die Erklärungen im Text.

Das Referenzsystem $\beta_a$ kann auch benutzt werden, um das Referenzsystem $\beta'_a$ zu eichen. Hierzu wird der Wert $\beta'_a$ durch

$$\beta'_a = \beta_a - \frac{q}{\hbar}\epsilon \qquad (22)$$

festgelegt. Damit ergibt sich das Verhalten von $\beta_a$ unter Eichtransformationen zu

$$\delta_\epsilon\beta_a := \beta'_a - \beta_a = -\frac{q}{\hbar}\epsilon. \qquad (23)$$

Der Wert $\theta$ wird damit zu einer eichunabhängigen Größe:

$$\delta_\epsilon\theta = \delta_\epsilon\theta^a + \delta_\epsilon\beta_a$$
$$= \frac{q}{\hbar}\epsilon - \frac{q}{\hbar}\epsilon = 0. \qquad (24)$$

Allerdings hat der Wert $\theta$ trotz seiner Eichunabhängigkeit keine absolute Bedeutung, da er wegen $\theta = \theta^a + \beta_a$ von der anfänglichen Wahl des Referenzwinkels $\beta_a$ abhängt.

Etwas anders verhält es sich mit der *Differenz* zweier unterschiedlicher Phasen $\theta_1$ und $\theta_2$ an einem Punkt. Beide Phasen können durch ein gemeinsames Referenzsystem $\beta_a$ charakterisiert werden

$$\theta_1 = \theta_1^a + \beta_a, \quad \theta_2 = \theta_2^a + \beta_a. \qquad (25)$$

Differenzbildung ergibt dann

$$\theta_1 - \theta_2 = \theta_1^a - \theta_2^a, \qquad (26)$$

d. h. die Differenz $\theta_1 - \theta_2$ ist sowohl unabhängig von $\beta_a$ als auch, wegen

$$\delta_\epsilon(\theta_1 - \theta_2) = \delta_\epsilon\theta_1 - \delta_\epsilon\theta_2 = 0 - 0 = 0, \qquad (27)$$

eine eichunabhängige Größe.

***Wie Eichfelder die Phasendifferenz zwischen zwei Punkten festlegen***

Bisher haben wir nur die Phase $\theta$ an *einem* Punkt in Raum und Zeit betrachtet. Jetzt werden wir beschreiben, wie sich die Phase $\theta$ zwischen *zwei verschiedenen* Punkten der Raumzeit ändert. Dazu konzentrieren wir uns zuerst auf zwei Punkte $(\boldsymbol{r},t)$ und $(\boldsymbol{r}+d\boldsymbol{r},t)$, die durch eine sehr kleine Ortsdifferenz $d\boldsymbol{r}$ räumlich voneinander getrennt sind.

Rein rechnerisch ergibt sich aus (16) für die Differenz $\partial\theta/\partial\boldsymbol{r}$ zwischen zwei Punkten $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{r}+d\boldsymbol{r}$ die Beziehung

$$\frac{\partial\theta}{\partial\boldsymbol{r}} = \frac{\partial\theta^a}{\partial\boldsymbol{r}} + \frac{\partial\beta_a}{\partial\boldsymbol{r}}, \qquad (28)$$

d. h. die Änderung des Phasenwinkels $\theta$ setzt sich additiv aus der Änderung seiner Komponente und der Änderung des Referenzwinkels bzw. des Referenzsystems zusammen. Diese Gleichung (28) werden wir nun geometrisch interpretieren.

Dazu überlegen wir uns, wie die Differenz $\partial\theta/\partial\boldsymbol{r}$ symbolisch konstruiert werden kann. Die Konstruktion erfolgt schrittweise, vergleiche hierzu Abbildung 10:

1. Zuerst wird die Phase $\theta(\boldsymbol{r},t)$ am Punkt $(\boldsymbol{r},t)$ gemäß des vorherigen Abschnittes durch ein

Referenzsystem mit Referenzwinkel $\beta_a$ gemäß $\theta(\boldsymbol{r},t) = \theta^a(\boldsymbol{r},t) + \beta_a(\boldsymbol{r},t)$ bestimmt.

2. Am Punkt $(\boldsymbol{r}+d\boldsymbol{r},t)$ wird nun ein beliebiges Referenzsystem mit Referenzwinkel $\beta'_a$ gewählt. In Abbildung 10 ist dieses beliebige Referenzsystem gepunktet dargestellt. Mit diesem kann der Wert

$$\theta'^a(\boldsymbol{r}+d\boldsymbol{r},t) = \theta^a(\boldsymbol{r},t) + \partial\theta^a \tag{29}$$

abgelesen werden. Dieser Wert hat aber noch keine direkte physikalische Relevanz, da das zugehörige Referenzsystem beliebig gewählt worden ist.

3. Es existiert aber am Punkt $(\boldsymbol{r}+d\boldsymbol{r},t)$ ein Referenzsystem, welches in Bezug auf das Referenzsystem bei $(\boldsymbol{r},t)$ *ungeändert* ist. Mathematisch bezeichnet man solch ein ungeändertes Referenzsystem als *paralleles* Referenzsystem. Es wird aus dem willkürlichen Referenzsystem durch Rotation um einen Winkel $\partial\beta_a$ erhalten und besitzt den *gleichen* Phasenwinkel $\beta_a(\boldsymbol{r}+d\boldsymbol{r},t) = \beta_a(\boldsymbol{r},t)$ wie das Referenzsystem am Punkt $(\boldsymbol{r},t)$. Bezogen auf dieses parallele Referenzsystem ergibt sich die Komponente des Phasenwinkels zu

$$\theta^a(\boldsymbol{r}+d\boldsymbol{r},t) = \theta^a(\boldsymbol{r},t) + \partial\theta^a + \partial\beta_a. \tag{30}$$

Zusammenfassend erhalten wir

$$\theta(\boldsymbol{r},t) = \theta^a(\boldsymbol{r},t) + \beta_a(\boldsymbol{r},t), \tag{31}$$

$$\begin{aligned}\theta(\boldsymbol{r}+d\boldsymbol{r},t) &= \theta'^a(\boldsymbol{r}+d\boldsymbol{r},t) + \beta'_a(\boldsymbol{r}+d\boldsymbol{r},t)\\ &= \theta^a(\boldsymbol{r},t) + \partial\theta^a + \beta_a(\boldsymbol{r},t) + \partial\beta_a\end{aligned} \tag{32}$$

und damit wieder die Beziehung (28)

$$\frac{\partial\theta}{\partial\boldsymbol{r}} = \frac{\theta(\boldsymbol{r}+d\boldsymbol{r},t) - \theta(\boldsymbol{r},t)}{\partial\boldsymbol{r}} = \frac{\partial\theta^a}{\partial\boldsymbol{r}} + \frac{\partial\beta_a}{\partial\boldsymbol{r}}. \tag{33}$$

Die Beziehung (33) bestimmt die Differenz $\partial\theta/\partial\boldsymbol{r}$. Konkret müssen dazu die Beiträge $\partial\theta^a/\partial\boldsymbol{r}$ und $\partial\beta_a/\partial\boldsymbol{r}$ bekannt sein. Und dies führt auf die bereits besprochene Problematik: Wir können zwar die Änderung der Komponente $\partial\theta^a/\partial\boldsymbol{r}$ durch geometrisches Ablesen von Winkeln bestimmen, aber die Differenz $\partial\beta_a/\partial\boldsymbol{r}$ ist a priori unbestimmt. Denn wer oder was sagt uns, welche Referenzsysteme an verschiedenen Punkten gegenseitig unverändert bzw. parallel sind?

An dieser Stelle betritt das elektromagnetische Feld die Bühne. Gemäß Gleichung (9) wird die Differenz $\partial\beta_a/\partial\boldsymbol{r}$ des Referenzsystems durch ein vektorielles physikalisches Wechselwirkungsfeld bestimmt:

$$\frac{\partial\beta_a}{\partial\boldsymbol{r}} := -\frac{q}{\hbar}A. \tag{34}$$

Hier ist der Faktor $q/\hbar$, ähnlich wie in (21), aus Konventionsgründen gewählt worden. Wir erhalten somit

$$\boxed{\frac{\partial\theta}{\partial\boldsymbol{r}} = \frac{\partial\theta^a}{\partial\boldsymbol{r}} - \frac{q}{\hbar}A.} \tag{35}$$

Rückblickend auf Gleichung (15) erkennen wir jetzt, daß erst mit Hilfe des Feldes $\boldsymbol{A}$ der Impuls $\boldsymbol{p}$ eines mikroskopischen Teilchens durch die Wellenfunktion definiert werden kann.

Bisher haben wir die Differenz $\partial\theta/\partial\boldsymbol{r}$ zwischen zwei raumartig getrennten Punkten $(\boldsymbol{r},t)$ und $(\boldsymbol{r}+d\boldsymbol{r},t)$ betrachtet. Ganz analog können wir auch die Differenz $\partial\theta/\partial t$ zwischen zwei zeitartig getrennten Punkten $(\boldsymbol{r},t)$ und $(\boldsymbol{r},t+dt)$ untersuchen. Dies führt auf die Beziehung

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\partial\theta^a}{\partial t} + \frac{\partial\beta_a}{\partial t} \tag{36}$$

Die Unbestimmtheit von $\partial\beta_a/\partial t$ erfordert dann die Einführung eines skalaren physikalischen Wechselwirkungsfeldes $\Phi$

$$\frac{\partial\beta_a}{\partial t} := \frac{q}{\hbar}\Phi, \tag{37}$$

und wir erhalten das Resultat

$$\boxed{\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\partial\theta^a}{\partial t} + \frac{q}{\hbar}\Phi.} \tag{38}$$

Auch hier erkennen wir im Hinblick auf Gleichung (15), daß die Energie $E$ eines mikroskopischen Teilchens nur mit Hilfe des Feldes $\Phi$ definiert werden kann.

Ein Vergleich von (35) mit (38) zeigt, daß wir verschiedene Vorzeichen vor den Feldern $\boldsymbol{A}$ und $\Phi$ gewählt haben. Dies erscheint an dieser Stelle als nicht konsequent, ist aber auch eine Konvention, die im Hinblick auf eine Verschmelzung von $\boldsymbol{A}$ und $\Phi$ zu einer relativistisch kovarianten vierkomponentigen Größe gewählt wird.

Zum Ende dieses Abschnittes bemerken wir noch, daß die eingeführten Felder $\boldsymbol{A}$ und $\Phi$ nicht eichinvariant sind. Es folgt nämlich aus (23) und den Festlegungen (34), (37) für das Verhalten von $\boldsymbol{A}$ und $\Phi$ unter Eichtransformationen:

$$\delta_\epsilon\left(\frac{\partial\beta_a}{\partial\boldsymbol{r}}\right) = -\frac{q}{\hbar}\frac{\partial\epsilon}{\partial\boldsymbol{r}} \quad\Rightarrow\quad \delta_\epsilon\boldsymbol{A} = \frac{\partial\epsilon}{\partial\boldsymbol{r}}, \tag{39}$$

$$\delta_\epsilon\left(\frac{\partial\beta_a}{\partial t}\right) = -\frac{q}{\hbar}\frac{\partial\epsilon}{\partial t} \quad\Rightarrow\quad \delta_\epsilon\Phi = -\frac{\partial\epsilon}{\partial t}. \tag{40}$$

## DAS ELEKTROMAGNETISCHE FELD ALS EICHFELD

Wir haben im letzten Abschnitt Eichfelder $\boldsymbol{A}$ und $\Phi$ eingeführt, um parallele bzw. unveränderte Referenzsysteme an verschiedenen Punkten definieren zu können. Dies war zwar allgemein möglich, aber konkret hilft es nicht weiter, solange wir die *Werte* von $\boldsymbol{A}$ und $\Phi$ nicht kennen. Aber wie erhalten wir diese Werte?

### *Wie die Grundgleichungen der Elektrodynamik die Werte von Eichfeldern festlegen*

Es stellt sich heraus, daß die Werte von $\boldsymbol{A}$ und $\Phi$ aus mathematischen Gleichungen folgen, welche *Naturgesetze* darstellen. Und diese Naturgesetze sind uns gleichsam vorgegeben.

Zum Glück haben die Physiker im Laufe der Zeit herausgefunden, wie auf der Grundlage von wenigen fundamentalen Prinzipien die Naturgesetze, welche die Werte von Eichfeldern festlegen, konstruiert werden können. Das allgemeine Schema, angewendet auf die Größen $\boldsymbol{A}$ und $\Phi$, sieht folgendermaßen aus /7/:

Abb. 11
Yakir Aharonov (geb. 1933) und David Bohm (1917-1992, siehe Bild) schlugen 1959 ein Experiment vor, welches die Kopplung des elektromagnetischen Potentials an Materiewellen bestätigt /8/.

- Um nicht in die Gefahr zu kommen, die Gesetze der Relativitätstheorie zu verletzen, werden $\boldsymbol{A}$ und $\Phi$ zu einer relativistisch kovarianten, vierkomponentigen Größe $A$ zusammengefaßt, $\boldsymbol{A},\Phi \Rightarrow A$.
- Aus dem Feld $A$ wird anschließend eine Energiedichte $\mathcal{L}$ konstruiert. Dies geschieht am einfachsten, indem das Differential $dA$ mit einer speziellen Multiplikation $\wedge^*$ mit sich selbst multipliziert wird. Das entstehende Produkt entspricht einer Bewegungsenergie für das Feld $A$. Zur Energiedichte gehört dann noch ein zweiter Term, der das Feld $A$ mit den Materieteilchen verknüpft. Dieser zweite Term kann auch aus dem Eichprinzip abgeleitet werden. Er ergibt sich aus der Forderung, daß die Energiedichte der Materieteilchen eichinvariant unter den Eichtransformationen $\delta_e$ ist. Als Resultat erhalten wir
$$\mathcal{L} \sim dA\wedge{}^*dA + A\wedge J. \qquad (41)$$
Die dort auftretende Größe $J$ hat vier Komponenten und enthält die elektrische Stromdichte $\boldsymbol{J}$ und die elektrische Ladungsdichte $\rho$.
- Das Feld $A$ soll nun so gewählt werden, daß es die Energiedichte $\mathcal{L}$ minimiert. Variation von $\mathcal{L}$ in Abhängigkeit von $A$ ergibt dann, daß $A$ die Gleichung
$$\boxed{d{}^*dA = J} \qquad (42)$$
erfüllen muß. Diese Gleichung ist gleichbedeutend mit den *inhomogenen Maxwellschen Gleichungen.*
- Als eine rein mathematische Konsistenzbedingung, die automatisch erfüllt ist, muß zusätzlich die Gleichung
$$\boxed{ddA = 0} \qquad (42)$$
gelten. Diese Gleichung beschreibt die *homogenen Maxwellgleichungen.*

*Die inhomogenen und die homogenen Maxwellgleichungen stellen Grundgleichungen der Elektrodynamik dar. Es sind Differentialgleichungen, die wir innerhalb einer bestimmten Eichung lösen müssen, um konkrete Werte für die Eichfelder* $\boldsymbol{A}$ *und* $\Phi$ *zu erhalten.*

Wer mit der Elektrodynamik ein wenig vertraut ist, der erkennt mit Blick auf die Maxwellschen Gleichungen (42) und (43), daß innerhalb der Elektrodynamik die Größen $\boldsymbol{A}$ und $\Phi$, bzw. die Größe $A$, als *elektromagnetische Potentiale* wohlbekannt sind. Die eingeführten Eichfelder und die elektromagnetischen Potentiale sind demnach als identisch anzusehen! Damit haben wir ein Beispiel dafür erhalten, daß sich die Grundgleichungen eines Wechselwirkungsfeldes (hier des elektromagnetischen Feldes) mit Hilfe des Eichprinzips ableiten lassen.

***Potentiale versus Feldstärken: Was beschreibt eine Wechselwirkung?***

Die beobachtbaren Kraftwirkungen des elektromagnetischen Feldes lassen sich am bequemsten durch die elektrische Feldstärke $\boldsymbol{E}$ und die magnetische Feldstärke $\boldsymbol{B}$ beschreiben. So gilt das Gesetz der Lorentzkraft
$$F_L = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}), \qquad (44)$$
welches die Kraftwirkung $\boldsymbol{F}_L$ beschreibt, die ein mit der elektrischen Ladung $q$ versehenes Teilchen innerhalb eines elektromagnetischen Feldes erfährt. Beide Feldstärken $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ können zu einer einzigen relativistischen Größe $F$ zusammengefaßt werden, die sich wiederum durch Differentialbildung aus dem relativistischen Potential $A$ ergibt. Dieser Zusammenhang zwischen $F$ und $A$ läßt sich mathematisch kompakt durch die Gleichung
$$F = dA \qquad (45)$$
präzisieren. Damit können wir die Maxwellschen Gleichungen (42) und (43) auch in der Form
$$d{}^*F = J \quad \text{und} \quad dF = 0 \qquad (46)$$
schreiben.

Es stellt sich nun die Frage, welche Größe in (45) das elektromagnetische Feld auf fundamentalere Weise repräsentiert. Die Feldstärke $F$ oder das Potential $A$? Für die Feldstärke $F$ spricht, daß sie einer physikalischen Messung direkt zugänglich ist. Weiterhin ist die Feldstärke eichunabhängig, also unabhängig von den eingeführten und willkürlich wählbaren Referenzsystemen. Dies trifft auf das Potential $A$ nicht zu, wie die Gleichungen (39) und (40) zeigen. Für das Potential $A$ spricht nun aber, daß es aufgrund des Eichprinzips in deduktiver Weise eingeführt werden kann und somit die Struktur der Elektrodynamik begründet. Weiterhin kann auch die physikalische Wirkung des Potentials $A$ experimentell nachgewiesen werden. Ein entsprechendes Experiment ist das *Aharonov-Bohm-Experiment*, ein modifiziertes Doppelspaltexperiment, welches in Abbildung 12 skizziert ist.

Beim Aharonov-Bohm-Experiment wird ein sehr dünner Zylinder, innerhalb dessen ein magnetisches Feld $\boldsymbol{B}$ erzeugt wird, hinter dem Doppelspalt positioniert. Es läßt sich dann rechnerisch bestätigen, daß dieses Magnetfeld $\boldsymbol{B}$ von einem elektromagnetischen Potential $\boldsymbol{A}$ begleitet wird, welches aber nicht auf den Zylinder beschränkt ist, sondern sich im ganzen Raum ausbreitet. Elektronen, die als Materiewellen den Doppelspalt passieren, durchqueren daher auf dem Weg zum Beobachtungsschirm ein Gebiet, in dem die Feldstärke $\boldsymbol{B}$ verschwindet, aber ein Potential $\boldsymbol{A}$ vorhanden ist. Wird nun das Magnetfeld $\boldsymbol{B}$ in seiner Stärke verändert, so verändert sich auch das Potential $\boldsymbol{A}$. Das Experiment zeigt nun, daß durch eine solche Veränderung des elektromagnetischen Feldes das Interferenzmuster beeinflußt wird. Diese Beeinflussung läßt sich durch die Kopplung von $\boldsymbol{A}$ an die Phase $\theta$ der Materiewellen genau vorhersagen. Das Magnetfeld $\boldsymbol{B}$ kann für diese Kopplung nicht verantwortlich sein, da es sich nicht im Bereich der Materiewellen befindet. Der Einfluß des elektromagnetischen Feldes auf das Interferenzmuster kann nur durch die Wirkung des Potentials $\boldsymbol{A}$ erklärt werden /9/.

Die Tatsache, daß zu einem direkten Nachweis der Wirkung des Potentials $\boldsymbol{A}$ ein Doppelspaltex-

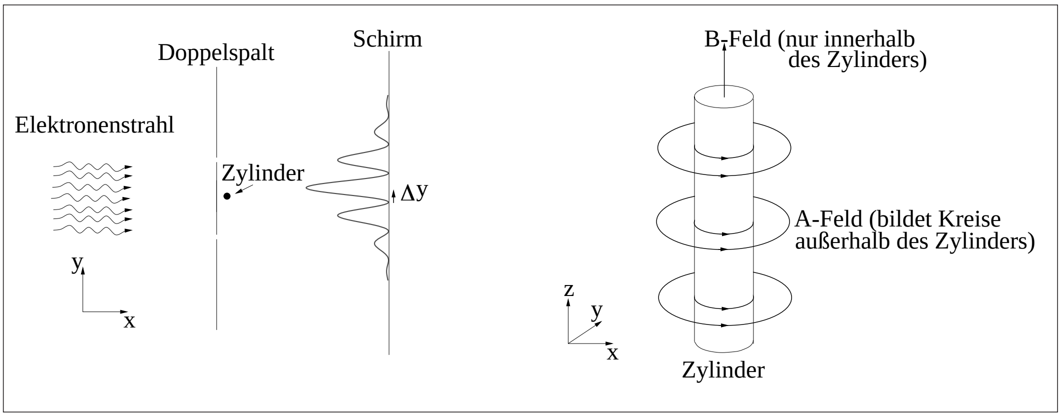


*Abb. 12*
*Schematischer Aufbau des Aharonov-Bohm-Experiments: Wie im Doppelspaltexperiment fällt ein Elektronenstrahl auf einen Doppelspalt. Hinter diesem ist aber ein sehr dünner Zylinder positioniert, der ein Magnetfeld **B** enthält. Das zugehörige Potential **A** bildet um diesen Zylinder konzentrische Kreise. Wird **B**, und damit **A**, variiert, so verschiebt sich dadurch das Interferenzmuster auf dem Schirm in y-Richtung um einen bestimmten Betrag Δy. Dieser Effekt wird durch die Kopplung des **A**-Feldes an die Phase der Elektronenwellen erklärt.*

periment erforderlich ist, deutet auf die Relevanz des Potentials im mikroskopischen Bereich hin. Das bedeutet, daß wir in unserer alltäglichen, makroskopischen Welt das elektromagnetische Feld sehr gut durch die Feldstärken $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$, bzw. durch $F$, beschreiben können. Erst im Bereich der Quantenphysik läßt sich die fundamentale Bedeutung und Notwendigkeit der Potentiale $\boldsymbol{A}$ und $\Phi$, bzw. $A$, erkennen.

Innerhalb der quantisierten Version der Elektrodynamik, der Quantenelektrodynamik, wird das elektromagnetische Potential als Teilchen („Photon") interpretiert, welches die elektromagnetische Wechselwirkung vermittelt. Ganz allgemein läßt sich das Potential $\boldsymbol{A}$ nun in zwei Anteile aufspalten, einen *transversalen* Anteil $\boldsymbol{A}^T$ und einen *longitudinalen* Anteil $\boldsymbol{A}^L$. Es stellt sich dabei heraus, daß $\boldsymbol{A}^T$ eine eichinvariante Größe ist. Der Anteil $\boldsymbol{A}^L$ und das Potential $\Phi$ sind dahingegen nicht eichinvariant und daher auch nicht direkt beobachtbar /10/.

Im Teilchenbild entspricht der transversale Anteil $\boldsymbol{A}^T$ experimentell beobachtbaren Photonen. Solche Photonen repräsentieren elektromagnetische Strahlungsfelder. Ein solches Strahlungsfeld ist auch das Licht, und die zugehörigen Photonen sind in diesem Fall die Lichtteilchen. Nebenbei bemerkt ist die Netzhaut des menschlichen Auges empfindlich genug, um einzelne Photonen wahrnehmen zu können. In einem stark abgedunkelten Raum machen sie sich als kurz aufblitzende Lichtpunkte bemerkbar.

Leider lassen sich die Feldanteile $\boldsymbol{A}^L$ und $\Phi$ nicht auf eine ähnlich anschauliche Weise interpretieren. Getrennt sind beide Anteile eichabhängig, aber in Kombination bilden sie eichinvariante, physikalische Größen, die mit der Vakuumenergie des elektromagnetischen Feldes zusammenhängen. Durch diese Energie kann das Vakuum, unter kurzzeitiger Verletzung der Erhaltung von Energie und Impuls, sogenannte *virtuelle* Photonen hervorbringen. Solche Photonen sind prinzipiell nicht direkt beobachtbar. Aber sie repräsentieren den statischen Anteil des elektromagnetischen Feldes und sind daher zur vollständigen Beschreibung des elektromagnetischen Feldes unverzichtbar.

## AUSBLICK

Phasendifferenzen von Materiewellen und das elektromagnetische Feld – wir haben nun gesehen wie beides miteinander zusammenhängt. Die Phasendifferenzen mögen uns dabei, zu Recht, viel abstrakter erscheinen als das elektromagnetische Feld. Diese Art von Abstraktion scheint sich noch zu steigern, wenn wir die Wechselwirkungsfelder der schwachen und starken Wechselwirkung betrachten. Auch diese Felder können mit Hilfe des Eichprinzips als Eichfelder deduktiv eingeführt werden. Und auch in diesem Fall beziehen sich die zugehörigen und zu bestimmenden Differenzen auf physikalische Größen, die im Mikrokosmos beheimatet sind. So hängt das Feld der schwachen Wechselwirkung mit der Differenz des sogenannten *Isospins* von Elementarteilchen zusammen. Und das Feld der starken Wechselwirkung bestimmt die Differenzen von *Farbladungen* der fundamentalen Quarks /11/.

Was aber ist mit den Differenzen, die uns aus dem Alltag vertraut sind, den räumlichen und zeitlichen Differenzen? Auch hier benötigen wir Eichfelder, die uns parallele Referenzsysteme zur vollständigen Differenzbildung definieren. Diese Eichfelder führen zur noch fehlenden fundamentalen Wechselwirkung, der Gravitation. Da die Eichfelder der Gravitation mit Raum und Zeit verknüpft sind, können sie auch Raum und Zeit beeinflussen. Dieser Einfluß der Gravitation auf Raum und Zeit ist von der allgemeinen Relativitätstheorie her wohlbekannt. Tatsächlich kann auch die allgemeine Relativitätstheorie auf die hier vorgestellte Weise aus dem Eichprinzip abgeleitet werden /12/.

Zum Glück ist die Gravitation auf unserer Erde und in unserem Sonnensystem nur relativ schwach ausgeprägt, ihr Einfluß auf räumliche und zeitliche Referenzsysteme ist im Alltag praktisch nicht zu merken. Wir sollten uns daher auch weiterhin auf unser Lineal und unsere Uhr verlassen können.

**Postskriptum:**
Die ausführliche wissenschaftliche Version dieser Arbeit (in englischer Sprache) wurde im Juni 2000 in Edinburgh auf der Tagung *Euro Electromagnetics*, einer der größten internationalen Konferenzen ihrer Art, mit dem *Best HPE paper award – best basic paper* ausgezeichnet (siehe auch Referenz /10/).

**Literatur**


/1/ F. Hund: Geschichte der physikalischen Begriffe, (Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1996).
/2/ H. Weyl: „Elektron und Gravitation“, Z. Phys. 56 (1929) 330.
/3/ L. O’Raifeartaigh: The Dawning of Gauge Theory (Princeton University Press, Princeton, 1997).
/4/ D. Bohm: Quantum Theory, (Prentice Hall, New York, 1951).
/5/ R. Gilmore: Alice im Quantenland – Eine Allegorie der modernen Physik, (Vieweg, Braunschweig, 1995).
/6/ L. Bergmann und C. Schäfer: Lehrbuch der Experimentalphysik, Bd. 1, Mechanik, Relativität, Wärme, 11. Auflage (Walter de Gruyter, Berlin, 1998).
/7/ W. Thirring: Lehrbuch der Mathematischen Physik, Bd.2, Klassische Feldtheorie, 2. Auflage (Springer, Wien, 1990).
/8/ Y. Aharonov and D. Bohm: „Significance of electromagnetic potentials in quantum theory“, Phys. Rev. 115 (1959) 484.
/9/ R.P. Feynman, R.B. Leighton, and M. Sands: The Feynman Lectures on Physics, Vol. II (Addison Wesley, Reading, 1964).
/10/ F. Gronwald and J. Nitsch: „The structure of the electromagnetic field as derived from first principles“, IEEE Antennas and Propagation Magazine 43 (August 2001) 64.
/11/ G. 't Hooft: in Teilchen, Felder und Symmetrien, 2. Auflage (Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1995), S. 40 ff.
/12/ F. Gronwald: „Metric – Affine Gauge Theory of Gravity I. Fundamental Structure and Field Equations“, Int. J. Mod. Phys. D6 (1997) 263.


**Dr. rer. nat. Frank Gronwald,**
geboren 1968 in Aachen, studierte von 1987 bis 1992 Physik an der Universität zu Köln und diplomierte in Theoretischer Physik. Während seiner Doktorandenzeit am Institut für Theoretische Physik in Köln verbrachte er als DAAD-Stipendiat drei Semester am Center for Particle Physics, University of Texas at Austin. Die Promotion erfolgte 1996 auf dem Gebiet klassischer und quantentheoretischer Gravitationstheorien. Nach einer Tätigkeit als Postdoktorand am Institut für Theoretische Physik in Köln ist er seit 1998 wissenschaftlicher Mitarbeiter und Assistent am Institut für Grundlagen der Elektrotechnik und Elektromagnetische Verträglichkeit der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg.
Seine Forschungsschwerpunkte liegen in der Anwendung feldtheoretischer Methoden zur Lösung von Problemstellungen innerhalb der Elektromagnetischen Verträglichkeit. Er ist Vorstandsmitglied des IEEE German Chapter on Electromagnetic Compatibility.

**Prof. Dr. rer. nat. habil Jürgen Nitsch**
studierte an der Universität zu Köln Physik und Mathematik. Von 1974 bis 1986 arbeitete er als wissenschaftlicher Assistent und Privatdozent am Institut für Theoretische Physik der Universität Köln. Dort erhielt er 1981 seine Venia Legendi und 1993 eine außerplanmäßige Professur. Von 1986 bis März 1997 war er Leiter des EMP-Analyse Dezernates im Wehrwissenschaftlichen Institut für Schutztechnologie in Munster. Während dieser Zeit verbrachte er ein Forschungsjahr am Air Force Research Laboratory in Albuquerque, New Mexico, USA.
Er ist Herausgeber und Koautor des Buches „Grundlagenprobleme der Modernen Physik“ und Herausgeber der Proceedings „International Symposium on EMC“, Magdeburg, 1999. Seit April ist er Ordinarius für Elektromagnetische Verträglichkeit und Theoretische Elektrotechnik an der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg. Seine derzeitigen Forschungsschwerpunkte umfassen die elektromagnetische Wechselwirkung mit komplexen Systemen und Kabeln, die Netzwerkanalyse und die numerische Feldtheorie. Seine Publikationsliste enthält mehr als hundert referierte Publikationen und Berichte zu Forschungsthemen aus der Kernphysik, der Allgemeinen Relativitätstheorie und der Elektrotechnik. Prof. Nitsch ist Senior Member der IEEE-Society, EMP-Fellow, Vorsitzender der Kommission E des URSI Landesausschusses der Bundesrepublik Deutschland und Mitarbeiter in der Forschungs- und Technologie-Organisation der NATO.