WÜRFEL, ZUFALL UND WAHRSCHEINLICHKEIT

EIN BLICK AUF DIE VORGESCHICHTE DER STOCHASTIK

Robert Ineichen

Vortrag anlässlich der „Magdeburger Stochastik-Tage 2002" vom 19. bis 22. März 2002 am Institut für Stochastik der Fakultät für Mathematik an der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

Es ist üblich, die Ursprünge der Wahrscheinlichkeitsrechnung in verschiedenen Arbeiten zu sehen, die im 17. Jahrhundert entstanden sind. Nun kann man sich natürlich fragen, ob nicht einige der Begriffe und Überlegungen, die heute zur Stochastik gehören, schon früher vorhanden gewesen sind. In dieser Arbeit versuchen wir, diese Frage zu beantworten: Wir skizzieren den Wahrscheinlichkeitsbegriff, der in der Antike, im Mittelalter und in der frühen Neuzeit zu finden ist und gehen der Beurteilung von Chancen durch Auszählen der günstigen Fälle und frühen Feststellungen von statistischer Regelmäßigkeit nach.

Wie die meisten mathematischen Disziplinen ist auch die *Stochastik* – unter diesem Namen fasst man ja seit einigen Jahrzehnten wieder Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik zusammen – nicht einfach in der heutigen, weitgehend vollendeten Form zur Welt gekommen. Als ihr Geburtsjahr wird oft das Jahr 1654 angesehen: In jenes Jahr fällt der berühmt gewordene Briefwechsel zwischen Blaise Pascal und Pierre de Fermat, in welchem Probleme dargestellt und richtig gelöst werden, die man heute in die Wahrscheinlichkeitsrechnung einreiht. Gegen Ende des 17. Jahrhunderts hat dann Jakob Bernoulli (1654-1705) seine *Ars conjectandi* geschrieben, die 1713 postum publiziert worden ist /1/. Mit dieser *Vermutungs- oder Mutmaßungskunst* – er selber sprach von *Ars conjectandi sive Stochastice* – lag nun bereits eine recht weit entwickelte Stochastik vor, eine Theorie, die nicht allein auf die Behandlung von Glücksspielen beschränkt sein wollte.

„Vermuten", „mutmaßen", das griechische *stochazesthai* (στοχάζεσθαι) und das lateinische *coniectare*, bezeichnen Tätigkeiten, die dem denkenden Menschen seit langem eigen gewesen sind. Deshalb ist es nicht überraschend, schon im Schrifttum der Antike, des Mittelalters und der frühen Neuzeit Überlegungen zu finden, die ins Umfeld von Sachverhalten der heutigen Stochastik gehören: Die Stochastik hat eben auch eine *Vor*-Geschichte. Auf diese wollen wir nun einen Blick werfen; allerdings können wir dabei keine Vollständigkeit anstreben /2/. Wir werden vorsichtig sein und nicht zuviel in die Zeugnisse aus der Vorgeschichte „hineinlesen"; wir dürfen aber andererseits Erkenntnisse aus früheren Zeiten auch nicht einfach deshalb als mangelhaft qualifizieren, weil die heute vorliegende Stochastik in so mancher Frage ganz wesentlich weitergekommen ist.

„Stochastik" in ihrer allgemeinen Bedeutung als „Vermutungskunst" – nicht als mathematische Disziplin – benötigte man schon in der Antike; eine frühe Belegstelle für *stochastikos* (στοχαστικός), findet man in einem der Dialoge von Platon, im *Philebos*, wo die „Kräfte des *Vermutens*" mit Hilfe dieses Wortes ausgedrückt werden. – „Stochastik" als heute gebräuchliche zusammenfassende Bezeichnung von Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematischer Statistik knüpft an die Verwendung dieses Begriffs durch Jakob Bernoulli an; er versteht darunter „die Kunst, so genau als möglich die Wahrscheinlichkeit der Dinge zu messen" /1/. 1917 hat Ladislaus von Bortkiewicz „Stochastik" und „stochastisch" wieder in den wissenschaftlichen Sprachgebrauch eingeführt /3/.

Abb. 1
Achilles und Aias, zwei Helden des Troianischen Krieges beim Brettspiel (Würfelspiel?).
Eine attische schwarzfigurige Halsamphora;
um 530/520 v. Chr.

GLÜCKSSPIELE MIT WÜRFELN, KNÖCHELN UND MÜNZEN

Schon die Griechen und Römer der Antike haben „gewürfelt" (Abb.1) – übrigens auch die Germanen, wie Tacitus in der *Germania* schreibt. Dabei sind oft eigentliche Würfel (griech. kybos – κύβος; lat. *tessera, alea*) verwendet worden, also mehr oder weniger reguläre Hexaeder, gelegentlich aber auch reguläre oder „fast reguläre" andere Polyeder. Der wohl älteste Würfel, den man bis jetzt gefunden hat, stammt aus dem nördlichen Irak: Er ist aus Ton hergestellt und dürfte etwa 5 000 Jahre alt sein. Wie Plinius der Ältere in seiner *Naturalis Historia* schreibt, hat Palamedes die Würfel im Troianischen Krieg zur Unterhaltung der Soldaten erfunden; Herodot aber berichtet, die Lyder hätten sie geschaffen, um sich den Hunger zu vertreiben. Es sind zahlreiche Würfel aus ganz verschiedenen Materialien überliefert, gute und solche mit hochsignifikanten Abweichungen von der Gleichvertei-

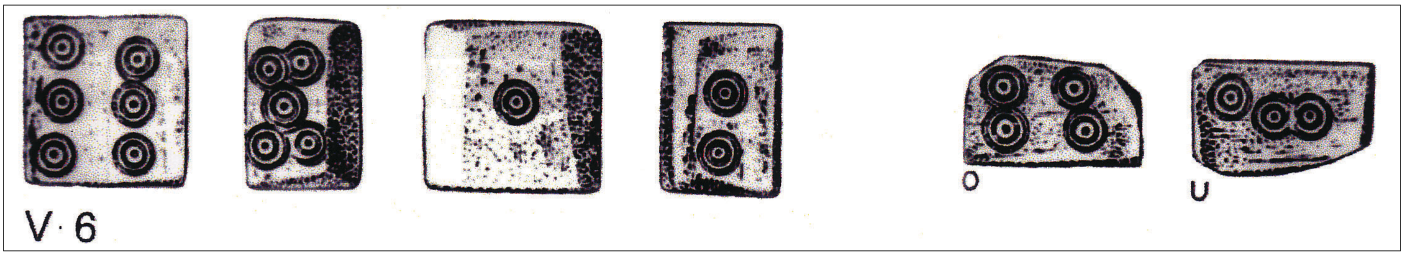


Abb. 2
Die Seitenflächen eines beinernen Würfels aus dem römischen Legionslager Vindonissa (Windisch CH); 1. Jh. n. Chr.; O: Deckfläche, U: Grundfläche. Beim Spiel hat man die Würfel oft weitergegeben; so konnte auch mit schlechten Würfeln fair gespielt werden.

lung (Abb. 2, 3). Oft hat man mit drei Würfeln gespielt; der beste Wurf war jener mit drei Sechsen. Man hat auch Würfel gefunden, die offensichtlich mit Blei oder Wachs präpariert gewesen sind: Wollte man ihnen eine gewisse Tendenz aufzwingen? Hat man somit doch so etwas wie statistische Regelmäßigkeit festgestellt, wenn die Zahl der Beobachtungen groß gewesen ist? Wollte man den Würfel fälschen? Auch im Alterum versuchte man ja gelegentlich „Durch Kunst Fortunas Fehler wieder gut zu machen", wie Horaz in den *Satiren* schreibt. (Abb. 4)

Man hat auch mit einem länglichen Knöchel aus der hinteren Fußwurzel von Schaf oder Ziege „gewürfelt", mit dem Sprungbein (*astragalos* – ἀστράγαλος; lat. *talus*). Dieser Knöchel fällt stets auf eine seiner vier Längsseiten, da die Grund- und die Deckfläche gerundet sind (Abb. 5, 6). Die vier Längsseiten sind in der Regel nicht besonders markiert worden, denn sie sind leicht zu unterscheiden. Für gewisse Spiele sind ihnen aber Zahlenwerte zugeordnet worden: 1 und 6 für die beiden einander gegenüberliegenden schmalen, 3 und 4 für die beiden breiten Seitenflächen. Beim Spiel mit vier Knöcheln zählte die Kombination der Längsseiten, die die Knöchel nach dem Wurf zeigten. Der beste Wurf war der Aphrodite- oder Venuswurf: Jeder der vier Knöchel zeigt dann eine andere Seite – also ein ausgeglichener, „harmonischer" Wurf. Der schlechteste war der Hundewurf (vielleicht ein Wurf mit viermal „1"). Beim „Meistwurf-Spiel" (πλειστοβολίνδα) begannen beide Spieler mit derselben Anzahl von Knöcheln. Jeder warf jeweils einen Astragalos; mit dem an Punkten höheren Wurf gewann man zu seinem geworfenen Knöchel noch den des Gegners. Das aufregende Hin und Her endete dann, wenn ein Spieler alle Knöchel verloren hatte. Dieses Spiel könnte Homer meinen, wenn er im 23. Gesang der *Ilias* Patroklos vom dramatischen Ausgang eines Spieles mit Knöcheln berichten lässt:

Abb. 3
Würfel aus römischer Zeit, gefunden in Aventicum (Avenches CH), einer Stadt der keltischen Helvetier, die später römische Kolonie geworden ist; 1.-3. Jh. n. Chr. Der Würfel vorne links ist aus Bronze, die anderen sind aus Bein.

> *Damals als ich den Sohn des Amphidamas hatte getötet, unbedacht gegen mein Wollen, im Zorne beim Spiele der Knöchel.*

Capita aut navia hieß bei den Römern unser „Kopf oder Zahl": *capita* („Köpfe"), weil das verwendete Geldstück auf der einen Seite den zweiköpfigen Janus zeigte; *navia*, weil die andere Seite den Bug eines Schiffes (*navis*) aufwies.

Von „wahrscheinlich" und von „Wahrscheinlichkeit" ist im Zusammenhang mit solchen Spielen nie die Rede, und ausdrückliche Hinweise auf eine gewisse Stabilität der relativen Häufigkeit finden sich nirgends. Das mag zum Teil daran liegen, dass Würfel und Knöchel auch im Orakel zur Erforschung des Willens der Götter verwendet worden sind: Da sucht man nicht nach statistischer Regelmäßigkeit! Doch beim Glücksspiel haben Griechen und Römer sehr wohl die Regellosigkeit der Ergebnisse bei der Durchführung der einzelnen Versuche festgestellt: Das Fallen der Würfel und Knöchel *im Spiel* galt den Griechen

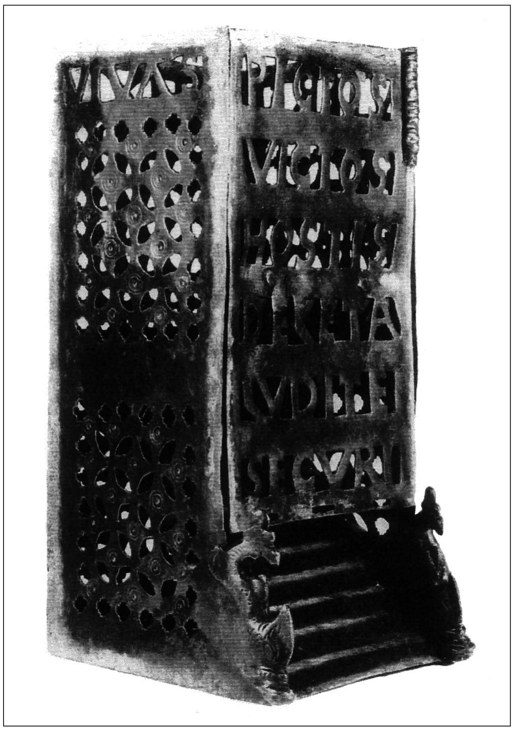


Abb. 4
Würfelturm (turricula) aus Bronzeblech, ungefähr 23 cm hoch, Grundfläche nahezu quadratisch mit 9,5 cm Seitenlänge; erste Hälfte 4. Jh. n. Chr., gefunden 1983 in der Nordeifel: ein seltener Fund, ein „Glücksspielautomat"! Oben hat man die Würfel hineingeworfen; über verschiedene Stufen kollerten sie dem Ausgang zu.

als sinnlos, und Cicero schreibt in *De divinatione*, dass hier „Geratewohl und Zufall" an Stelle von „Vernunft und Planung" regieren. Aber das Fallen des Würfels oder des Knöchels galt als *unberechenbar*. Wieso, angesichts der großen mathematischen Leistungen der Griechen? Für Shumel Sambursky /4/ ist der wesentliche Grund der, dass „die *Mentalität* der Griechen die präzise Wiederholung auf den Himmel beschränkt sah und in den irdischen Fluktuationen keine Gesetzmäßigkeit erkennen konnte".

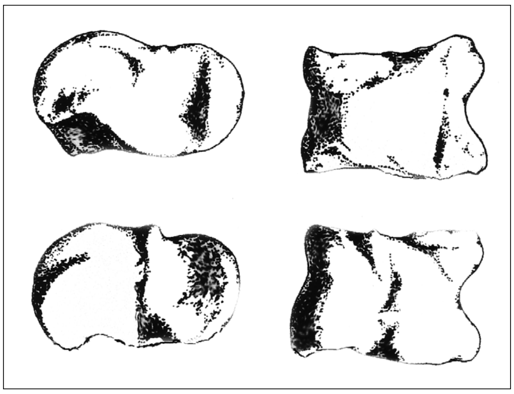


Abb. 5
Die vier Seiten des Knöchels (des Astragalos – ἀστράγαλος, lat. talus), also des Sprungbeins aus der hinteren Fußwurzel von Schaf oder Ziege, ca. 2 cm hoch, 3 cm lang. Links die beiden schmalen Längsseiten (manchmal mit 1 bzw. 6 bewertet), rechts die beiden breiten (manchmal mit 4 bzw. 3 bewertet). Relative Häufigkeit der schmalen Seiten je ca. 10 %, der breiten je ca. 40 %.

ZUFALL UND WAHRSCHEINLICHKEIT IN DER ANTIKE

Man hat in der Antike nicht nur beim Glücksspiel, sondern auch im Alltag Erscheinungen wahrgenommen, die man als *Zufälle* bezeichnet hat. Das Nachdenken darüber hat zu ganz verschiedenen Sichtweisen geführt:

– Demokrit (geb. ca. 460 v. Chr.): „Die Menschen haben sich vom Zufall ein Bild geschaffen zur Beschönigung ihrer eigenen Unberatenheit."
– Aristoteles (384-322), der erste Philosoph, von welchem uns ausführliche Überlegungen zum Begriff des Zufalls zur Verfügung stehen, vor allem in seiner *Physik*, dann auch in seiner *Metaphysik*: Es gibt ein Geschehen, von welchem der Zufall, das „*Vonselbst*" (*automaton* – αὐτόματον) oder eine *Fügung* (*tyche* – τύχη) die Ursachen sind. Dabei ist die Fügung jener Spezialfall des „Vonselbst", wo aus einer beabsichtigten Handlung etwas Unbeabsichtigtes entsteht. Zufall und Fügung sind für ihn Ursachen in nebensächlicher Bedeutung, unbestimmte Ursachen und „darum für menschliche Überlegung unerkennbar". Den Zufall durch die Berechnung von Chancen in den Griff zu bekommen, ist somit unmöglich!
– Epikur (341-270) kennt den Zufall im ganz strengen Sinn der *vollständigen Ursachenlosigkeit*. Für die *Stoiker* hingegen ist der Zufall bloß ein *subjektiver* Mangel: Die Welt ist vollständig determiniert (unerbittliches Schicksal – *fatum*).

Ähnlich wie Demokrit schreibt mehr als 2 000 Jahre später Pierre Simon de Laplace (1749-1827), dass wir „In Unkenntnis ihres Zusammenhanges mit dem Weltganzen" Ereignisse, die „ohne sichtbare Ordnung eintraten" vom Zufall abhängen lassen /5/. Und vom Zufall im ganz strengen Sinne, wie ihn Epuikur kennt, spricht 1971 auch der Biologe Jacques Monod /6/: „Der reine Zufall, nichts als der Zufall, [...] als Grundlage des wunderbaren Gebäudes der Evolution."

Probability Theory, Calcul des probabilités, Teoria delle probabilità, Calculo de probabilidades: Immer ist damit „Wahrscheinlichkeitsrechnung" oder „Wahrscheinlichkeitstheorie" gemeint. Es handelt sich um Wörter, die auf *probabilis* bzw. *probabilitas* (lat.) zurückgehen. Damit hat Cicero in der Regel jene griechischen Fachausdrücke übersetzt, die wir heute – mehr oder weniger exakt – durch „wahrscheinlich" ausdrücken. Doch *probabilis* und *probabilitas* hatten in der Antike, im Mittelalter und zum Teil bis ins 17. Jahrhundert hinein in der Regel noch nicht die heutige Bedeutung; „wahrscheinlich" war damals *Attribut* einer *Meinung*, meistens einer Meinung, die durch Autoritäten garantiert war. Die Griechen, und auf die ging ja Cicero zurück, haben nämlich fast nur einen der beiden wichtigsten Aspekte unseres heutigen Wahrscheinlichkeitsbegriffs gekannt: Sie haben den *hohen Grad des Vertrauens* in eine Aussage, die *Glaubwürdigkeit* einer Behauptung, mit Wörtern bezeichnet, die üblicherweise mit *probabilis* bzw. *probabilitas* ins Lateinische und später durch „wahrscheinlich" bzw. „Wahrscheinlichkeit" ins Deutsche übersetzt worden sind. Es ist dies der *epistemische* Aspekt der Wahrscheinlichkeit, kurz gesagt die *epistemische* Wahrscheinlichkeit (auch: *subjektive* Wahrscheinlichkeit). Sie setzt nicht notwendigerweise einen statistischen Hintergrund voraus. Und so gab es denn – von Aristoteles bis zu Thomas von Aquino – neben einem ersten Bereich, wo *sichere* Erkenntnis möglich ist, einen zweiten Bereich, den der *wahrscheinlichen*, in der Regel durch Autoritäten garantierten Erkenntnis, und schließlich einen dritten Bereich, jenen des *Zufälligen*, „für menschliche Überlegung unerkennbar", wie Aristoteles sagt.

Abb. 6
Knöchelspiel. Mit den Knöcheln ist nicht nur „gewürfelt worden"; man hat damit auch Geschicklichkeitsspiele ausgeführt. Hier das „Fünfsteinespiel": Fünf Knöchel sind hochgeworfen worden, und man musste versuchen, sie mit dem Handrücken aufzufangen und jene, die nicht aufgefangen werden konnten, mit den Fingern aufzunehmen ohne die anderen zu verlieren. Von Albert Anker (1831-1910), in klassischer Manier gemalt.

Epistemische Wahrscheinlichkeiten treten uns zunächst in verschiedenen Dialogen Platons, z. B. im *Timaios*, entgegen; dabei wird jeweils das griechische *eikos* (εἰκός) verwendet. Es handelt sich dabei immer um *hohe* Glaubwürdigkeit, um einen hohen Grad des Vertrauens – genau wie beim Gebrauch von „wahrscheinlich" in unserem Alltag: Die Gründe für die Gültigkeit einer Aussage überwiegen zwar; sie reichen aber nicht aus, um das Gegenteil auszuschließen.

Aristoteles kommt unter anderem in seiner *Topik* auf wahrscheinliche Sätze zu sprechen und definiert:

*Wahrscheinliche Sätze (*endoxa – *ἔνδοξα) aber sind diejenigen, die allen oder den meisten oder den Weisen als wahr erscheinen, und auch von den Weisen wieder entweder allen oder den meisten oder den bekanntesten und angesehensten.*

An anderen Stellen gebraucht Aristoteles *pithanos* (πιθανός), was „glaubwürdig", „fassbar" und wieder „wahrscheinlich" bedeutet – gemeint ist auch hier immer „*hohe* Wahrscheinlichkeit". Auch *eikos* tritt bei ihm wieder auf: als das, „was sich meistens ereignet". Dieses „meistens" zeigt, dass neben dem epistemischen Aspekt auch ein zweiter Aspekt der Wahrscheinlichkeit wenigstens andeutungsweise auftritt, der so genannte *aleatorische* Aspekt, kurz die *aleatorische* Wahrscheinlichkeit (*objektive* Wahrscheinlichkeit): „Meistens" als Feststellung einer großen relativen Häufigkeit gestattet auch eine Aussage von hoher Glaubwürdigkeit, eine akzeptierbare Aussage. Für uns steht ja diese aleatorische Wahrscheinlichkeit im Vordergrund bei der Beschreibung von Glücksspielen, allgemein bei Zufallsexperimenten, auch bei zufälligen Ziehungen aus Populationen. Da kann man aus genügend vielen Versuchen durch die relative Häufigkeit einen Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit gewinnen oder man nimmt beim Vorliegen gewisser Symmetrien *a priori* Zahlenwerte für die Wahrscheinlichkeit an. Es ist zu beachten, dass die Wörter „subjektiv" und „objektiv" nicht sehr geeignet sind, um die beiden Aspekte zu unterscheiden, denn durch die Wahl eines geeigneten Modells kommt in der Regel auch bei der objektiven Wahrscheinlichkeit ein subjektiver Aspekt hinzu.

Auch bei Cicero finden wir neben dem rein epistemischen Aspekt gelegentlich ein leises Anklingen des aleatorischen; so in *De inventione*, wo bei ihm in die Definition von *probabile* die Worte „was meistens zu geschehen pflegt" eingehen. Man hat jedoch in der Antike, im Mittelalter und noch weit ins 17. Jahrhundert hinein am Wahrscheinlichkeitsbegriff nicht – wie heute – zwei verschiedene Aspekte unterschieden. Eine solche Unterscheidung findet man dann zum Beispiel 1673 bei Augustin Herrera: Er erwägt einen möglichen Unterschied zwischen subjektiver *probabilitas in cognoscendo* und objektiver *probabilitas rerum* /7/.

Jakob Bernoulli benützt in seiner *Ars conjectandi* beide Aspekte, allerdings auch noch, ohne sie ausdrücklich zu trennen. Im 19. Jahrhundert haben Siméon-D. Poisson und Antoine A. Cournot aleatorische Wahrscheinlichkeiten als *chances* bezeichnet, epistemische als *probabilités* /8/. Glenn Shafer bemerkt dazu /9/:

The distinction between epistemic and aleatory probability, though emphatically insisted by many philosophers, has not been accepted by our general culture. [...] if one knows the chance of an event, then in the absence of other evidence one will surely adopt that chance as one's degree of belief. [...] alternatively, if we know the frequency with which a sign is trustworthy, then that frequency must be taken as the sign's probability.

Der epistemische Aspekt wird heute in der Wahrscheinlichkeitsrechnung oft zu wenig beachtet. Dies mag vor allem daran liegen, dass „Wahrscheinlichkeit" – implizit vorgegeben durch Axiome – meistens nur durch die relative Häufigkeit in genügend vielen Versuchen interpretiert wird /10/.

In der Antike werden auch bereits verschiedene Grade von Glaubwürdigkeit unterschieden, so von Karneades (214-129) und später von Quintilian (1. Jh. n. Chr.), allerdings bloß qualitativ. Im *Corpus Hippocraticum*, so benannt nach Hippokrates (459 bis Mitte 4. Jh. v. Chr.), tritt *pithanos* im Sinne von „wahrscheinlich" auf, und es finden sich Aussagen, in denen Risiken des Sterbens infolge gewisser Verletzungen oder Mortalitäten von Krankheiten miteinander verglichen werden. Doch auch alle diese Vergleiche sind bloß qualitativ. An sich ist auch für eine epistemische Wahrscheinlichkeit, etwa für die Intensität des Überzeugungsgrades einer Person ein numerischer Wert bestimmbar /11/. Dies ist z. B. mit Hilfe einer Wette möglich; darauf hat übrigens auch Immanuel Kant aufmerksam gemacht /12/.

ERSTE SCHRITTE ZUR QUANTIFIZIERUNG – „GÜNSTIGE" UND „UNGÜNSTIGE" FÄLLE

Einer der Gesänge des Hauptwerkes des großen italienischen Dichters Dante Alighieri (1265-1321), der *Divina Commedia* – „Göttliche Komödie", beginnt mit den Versen /13/:

Beim Abschiednehmen nach dem Würfelspiele
bleibt der zurück wohl, der verlor, voll Leid,
und probt zum Lernen Würfe aus. Doch viele
dem andern aber geben das Geleit, ...

Quando si parte il gioco della zara,
colui che perde si riman dolente,
Ripetendo le volte, e tristo impara;
con l'altro va tutta la gente ...

Bei diesem Würfelspiel geht es um den *gioco della zara*: Drei Würfel werden geworfen, und man hat die Summe der Augenzahlen vorauszusagen. Bereits die frühen Kommentatoren der *Divina Commedia* überlegen sich Sachverhalte, die heute zur Wahrscheinlichkeitsrechnung gehören. So kann man schon im Kommentar von Jacopo di Giovanni della Lana, der zwischen 1324 und 1328 entstanden sein muss, lesen

– dass die Summen der Augenzahlen, die zwischen 4 und 17 liegen, auf mehr Arten realisiert werden können, als 3, 4, 17, 18 und dass Summen, die auf mehr Arten erzeugt werden können als andere, auch öfters auftreten müssen als die anderen;
– dass jene Summe als die beste zu betrachten ist, die auf die meisten Arten realisiert werden kann;

– dass aber oftmals gerade jene Summe kommen kann, die eigentlich weniger oft kommen sollte.

Wir sehen: Della Lana macht, wie übrigens auch andere Kommentatoren, einige tastende Schritte im Hinblick auf eine Mathematisierung der Situation beim *gioco della zara* /13/. Er erkennt, dass für die Beurteilung der Chancen die Anzahl der Realisierungsmöglichkeiten entscheidend ist und dass auch der Zufall im Spiel ist. Von „wahrscheinlich“ und von „Wahrscheinlichkeit“ wird aber nicht gesprochen. Della Lana stellt auch fest, dass 3 und 18 nur auf eine Art verwirklicht werden können, sieht dies aber auch so bei 4 und 17. Ein Versehen, doch 400 Jahre später machen Gottfried Wilhelm Leibniz in einem Brief und Jean le Rond d'Alembert in der *Encyclopédie* von Denis Diderot Fehler von derselben Art!

Ungefähr aus demselben Zeitraum liegt eine Dichtung vor, in welcher dieses Problem mit den drei Würfeln und der Summe ihrer Augenzahlen ausführlich und mit allen notwendigen Begründungen korrekt behandelt wird: *De Vetula*, eine fiktive Autobiographie von Ovid, in lateinischen Hexametern von einem unbekannten Autor verfasst /14/: Aus 1, 2, 3, 4, 5, 6 werden alle 56 Kombinationen mit Wiederholung der Länge 3 (hier *punctaturae* genannt) zusammengestellt; anschließend werden auch die zugehörigen Permutationen bestimmt, und es wird für jede Summe der Augenzahlen die Anzahl der Realisierungsmöglichkeiten (hier als *cadentiae* bezeichnet) untersucht. Es wird auch ausdrücklich auf den Zufall hingewiesen. Zwei Beispiele:

> *Wenn aber alle drei Ziffern verschieden sind, so findest du [jeweils] sechs Anordnungen: Hast du nämlich einen Platz zugeteilt, so permutieren* [permutant!] *die andern zwei ihre Plätze. [...]*
> *Ich aber sage dir [...], dass darin der Zufall* [casus] *stecken muss, wenn das Glück dir oder deinen Kameraden den besseren Wurf zugesteht.*

Wir treffen hier also zunächst auf eine vollständige Aufzählung der 216 (gleichmöglichen) Elementarereignisse aus denen sich die 16 verschiedenen Summen von Augenzahlen zusammensetzen können. Diesen Summen werden noch keine Zahlenwerte zugeordnet, keine Wahrscheinlichkeiten im heutigen Sinne. Doch mit der Anzahl der *cadentiae* ist jeweils die Anzahl der „günstigen“ Fälle – wie man später sagen wird – gegeben. Damit will man beurteilen, welche Voraussagen vorteilhafter sind, und dies setzt wieder voraus, dass man einen Zusammenhang ahnt zwischen diesen Anzahlen und der Häufigkeit des Auftretens der einzelnen Summen im Spiel.

Vermutlich zwischen 1351 und 1360 hat der vielseitige Theologe, Philosoph, Naturwissenschafter und Mathematiker Nicole Oresme (ca. 1320-1382) *De proportionibus proportionum* geschrieben. Wir können hier nicht allgemein auf den mathematischen Inhalt seiner Arbeit eingehen, nur auf einige seiner Überlegungen, die zur Vorgeschichte der Stochastik gehören. Er stellt fest, dass wenn wir eine (endliche) Menge von (natürlichen) Zahlen nehmen, so

> *ist die Anzahl der vollkommenen Zahlen oder die Anzahl der Kubikzahlen viel kleiner als die der anderen Zahlen, und je mehr Zahlen wir nehmen, desto größer ist das Verhältnis der Nicht-Kubikzahlen zu den Kubikzahlen oder der nicht vollkommenen Zahlen zu den vollkommenen. Wenn wir daher von einer Zahl gar nicht wissen, was für eine sie ist […], so ist es* wahrscheinlich [verisimile]*, dass diese keine Kubikzahl ist. Es ist* wie in den Spielen [sicut est in ludis]*, wo jemand fragt, ob eine verborgene Zahl eine Kubikzahl sei. Es ist vorsichtiger, mit ‚nein‘ zu antworten, weil dies* wahrscheinlicher [probabilius et verisimilius] *scheint.*

Darauf betrachtet er u. a. eine Menge von 100 verschiedenen mathematischen Objekten, die er in einer bestimmten Art gebildet hat, und stellt fest, dass daraus nun (100 • 99) : 2 = 4 950 Kombinationen von je zwei Elementen (wie wir heute sagen) gebildet werden können: Von denen weisen 4 925 eine gewisse ihn interessierende Eigenschaft E auf, während die restlichen diese Eigenschaft E nicht haben. Er berechnet jetzt den Quotienten 4925 : 25 = 197 : 1 und schließt daraus, es sei *wahrscheinlich* (*verisimile*), dass wenn nach einer solchen unbekannten Kombination gesucht werde, diese die Eigenschaft E aufweise.

Oresme berechnet somit die Anzahl der günstigen und die Anzahl der ungünstigen Fälle und deren Quotienten. Damit hat er noch nicht den Quotienten aus der Anzahl der günstigen und der gesamten Zahl der gleichmöglichen Fälle, noch nicht das, was wir heute als „Wahrscheinlichkeit“ oder eventuell als „Maßzahl der Wahrscheinlichkeit“ bezeichnen. Er hat damit aber immerhin die *„Leichtigkeit des Eintreffens“* eines Ereignisses quantitativ beurteilt. Er stellt dazu fest, bei seinen Problemen sei es wie in den Spielen und verwendet dabei das Wort „wahrscheinlich“, ausgedrückt durch *verisimile* und an anderer Stelle durch *probabile*. Sein „wahrscheinlich“ hat aber noch dieselbe Bedeutung wie in unserer Umgangssprache: Es ist damit eine „hohe Wahrscheinlichkeit“ gemeint. Weiter drückt er durch *improbabile/probabile* oder durch *probabile/probabilius*, *verisimile/verisimilius*, allenfalls ergänzt durch *maxime verisimile*, eine gewisse Graduierung aus; „gleichmöglich“ drückt er durch *possibile equaliter* aus: Alles Ausdrücke, die *vor* Nicole Oresme und noch lange nach ihm bei Spielen, wo es ja um *aleatorische* Wahrscheinlichkeiten geht, nicht verwendet worden sind /15/.

Die Gegenüberstellung der Anzahl der günstigen und der Anzahl der ungünstigen Fälle, um die „Leichtigkeit des Eintreffens“ eines Ereignisses quantitativ zu beurteilen – wie wir sie nun bei Oresme wieder gefunden haben – ist eigentlich naheliegend. Deshalb überrascht es nicht, sie auch später bei verschiedenen Autoren wieder zu finden, so z. B. bei Galileo Galilei (1564-1642) /16/. Auch Blaise Pascal (1623-1662) und Pierre de Fermat (1601-1665) stellen in ihrem Briefwechsel von 1654, wo unter anderem das so genannte Teilungsproblem behandelt und richtig gelöst wird, im Prinzip günstige und ungünstige Fälle einander gegenüber. Wir illustrieren dies durch einige Sätze aus einem Brief von Pascal an Fermat /17/:

> *[...] wenn zwei Spieler beispielsweise auf drei Gewinnspiele spielen und jeder 32 Goldmünzen eingesetzt hat: Nehmen wir an, dass der erste zwei und der andere eine Partie gewonnen hat; sie spielen nun eine [weitere] Partie [...]. Wenn der erste sie gewinnt, gewinnt er den ganzen Einsatz, nämlich 64 Goldmünzen; wenn der andere sie gewinnt, so steht es zwei Partien zu zwei und folglich muss jeder seinen Einsatz, nämlich 32 Goldmünzen zurücknehmen, falls sie sich trennen wollen.*

Für den Fall, dass die Spieler sich nun wirklich trennen wollen bevor diese weitere Partie gespielt worden ist, stellt Pascal fest, dass dem ersten Spieler in jedem Falle 32 Goldmünzen sicher sind. Die anderen 32 Goldmünzen wird vielleicht der erste, vielleicht der zweite erhalten:

> *Die Aussichten sind gleich* [Le hasard est égal]. *Teilen wir also diese 32 Goldmünzen zu gleichen Teilen und geben sie mir [das ist der erste Spieler] außerdem meine 32, die mir sicher sind.*

Der erste Spieler hat also bei diesem vorzeitigen Abbruch des Spiels Anrecht auf 48 Goldmünzen (32 + 16), der andere auf 16. Jetzt könnte der Mathematiker natürlich sagen, dass hier doch einfach unser Erwartungswert bestimmt worden ist: (1/2) • 64 + (1/2) • 32 = 48. Aber Pascal arbeitet ja noch gar nicht mit Wahrscheinlichkeiten, die jeweils mit allfälligen Gewinnen zu multiplizieren sind. Mit solchen Produkten rechnet dann Nikolaus Bernoulli (1687-1759), und erst Abraham de Moivre (1667-1754) gibt die heute übliche Definition des Erwartungswertes /18/. Es geht Pascal hier nur um die noch nicht sicher zugeteilten 32 Goldmünzen und dafür gibt es zwei gleichmögliche Fälle – *Le hasard est égal* –, einer günstig, einer ungünstig.

Die günstigen Fälle bezeichnet Juan Caramuel y Lobkowitz (1606-1682) in seiner *Mathesis biceps vetus et nova* von 1670 als *modi lucrandi* („Gewinnfälle"), die ungünstigen als *modi perdendi* („Verlustfälle") /19/. Einen *Quotienten* aus der Anzahl der günstigen und der Anzahl *aller gleichmöglichen Fälle* hat wohl als Erster Girolamo Cardano (1501-1576) berechnet, allerdings auch er noch, ohne von „Wahrscheinlichkeit" zu sprechen. Er schreibt in seinem um 1564 verfassten *Liber de Ludo Aleae* /20/ über das Auftreten der Summe 10 beim Ausspielen von zwei Würfeln:

> *Die Summe besteht aus (5, 5) und (6, 4); letzteres kann aber auf zwei Arten entstehen, so dass die Anzahl der Wege, die 10 ergeben, 1/12 der gesamten Möglichkeiten* [duodecima pars circuitus] *ist.*

CHRISTIAAN HUYGENS UND JAKOB BERNOULLI

Christiaan Huygens (1629-1695) hat 1657 – in Paris angeregt durch die Gespräche von Gelehrten über solche Probleme – *De Ratiociniis in Ludo Aleae* publiziert; eine kleine streng systematische Abhandlung über Glücksspiele, aber „die Grundlagen einer sehr interessanten und tiefen Theorie", wie er in einem Brief an den Herausgeber schreibt. Er arbeitet mit einem Erwartungswert (*valor expectationis*, kurz *expectatio*), den er aber nicht durch Produkte aus Wahrscheinlichkeit und allfälligem Gewinn definiert, sondern durch den weitgehend intuitiv erfassten Begriff des rechtmäßigen Spiels (*aequa conditione certans – rechtmatigh spel* in der niederländischen Fassung). Er berechnet diesen Erwartungswert z. B. im Satz III seiner Abhandlung so /21/:

> *Wenn die Anzahl der Fälle, in welchen mir a zufällt, gleich p und die Anzahl der Fälle, in welchen mir b zufällt, gleich q ist, so wird meine Erwartung* [expectatio] *unter der Annahme, dass alle Fälle gleich leicht eintreten können, (pa + qb)/(p + q).*

Als Jakob Bernoulli die lateinische Fassung der Abhandlung von Huygens las, fand er darin keinen Ausdruck für „Wahrscheinlichkeit", sondern eben jenen für „Erwartung", also *expectatio*. Jakob Bernoulli arbeitet nun auch über weite Strecken mit diesen Erwartungswerten. Er betrachtet jetzt unter anderem den Spezialfall b = 0, also ein Spiel, in welchem man p Möglichkeiten hat, a zu gewinnen und q Möglichkeiten, nichts zu gewinnen. Der Erwartungswert ist dann a • p/(p+q). Der Term p/(p+q) ist bereits der später als *klassische Wahrscheinlichkeit* bezeichnete Quotient aus der Anzahl der günstigen Fälle dividiert durch die Anzahl der gleichmöglichen. Bernoulli spricht dabei wieder von *expectatio* oder von *sors* (Schicksal, Los). Erst im Teil IV seiner *Ars conjectandi* führt er dann *probabilitas*, also „Wahrscheinlichkeit" ein; hier verbindet Jakob Bernoulli Glücksspielrechnung und *probabilitas* /9/. Es geht ihm ja um das *Vermuten*, das *Mutmaßen*, und das heißt für ihn jetzt: *Wahrscheinlichkeiten messen*. Er definiert deshalb zunächst /1/:

> *Die Wahrscheinlichkeit ist nämlich ein Grad der Gewissheit und unterscheidet sich von ihr wie ein Teil vom Ganzen.*

Da treffen wir offensichtlich auf den *epistemischen* Aspekt der Wahrscheinlichkeit. Die zugehörige Maßzahl findet er dann aber nach den Methoden der Glücksspielrechnung, bei der ja der *aleatorische* Aspekt im Vordergrund steht:

> *[Weil] die Beweiskraft, welche irgend ein Beweisgrund hat, von der Menge der Fälle abhängt, in welchen dieser vorhanden oder nicht vorhanden sein kann, [...] kann der Grad der* Gewissheit *oder die*

> Wahrscheinlichkeit *[...] berechnet werden, wie die Hoffnungen der Teilnehmer an einem Glücksspiel gefunden zu werden pflegen.*

So gelangt er zur so genannten *klassischen* Berechnung der Wahrscheinlichkeit, zu jenem Quotienten, der später zur *Laplaceschen Definition* der Wahrscheinlichkeit geworden ist.

Bernoulli kommt im Teil IV der *Ars conjectandi* dann auch darauf zu sprechen, dass es fast nur in Glücksspielen möglich ist, die Zahl der Fälle, die „mit gleicher Leichtigkeit" eintreten können, im Voraus – *a priori* – zu bestimmen, dass uns aber oft ein anderer Weg offen steht, nämlich „das Gesuchte [...] *a posteriori*, d. h. aus dem Erfolge, welcher bei ähnlichen Beispielen in zahlreichen Fällen beobachtet wurde, zu ermitteln"; diese empirische Art sei „weder neu noch ungewöhnlich". Solche Gedanken führen ihn dann schließlich zu Formulierung und Beweis des Lehrsatzes, den man heute als *Gesetz der großen Zahlen von Bernoulli* bezeichnet.

Ivo Schneider /22/ hat klar herausgearbeitet, was es gebraucht hat, damit schließlich jene Wahrscheinlichkeitsrechnung entstehen konnte, deren Grundlagen Jakob Bernoulli geschaffen hat:

> *Zwei voneinander unabhängige Entwicklungen führten durch ihr Zusammentreffen zur Mathematisierung des Wahrscheinlichen in der Zeit zwischen Pascal und de Moivre: [...]* die Wandlung des Bedeutungsinhalts von probabilitas zu einem quantifizierbaren Begriff *und [...]* das Konzept des Zufalls, das im Rahmen der Glücksspiele in einer Chancenverhältnisrechnung mathematisiert wurde.

Von der Wichtigkeit der Wahrscheinlichkeitsrechnung war wohl schon Pascal überzeugt, schreibt er doch 1654 in seiner Eingabe /23/ an die Pariser Akademie zu seinen Arbeiten über die Glücksspielrechnung mit freudigem Stolz:

> ***Die Sache [d. h. das Problem des Glücksspiels] irrte bis zur Stunde im Ungewissen; nun aber hat sie, die sich dem Experiment nicht fügen wollte, der Herrschaft des Verstandes nicht entgehen können. [...] Und indem sie so die Beweiskraft der Mathematik mit der Ungewissheit des Würfels verbindet und versöhnt, was gegensätzlich schien, empfängt sie von beiden ihre Benennung und nimmt mit Recht den staunenerregenden Titel in Anspruch: MATHEMATIK DES WÜRFELS – ALEAE GEOMETRIA.***

Bibliographie

/1/ Bernoulli, J.: Wahrscheinlichkeitsrechnung (Ars conjectandi); übersetzt von R. Haussner.
Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften 107 u. 108. Leipzig 1899: Akadem. Verlagsanstalt.
Die Werke von Jakob Bernoulli, Bd.3.; bearb. von B.L. van der Waerden. Basel 1975: Birkhäuser.

/2/ Die vorliegende Arbeit ist die ausgearbeitete Fassung eines Plenarvortrages anlässlich der Magdeburger Stochastiktage 2002. Für weitere Ausführungen zu unserem Thema: Ineichen, R.: Würfel und Wahrscheinlichkeit – Stochastisches Denken in der Antike. Heidelberg 1996: Spektrum Akademischer Verlag.

/3/ Bortkiewicz, L.: Die Iterationen. Berlin 1917: Springer.

/4/ Sambursky, S.: Das physikalische Weltbild der Antike. Zürich 1965: Artemis.

/5/ de Laplace, P.S.: Philosophischer Versuch über die Wahrscheinlichkeit (1814); hrsg. von R. von Mises.
Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften 233. Leipzig 1932: Akadem. Verlagsgesellschaft.

/6/ Monod, J.: Zufall und Notwendigkeit. München 1971: Piper.

/7/ Knebel, S.K.: Wille, Würfel und Wahrscheinlichkeit, p. 98. Hamburg 2000: Meiner.

/8/ Cournot, A.A.: Exposition de la théorie des chances et des probabilités. Paris 1843: Hachette.
Poisson, S.D. : Recherches sur la probabilité des Jugements en Matière Criminelle et en Matière Civile, précédées des Règles Générales du Calcul des Probabilités. Paris 1837: Bachelier.

/9/ Shafer, G.: The Emergence of probability. Journal of the American Statistical Association, 71 (1976), 519-521.
Non-Additive Probabilities in the Work of Bernoulli and Lambert. Archive for History of Exact Sciences, 19 (1978), 309-370, p. 310.

/10/ Ineichen, R.: Zufall und Wahrscheinlichkeit – einst ganz getrennt, jetzt eng verbunden. Elemente der Mathematik 54 (1999), 1-14.

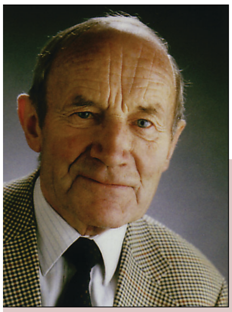
/11/ De Finetti, B.: Teoria delle probabilità. Torino 1976: Giulio Einaudi.

/12/ Kant, I.: Sämtliche Werke, Bd. 3 – Kritik der reinen Vernunft, p. 620. Leipzig 1920: Inselverlag.

/13/ Dante Alighieri: Die Göttliche Komödie, II. Teil, Das Fegefeuer, Sechster Gesang; übersetzt von Konrad zu Putlitz, Berlin 1921: Tempel-Verlag.
Ineichen, R.: Dante-Kommentare und die Vorgeschichte der Stochatsik. Historia Mathematica 15 (1986), 264-269.

/14/ Klopsch, P. (Hrsg.): Pseudo-Ovidius de Vetula – Untersuchungen und Text. Mittelat. Studien, hrsg. von K. Langosch. Leiden 1967: Brill.

/15/ Ineichen, R.: „Es ist wie bei den Spielen“ – Nicole Oresme und sein Beitrag in der Vorgeschichte der Stochastik. NTM – Internationale Zeitschrift für Geschichte und Ethik der Naturwissenschaften, Technik und Medizin 9 (2001), 137-151.
/16/ Galilei, G.: Sopra le scoperte de i dadi.Opere. A.c. di S. Timpanaro, Vol. I. Milano 1936: Rizzoli.
/17/ Schneider, I. (Hrsg.): Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie von den Anfängen bis 1933 – Einführungen und Texte, p.27. Darmstadt1988: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.
/18/ de Moivre, A.: The doctrine of chance, London 1756: Millar. Repr. New York 1967; Chelsea.
/19/ Ineichen, R.: Juan Caramuels Behandlung der Würfelspiele und des Zahlenlottos. NTM – Internationale Zeitschrift für Geschichte und Ethik der Naturwissenschaften, Technik und Medizin, 7 (1999), 21-30.
/20/ Cardano, G.: Liber de ludo aleae. Hieronymi Cardani Opera omnia, t.1. Lugduni 1663: Sumptibus Ioannis Antonii Huguetan & Marci Antonii Ravaud, Repr. Stuttgart 1966: Frommann.
/21/ Huygens, Chr,: De ratiociniis in ludo aleae. In: Frans van Schooten (Hrsg.), Exercitionum mathematicarum libri quinque, Liber V. Leiden 1657: Ex officina Joannis Elsevirii. – Deutsche Übersetzung in Bernoulli, J. (1899, /1/).
/22/ Schneider, I.: The introduction of probability into Mathematics. Historia Mathematica 3 (1976), 135-140.
/23/ Pascal, B.: Oeuvres complètes, Texte établi, présenté et annoté par Jacques Chevalier, p. 74. Paris 1954: Gallimard.



Prof. emeritus Dr. Robert Ineichen,
geboren 1925 in Luzern (CH), Studium (Mathematik, Physik) an der Universität Zürich, an der ETH in Zürich, an der Faculté des Sciences der Sorbonne in Paris. Diplom für das höhere Lehramt (Universität Zürich), 1950 Promotion mit einer mathematischen Dissertation bei Prof. Dr. Rudolf Fueter (Universität Zürich), später ein Aufenthalt an der Abteilung für Biomathematik der Universität Zürich. Mehrjährige Lehrtätigkeit am Gymnasium in Luzern, anschließend Professor und Vizedirektor am Zentralschweizerischen Technikum (Fachhochschule für Technik und Architektur) Luzern, dann Professor an der Universität Fribourg, im Herbst 1991 als Ordinarius emeritiert. Publikationen: Arbeiten zur Stochastik, vor allem zu ihrer Geschichte, zur Biomathematik, zur Didaktik der Mathematik; Verfasser von Lehrmitteln für den mathematischen Unterricht an Gymnasien; 1996 „Würfel und Wahrscheinlichkeit – Stochastisches Denken in der Antike“; 1999 „Stochastik – Einführung in die elementare Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung“ (10. Aufl.).